Física I: Solución Examen 1

Profesor: *Alejandro Valdivia*

Problema 1: (3 puntos) El radio R de un hoyo negro se define como la distancia del centro donde ni la luz puede escapar. Este radio depende de la masa del objeto M, la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^5$ km/s, y la constante gravitacional $G = 7 \times 10^{-11}\ m^3 s^{-2} kg^{-1}$. (**Notar: Cuidado con las unidades**).

- Encuentre la relación para el radio del hoyo negro R en termino de M, G y c.
- De que tamaño es un hoyo negro que tiene la masa de la tierra $M_t = 6 \times 10^{24}$ kg
- De que tamaño es un hoyo negro que tiene la masa del sol $M_s = 2 \times 10^{30}$ kg

Solución 1: En este caso tenemos que usar análisis dimensional para encontrar la relación entre R, M, G, y c.

- Aquí tenemos queremos escribir $R = M^\alpha G^\beta c^\gamma$. O en unidades

$$[kg]^0[s]^0[m]^1 = [km]^\alpha \frac{[m]^{3\beta}}{[s]^{2\beta}[kg]^\beta} \frac{[m]^\gamma}{[s]^\gamma}$$

  con lo que obtenemos

$$R = \frac{GM}{c^2} = \frac{7}{9} \times 10^{27} M$$

  usando $c = 3 \times 10^8$ m/s.

- Para el caso de la tierra $M_t = 6 \times 10^{24}$ kg, tenemos

$$R = 0.02\ \ m$$

- Para el caso del sol $M_t = 2 \times 10^{30}$ kg, tenemos

$$R = 1\ \ km$$

Problema 2: (2 puntos) Estimar la densidad de masa (masa por unidad de volumen) en la galaxia, sabiendo que la estrella mas cercana esta a 4 años-luz.

Solución 2: Podemos estimar la densidad de masa de la galaxia asumiendo que debe de haber un sol en cada esfera de 4 años-luz, en promedio. 4 AL (año-luz) es la distancia que recorre un haz de luz en 4 años, osea

$$R = 4AL \times 3 \times 10^8 \left(\frac{m}{s}\right) \times (3600 \times 24 \times 365s) \sim 10^{16} \ \ m$$

y por lo tanto la densidad es

$$\rho = \frac{M_s}{V} \sim \frac{M_s}{R^3} \sim \frac{2 \times 10^{30} kg}{10^{48} m^3} = 2 \times 10^{-18} \ \ kg/m^3$$

Problema 3: (2 puntos) Supongamos que tenemos un auto que va a una velocidad de $v = 90$ km/hr cuando ve un auto detenido a una distancia de $d = 50$ m. (**Notar: Cuidado con las unidades**)

- Cual es la desaceleración mínima necesaria para que no colisione con el auto detenido?
- Cuanto tiempo se demora en detenerse?

Solución 3: Dado que necesitamos bajar de $v_o = 25$ m/s a $v_f = 0$ en una distancia de $\Delta x = 50$, podemos usar la expresión

$$2a_o\Delta x = v_f^2 - v_o^2 \qquad \rightarrow \qquad a_o = \frac{-v_o^2}{2\Delta x} = -6.25 \ \ m/s^2$$

Y podemos ahora calcular cuanto nos demoramos de la expresión

$$v_f = v_o + a_o t \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{-v_o}{a_o} = 4 \ \ s$$

Problema 4: (3 puntos) Supongamos que tenemos un cohete que se mueve con una velocidad

$$v(t) = 2\exp[2t] \;\; m/s$$

Asumiendo que en $t = 0$ s el cohete esta en $x(0) = 10$ m, encuentre la posición del cohete y su aceleración en $t = 1$ s. **Es útil notar:**

$$\frac{d\left(\exp[\alpha t]\right)}{dt} = \alpha \exp[\alpha t]$$

$$\int^{t} \exp[\alpha\tau] d\tau = \frac{1}{\alpha}\exp[\alpha t]$$

$$\begin{array}{lcl} \exp[0] & = & 1 \\ \exp[1] & = & 3 \\ \exp[2] & = & 7 \\ \exp[3] & = & 20 \\ \exp[4] & = & 55 \\ \exp[5] & = & 150 \end{array}$$

Solución 4: Para encontrar la aceleración, tomamos la derivada de la expresión, obteniendo

$$a(t) = 4\exp[2t] \qquad \rightarrow \qquad a(1) = 4 \times \exp[2] = 28 \;\; m/s^2$$

La posición del cohete en $t = 1$ se puede obtener de

$$x(1) = x_o + \int_0^1 v(\tau) d\tau = 10 + \int_0^1 2\exp[2\tau] d\tau = 10 + [\exp[2] - \exp[0]] = 16 \;\; m$$

dado que la integral indefinida es

$$h(t) = \int^{t} 2\exp[2\tau] d\tau = \exp[2t]$$

Problema 5: (5 puntos) Tomemos un objeto que se mueve con una velocidad como se muestra en la Fig. 1.

- Construya el gráfico y la ecuación de la aceleración
- Cuanto vale $x(3)$ si asumimos que $x(0) = 5$ m
- Escriba la ecuación para v(t)
- Construya el gráfico y la ecuación de la posición $x(t)$

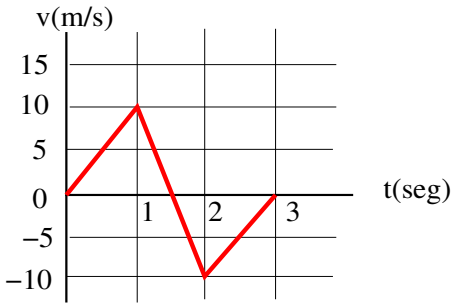
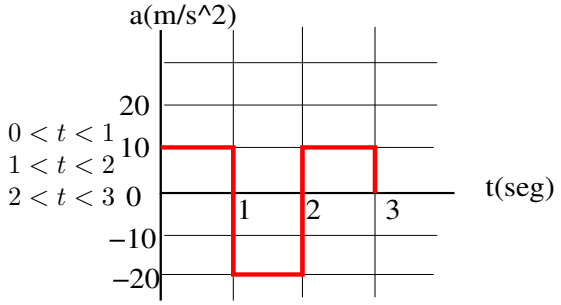


Figure 1: (a) Velocidad

Solución 5: Esta es una situación de aceleración constante.

- El gráfico de la aceleración es fácil ya que son pendientes constantes

$$a(t) = \begin{cases} 10 \ m/s^2 & 0 < t < 1 \\ -20 \ m/s^2 & 1 < t < 2 \\ 10 \ m/s^2 & 2 < t < 3 \end{cases}$$

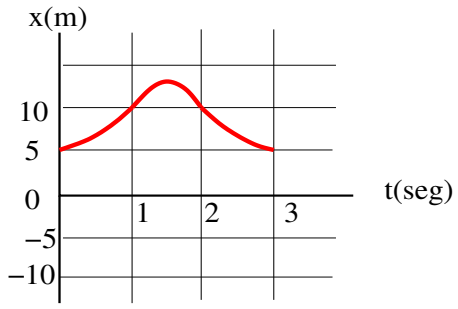


- $x(3)$ se puede calcular rápidamente como el área debajo de curva de $v(t)$ mas la condición inicial. Dado que el área bajo la curva es cero, entonces tenemos que $x(3) = x(0) = 5$ m.
- El gráfico de la posición hay que hacerla por partes. Pero como sabemos las condiciones iniciales, podemos resolver usando la expresión en cada intervalo

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2$$

Con lo cual obtenemos

$$x(t) = \begin{cases} 5 + 5t^2 & 0 < t < 1 \\ 10 + 10(t-1) - 10(t-1)^2 & 1 < t < 2 \\ 10 - 10(t-2) + 5(t-2)^2 & 2 < t < 3 \end{cases}$$



en metros. Con esto se comprueba que $x(3) = 5$ m como debería ser.