Física I: Examen 4 Miércoles 23 de Noviembre de 2005

Profesor: *Alejandro Valdivia*
Para recibir crédito muestre el desarrollo de su trabajo.
No se dará crédito por resultado sin desarrollo.
Un 5 corresponde a 5 puntos.

Problema (3 puntos): Tomemos el péndulo de la Fig. 1a, compuesto de una barra de largo L y masa m ($I_{com,b} = mL^2/12$), y una masa puntual en su extremo de masa m. Este péndulo parte del reposo en forma horizontal. Si el péndulo colisiona en forma elástica con una masa $m_1 = 4m/3$ que esta en reposo en el suelo como se observa en la Fig. 1b, cuan lejos llega la masa m_1 si tenemos fricción en el suelo. Y cual es el ángulo de máxima deflexión del péndulo?

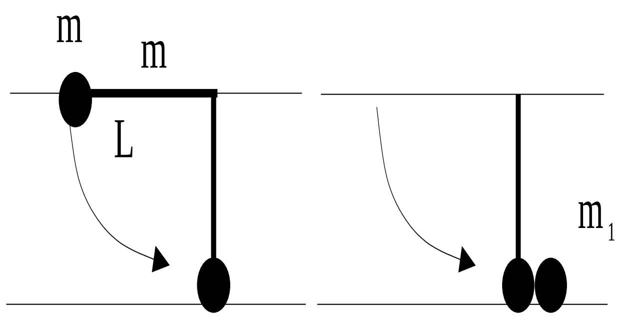

Figura 1: (a) Condición inicial del péndulo. (b) Colisión con la masa puntual en el suelo.

Solución Problema: Este problema se divide en tres intervalos: (a) Conservación de energía para calcular la velocidad angular del péndulo justo antes de la colisión, (b) Conservación de momento angular y energía cinética de justo antes a justo después de la colisión, (c) teorema energía trabajo para calcular cual lejos llega. El momento de inercia del péndulo es

$$I = \left[I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + mL^2 \right] = \frac{4}{3}mL^2$$

usando el teorema del eje paralelo. La frecuencia angular del péndulo justo antes de la colisión se puede encontrar usando conservación de energía

$$2mgL = E_i = E_f = 2mgh_{com,A} + \frac{1}{2}I\omega_A^2$$

con

$$2mh_{com,A} = m\frac{L}{2}$$

Por lo tanto

$$\omega_A = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

De justo antes a justo después de la colisión, tenemos que forzar conservación de momento angular y conservación de energía cinetica

$$\begin{array}{rcl} I\omega_A & = & I\omega_D + \frac{4}{3}mLv_D \\ \frac{1}{2}I\omega_A^2 & = & \frac{1}{2}I\omega_D^2 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}mv_D^2 \end{array}$$

Notemos que la elección de $m_1 = 4m/3$ fue hecha para que

$$\begin{array}{rcl} \omega_A & = & \omega_D + \frac{v_D}{L} \\ \omega_A^2 & = & \omega_D^2 + \left(\frac{v_D}{L}\right)^2 \end{array}$$

por lo tanto la solución es

$$\begin{array}{rcl} \omega_D & = & 0 \\ \frac{v_D}{L} & = & \omega_A \end{array}$$

lo que implica que el pendulo se queda en el suelo y $v_D = L\omega_A$. En el tercer intervalo podemos ahora resolver

$$0 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}mv_D^2 = -\mu_k \frac{4}{3}mg\Delta x$$

por lo tanto

$$\Delta x = \frac{v_D^2}{2\mu_k g} = \frac{9L}{8\mu_k}$$

Problema (2 puntos): Tomemos el disco de masa $m = 5$ kg y radio $R = 2$ m acostado sobre un plano inclinado de ángulo $\theta = 30^o$ como se observa en la Fig. 2a. Aparte de la gravedad, hay dos fuerzas de magnitud $F = 5$ N actuando sobre el disco como se observa en la Fig. 2b. Si el disco parte del reposo a una altura $h = 5m$. Cuanto vale la velocidad angular cuando el disco llega al suelo.

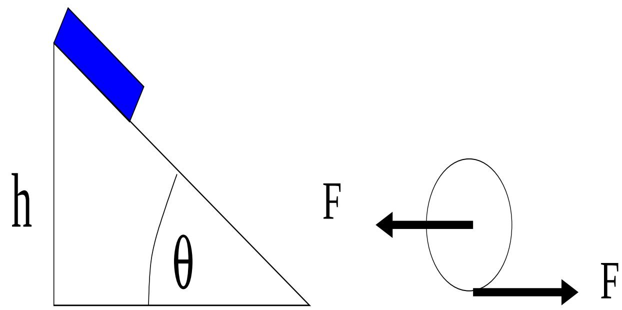

Figura 2: (a) Disco vista horizontal. (b) Vista vertical

Solución Problema: Esto es un problema de rotación. En el sistema de referencia del plano inclinado miremos las fuerzas sobre el centro de masa

$$\begin{aligned} ma_{com,x} &= F - F - mg\sin\theta \\ ma_{com,y} &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

Para lo cual fácilmente obtenemos

$$a = a_{com,x} = -g\sin\theta = -5 \;\; m/s^2$$

Dado que partimos de una distancia $x_o = L = h/\sin 30 = 10$ m, entonces el tiempo t_s para llegar al suelo ($x(t_s) = 0$) se resuelve de

$$x(t) = L + \frac{a}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t_s = \sqrt{-\frac{2L}{a}} = 2s$$

Ahora para la rotación con respecto al centro de masa tenemos

$$I\alpha = RF$$

usando $I = mR^2/2 = 10$ kgm^2, podemos encontrar

$$\alpha = \frac{RF}{I} = 1 \;\; rad/s^2$$

y por lo tanto

$$\omega_s = \alpha t_s = 2 \;\; rad/s$$