Polinomio de Interpolación

Supongamos que queremos generar un polinomio de interpolación

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

que pase con los puntos

$$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2) \qquad (x_3, y_3)$$

El punto (x_1, y_1) se puede incluir fácilmente re-escribiendo el polinomio cuadrático como

$$p(x) = y_1 + \alpha_1 (x - x_1) + \alpha_2 (x - x_1)^2$$

ya que $p(x_1) = y_1$. Evaluando en los dos puntos que faltan, tenemos que garantizar

$$\begin{aligned} y_2 &= p(x_2) = y_1 + \alpha_1 (x_2 - x_1) + \alpha_2 (x_2 - x_1)^2 \\ y_3 &= p(x_3) = y_1 + \alpha_1 (x_3 - x_1) + \alpha_2 (x_3 - x_1)^2 \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ (x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y1 \end{bmatrix}$$

Notemos que el determinante de la matriz es

$$\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ (x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Usando la formula de Cramer, tenemos

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} (y_2 - y_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ (y_3 - y_1) & (x_3 - x_1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ (x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)^2 \end{vmatrix}} = \frac{(y_2 - y_1)(x_3 - x_1)^2 - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)^2}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

y también

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ (x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)^2 \end{vmatrix}} = \frac{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Ahora construyamos la forma mas tradicional del polinomio de interpolación como

$$p(x) = \omega_1(x)y_1 + \omega_2(x)y_2 + \omega_3(x)y_3$$

Para la tercera función ω_3 tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= \frac{-(x_2-x_1)^2(x-x_1)+(x_2-x_1)(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x_2-x_1)(x-x_1)\left[-(x_2-x_1)+(x-x_1)\right]}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x_2-x_1)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}$$

Para la segunda función tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{(x_3-x_1)^2(x-x_1)-(x_3-x_1)(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x_3-x_1)(x-x_1)\left[(x_3-x_1)-(x-x_1)\right]}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{-(x_3-x_1)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}
\end{aligned}$$

Para la primera función tenemos

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= 1 + \frac{-(x_3-x_1)^2(x-x_1)+(x_2-x_1)^2(x-x_1)-(x_2-x_1)(x-x_1)^2+(x_3-x_1)(x-x_1)^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)} \\
&= 1 + \frac{\left[-(x_3-x_1)^2+(x_2-x_1)^2\right](x-x_1)+\left[-(x_2-x_1)+(x_3-x_1)\right](x-x_1)^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)+(x_3-x_2)(2x_1-x_2-x_3)(x-x_1)+(x_3-x_2)(x-x_1)^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x_3-x_2)\left[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(2x_1-x_2-x_3)(x-x_1)+(x-x_1)^2\right]}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+\left[(2x_1-x_2-x_3)+(x-x_1)\right](x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+\left[(2x_1-x_2-x_3)+(x-x_1)\right](x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+\left[(x-x_2)+(x_1-x_3)\right](x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_1-x_2)\left[(x_1-x_3)+(x-x_1)\right]+(x-x_3)(x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_1-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x-x_3)\left[(x_1-x_2)+(x-x_1)\right]}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x-x_3)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}
\end{aligned}
$$

En caso de querer interpolar con un polinomio de orden mayor, por ejemplo de orden n, tendríamos que tener n puntos para encontrar los n coeficientes β_i.

Funciones generales de Interpolación

Notemos que podríamos usar otras funciones para interpolar los 3 puntos, por ejemplo

$$f(x) = \alpha_1\ g_1(x) + \alpha_2\ g_2(x) + \alpha_3\ g_3(x)$$

donde $g_1(x)$, $g_2(x)$, y $g_3(x)$ son funciones que conocemos. Evaluando en los tres puntos, tenemos

$$\begin{aligned} y1 &= f(x1) = \alpha_1\ g_1(x_1) + \alpha_2\ g_2(x_1) + \alpha_3\ g_3(x_1) \\ y2 &= f(x2) = \alpha_1\ g_1(x_2) + \alpha_2\ g_2(x_2) + \alpha_3\ g_3(x_2) \\ y3 &= f(x3) = \alpha_1\ g_1(x_3) + \alpha_2\ g_2(x_3) + \alpha_3\ g_3(x_3) \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Usando la formula de Cramer, podemos resolver por los coeficientes

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ y_2 & g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ y_3 & g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix}} \qquad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} g_1(x_1) & y_1 & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & y_2 & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & y_3 & g_3(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix}} \qquad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & y_1 \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & y_2 \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix}}$$

Splines Cubicas

Supongamos que tenemos una función evaluada en los puntos $x_n = n\Delta x$, con valores y_n, para $n = 0, \ldots, N$. Nos gustaría escribir una función cubica que interpole todos estos puntos. Esto implica usar la interpolación cubica entre $x_n \leq x \leq x_{n+1}$

$$P_n(x) = y_n + \alpha_{n,1}(x - x_n) + \alpha_{n,2}(x - x_n)^2 + \alpha_{n,3}(x - x_n)^3$$

con los parámetros $\alpha_{n,1}$, $\alpha_{n,2}$ y $\alpha_{n,3}$ para $n = 0, \ldots, N-1$. Primero debemos exigir continuidad en x_n, dando

$$P_{n-1}(x_n) = y_n \qquad n = 1, \ldots, N$$

pero nos faltan otras condiciones para poder determinar el sistema. Una posibilidad es exigir primera y segunda derivada continua en x_n, esto es

$$P'_n(x_n) = P'_{n-1}(x_n) \qquad\qquad P''_n(x_n) = P''_{n-1}(x_n)$$

para $n = 1, \ldots, N-1$. Las 2 condiciones que faltan, por lo general se exigen asumiendo que $P''_0(x_0) = 0$ y $P''_{N-1}(x_N) = 0$. Estas relaciones se tienen que invertir, lo cual se puede hacer con un método matricial, o con un método directo.