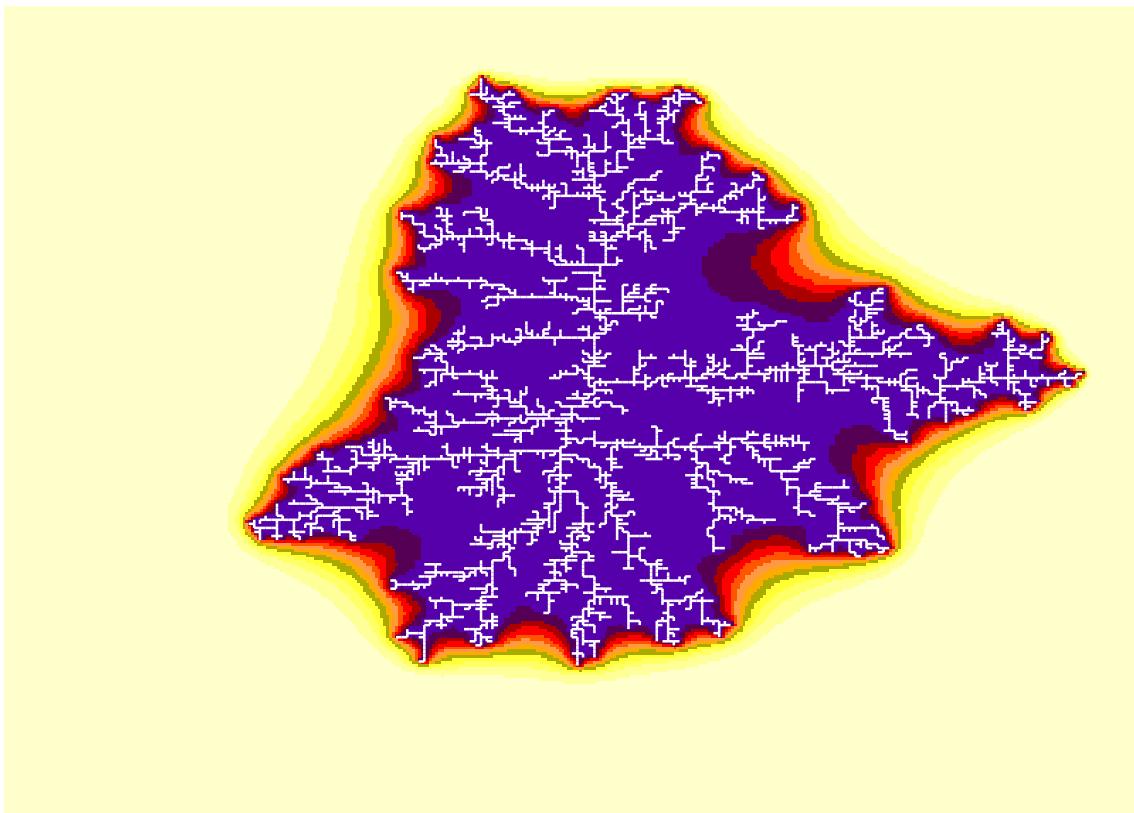


Capítulo 1: Electrostática y Magnetostática

Los primeros experimentos interesantes en electrostática fueron hechos en por Cavendish (~ 1770) y Coulomb (~ 1780), y en el caso magnetostático por Biot y Savart (1820) y Ampere (~ 1820). Maxwell puso todo esto en las leyes del electromagnetismo. En un sentido estas leyes definen unas “cantidades extrañas” llamadas cargas y corriente que regulan la magnitud de las respectivas fuerzas. En orden a relacionar estos dos conceptos es necesario tener una teoría microscópica para las partículas elementales, en particular del electrón como una entidad discreta.



Una descarga electrostática fractal

Índice

1. Electrostática	4
2. Campo eléctrico y potencial eléctrico	4
3. Comentarios sobre la ley de la fuerza	7
3.1. Variación para una ley de fuerza cuadrática	7
3.2. Masa del fotón	7
4. Condiciones de Borde	7
5. Ecuación de Laplace y funciones ortogonales	10
5.1. Bases rectangulares	10
5.2. Bases polares	12
5.3. Bases esféricas	13
5.3.1. Funciones de Legendre	14
5.3.2. Funciones de Legendre asociadas	15
5.4. Bases cilíndricas	19
6. La Ecuación de Poisson y la función de Green	24
6.1. Función de Green en el espacio infinito	24
6.1.1. En 3D	24
6.1.2. En 2D	25
6.1.3. En 1D	26
6.2. Función de Green para un volumen arbitrario	27
6.3. Método de las imágenes	29
6.4. Expansión de la función de Green en bases ortonormales	32
6.4.1. G en coordenadas esféricas para espacio infinito por método directo	33
6.4.2. G en coordenadas esféricas entre dos esferas conductoras por método directo	34
6.4.3. G en coordenadas esféricas fuera de una esfera conductora por método indirecto	35
6.4.4. Expansión en bases de un problema relacionado	37
7. Magnetostática	38
8. Campo magnético y potencial magnético	38
9. Método de solución	40
10. Fuerza de Lorenz	43
11. Solución numérica	44
11.1. Problemas en 1D	44
11.1.1. “Shooting Method”	44
11.1.2. Elementos finitos	45

11.2. Problema en 2-D y 3-D	47
11.2.1. Solución por relajación	48
11.2.2. Solución directa	49
11.2.3. Solución por elementos finitos	51
A. Convención de las sumatorias de Einstein	54
B. Funciones Delta	55

1. Electrostática

Cavendish (~ 1770) y Coulomb (~ 1780) propusieron que la fuerza en un “paquete” de carga 1 debido a un “paquete” de carga 2 satisface la fuerza vectorial central

$$\mathbf{F}_{1,2} \sim \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Esta dependencia fue descubierta por los cuidadosos experimentos de Cavendish (~ 1770) y Coulomb (~ 1780), pero requiere unos comentarios (ver más adelante). En un sentido esto define estas “extrañas cantidades” denominadas cargas, que pueden tener dos signos (positivo o negativo). En el sistema CGS la constante de proporcionalidad es $k = 1$, mientras que en MKS es

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ kg m}^3 \text{ C}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

Como en general estamos interesados en describir distribuciones macroscópicas de cargas, se acostumbra a definir una función continua, la densidad de carga ρ , para escribir la dependencia espacial de las cargas. Esta función continua es un promedio espacial de la densidad de carga

$$\rho \sim \frac{N}{V}$$

en una escala intermedia (entre lo microscópico y lo macroscópico) particular, si está escala existe. Esto asume que hay una escala espacial (y temporal) donde tal promedio es significativo, i.e. donde las desviaciones son pequeñas en todo tiempo.

	Intermedia	
Micro		Macro
	λT	

Figura 1: (a) Escalas espaciales y temporales

Esto permite re-escribir la fuerza entre densidades de carga como

$$\mathbf{F}_{1,2} \sim \int dx_1^3 \int dx_2^3 \frac{\rho_1(\mathbf{x}_1)\rho_2(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

2. Campo eléctrico y potencial eléctrico

El campo eléctrico está definido como una fuerza por unidad de carga, independiente de la carga de prueba, que se puede expresar como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y$$

donde, hemos asumido la idea de superposición.

Aquí es importante notar que esta definición se aplica al campo eléctrico producido fuera de un paquete de carga descrito en el continuo por $\rho(\mathbf{x})$, osea no podemos tomar el límite $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ porque la integral diverge a menos que $\rho(\mathbf{y}) \rightarrow 0$ también, o que hayan ciertas situaciones de simetría. Notemos que en el límite discreto esto no es relevante ya que en general estamos interesados en calcular el campo eléctrico lejos de las cargas puntuales. Esto será importante cuando calculemos la energía de una distribución de carga, donde la descripción continua tiene ciertas falencias. En el plasma este problema del paso al continuo se resuelve asumiendo que las fluctuaciones se hacen pequeñas, como veremos después (descripción tipo Vlasov)

Podemos definir fácilmente el potencial escalar

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = -\nabla \Phi$$

donde

$$\Phi = \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

Por lo tanto

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

El inverso también es cierto. De hecho, es posible escribir cualquier campo vectorial como una suma de dos componentes

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{A} & = & \nabla \cdot \mathbf{A}_1 \\ \nabla \times \mathbf{A} & = & \nabla \times \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, qué es $\nabla \cdot \mathbf{E}$? Hay muchas formas de proceder, pero tomaremos una ruta simple. Tomemos una carga q y una unidad de superficie dS como en la figura 2.

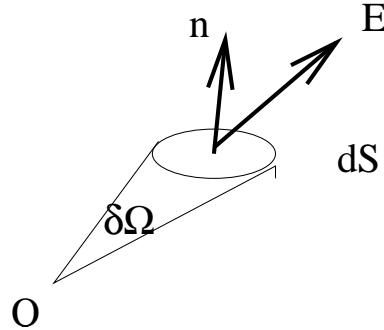


Figura 2: Superficie orientada infinitesimal.

El campo eléctrico satisface

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q \frac{\cos \theta}{r^2} dS = q d\Omega$$

independiente de la forma de la superficie S. Si integramos sobre la superficie, tenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \int_V \rho d^3x$$

para la carga contenida. Este resultado puede ser usado para calcular campos eléctricos para casos altamente simétricos. Usando el teorema de cálculo vectorial obtenemos

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) d^3x = 0$$

y por lo tanto obtenemos las **ecuaciones de Maxwell para la electrostática**,

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$
$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$

Dado que $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ existe un potencial $\mathbf{E} = -\nabla\Psi$, que satisface

$$\nabla^2\Psi = -4\pi\rho$$

que es la ecuación de Poisson. Esta ecuación es usada para resolver casos más generales, ya sea utilizando el campo eléctrico o la forma potencial escalar. Representa un problema con condiciones de borde para el potencial o campo eléctrico, definido en una superficie.

Notemos que es claro que si ponemos una carga unitaria en una posición con condiciones de borde naturales en infinito, obtenemos (mirar el apéndice B)

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

este es un ejemplo específico de una función de Green como veremos más adelante. Con este resultado, el cual es derivado en el apéndice, podemos calcular directamente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\nabla_x^2 \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= - \int dy^3 \rho(\mathbf{y}) \nabla_x^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= 4\pi \int dy^3 \rho(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= 4\pi\rho(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

3. Comentarios sobre la ley de la fuerza

En un sentido la ley de fuerza define esta “cantidad extraña” denominada carga, que puede tener dos signos. En el sistema CGS la constante de proporcionalidad es $k = 1$, mientras en MKS es $k = 9 \cdot 10^9$.

3.1. Variación para una ley de fuerza cuadrática

Notemos que gracias a la exactitud de los instrumentos originales, fue postulado que la fuerza puede ser escrita también en su forma generalizada

$$E \sim \frac{1}{r^{2+2\varepsilon}}$$

Con esta forma, podemos calcular el campo eléctrico, o la fuerza que sentiría una carga, dentro de una esfera como

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1+z^2+2z \cos \theta)^{(1+\varepsilon)/2}} = \frac{(1-2z+z^2)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{z(-1+\varepsilon)} - \frac{(1+2z+z^2)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{z(-1+\varepsilon)}$$

lo cual implica que $E(\varepsilon = 0) = 0$ dentro de la esfera, y da una forma de encontrar $|\varepsilon| < 10^{-16}$ en forma experimental.

3.2. Masa del fotón

En mecánica cuántica una fuerza que usa una partícula virtual para actuar a una distancia satisface una ecuación de potencial escalar, la ecuación de Yukawa, dada por

$$\nabla^2 \Psi - \left[\frac{m_\gamma c}{\hbar} \right]^2 \Psi = \frac{4\pi}{c} \rho$$
$$\mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar} \rightarrow \Psi \sim \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Esta ecuación aparece en muchos contextos, desde mecánica cuántica, física de plasmas, astrofísica, etc. Nos dice que si la masa del fotón tiende a cero, recuperaremos nuestro potencial $1/r$. Se encuentra que la masa del fotón, usando medidas satelitales, es a lo menos $m_\gamma < 10^{-48} \text{ gm}$.

4. Condiciones de Borte

Hasta ahora hemos discutido la situación de un volumen infinito, y para ese caso podemos utilizar la integral sobre la densidad de carga dada anteriormente. En muchos casos estamos interesados en situaciones en un espacio restringidos y con condiciones de borde. Por ejemplo con conductores en los bordes se inducen cargas en las superficies las cuales en principio no las conocemos. En este caso es mucho más fácil tratar de resolver la ecuación de Poisson como un problema con condiciones de borde

$$\boxed{\nabla^2 \Psi = -4\pi\rho}$$

directamente.

Hay dos tipos de condiciones de borde que aparecerán naturalmente en la construcción de la solución general de la ecuación de Poisson, estas son las cargas de la superficie, y las capas del dipolo. Ellos corresponden a diferentes condiciones de borde.

Tomemos la ecuación de Poisson cerca de un borde y tratemos de deducir la carga inducida σ en la superficie. Usando la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho$$

y una caja infinitesimal de tapa y fondo dS , y lado $dl \rightarrow 0$ (ver Fig. 3). Usando el teorema de Gauss para la integral de volumen obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{E} \cdot dx^3 &= 4\pi \int_{\Omega} \rho d^3x \\ \oint_{\delta\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= 4\pi \int_{\Omega} \rho d^3x \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} dS &\approx dS \lim_{dh \rightarrow 0} \int \rho dh \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos una condición de borde para los campos

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma}$$

en el límite $dh \rightarrow 0$, con

$$\sigma = \lim_{dh \rightarrow 0} \int \rho dh$$

Por lo tanto, la carga de la superficie genera una discontinuidad en el campo eléctrico normal debido a una carga de la superficie. Si asumimos un borde conductor (las cargas son libres de moverse en respuesta a un campo eléctrico), podemos obtener la carga superficial desde el potencial en la superficie

$$\sigma = \frac{-\nabla \Psi \cdot \mathbf{n}}{4\pi}$$

Debemos tener cuidado en definir el normal \mathbf{n} . El problema de condiciones con conductores, por ejemplo, es que en general no conocemos σ de antemano, y debe encontrarse a partir de la solución completa.

Para el caso de campo tangencial, tomemos un rectángulo perpendicular, como se muestra en la Fig. 3b. Integrando sobre esta superficie que atraviesa la interfase tenemos

$$\begin{aligned} \oint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS &= \mathbf{0} \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\ell &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} d\ell &\approx \mathbf{0} \end{aligned}$$

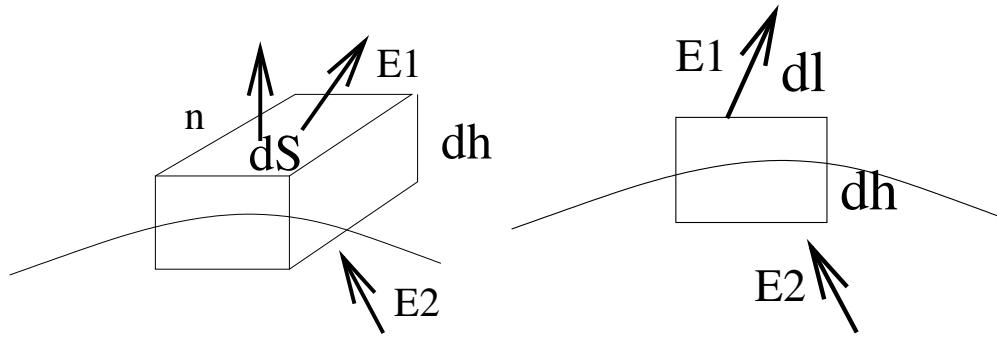


Figura 3: Condición de borde en la superficie.

con lo cual obtenemos la segunda condición de borde

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

En muchas situaciones esta condición de borde es equivalente a que el potencial eléctrico es continuo en interfases, aunque esto no es correcto en todas las situaciones.

5. Ecuación de Laplace y funciones ortogonales

Estamos interesados en resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Psi(x) = 0 \quad x \in \Omega$$

sujeta a la condición de borde

$$\Psi(x)|_{\delta\Omega}$$

Este problema generalmente se resuelve utilizando una base ortonormal

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_i a_i \Psi_i(x) \\ \int_{\Omega} \Psi_i^* \Psi_j \, dx &= \delta_{i,j} \\ \sum_{i,j} \Psi_i(x)^* \Psi_j(y) &= \delta^{(3)}(x - y) \end{aligned}$$

En el límite infinito las sumatorias convergen a integrales. Tal base ortonormal es muy útil si las bases de funciones son también soluciones normales de la ecuación de interés. Luego, la expansión es una expansión natural, pero esto no es requerido.

La forma natural de construir bases ortonormales es utilizando una separación de variables.

5.1. Bases rectangulares

En una base rectangular los operadores diferenciales para un campo escalar Ψ son

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ \nabla \Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \end{aligned}$$

Para un campo vectorial \mathbf{A} la divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

el rotor es

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

y el Laplaciano es

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A}|_x &= \nabla^2 A_x \\ \nabla^2 \mathbf{A}|_y &= \nabla^2 A_y \\ \nabla^2 \mathbf{A}|_z &= \nabla^2 A_z\end{aligned}$$

La ecuación de Laplace se puede resolver por separación de variables.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \Psi \sim U_1(x)U_2(y)U_3(z)$$

para lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2 U_1}{dx^2} = -a^2 U_1 &\quad \rightarrow \quad U_1 = A_a e^{i a x} + B_a e^{-i a x} \\ \frac{d^2 U_2}{dy^2} = -b^2 U_2 &\quad \rightarrow \quad U_2 = A_b e^{i b y} + B_b e^{-i b y} \\ \frac{d^2 U_3}{dz^2} = -c^2 U_3 &\quad \rightarrow \quad U_3 = A_c e^{i c z} + B_c e^{-i c z}\end{aligned}$$

con la restricción

$$c^2 + a^2 + b^2 = 0$$

Por lo tanto tenemos una sumatoria en a y b (con c restringido por la relación $c^2 + a^2 + b^2 = 0$). En generar la restricción en a y b dependen de las condiciones de borde de interés.

A parte de las soluciones exponenciales podemos utilizar soluciones oscilatorias en el intervalo $[0, L]$ (esto implica condiciones de borde periódicas en $x = L$ y $x = 0$. Las condiciones de ortonormalidad son

$$f(x) = \frac{1}{2}A_o + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sin \left(\frac{\pi m x}{L} \right) + B_m \cos \left(\frac{\pi m x}{L} \right) \right)$$

con

$$\int_0^L \sin \left(\frac{\pi m x}{L} \right) \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) dx = \int_0^L \cos \left(\frac{\pi m x}{L} \right) \cos \left(\frac{\pi n x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m}$$

y

$$\int_0^L \sin \left(\frac{2\pi m x}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) dx = 0$$

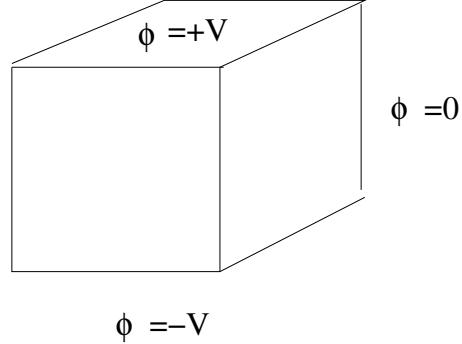
En el límite infinito $L \rightarrow \infty$ (aquí es mejor mover el intervalo a $L/2 \leq x \leq L/2$ y después tomar el límite), con

$$\frac{2\pi m}{L} \rightarrow k$$

tenemos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dx \quad \leftrightarrow \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k') \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x')$$



Problema: Calcule el potencial dentro de una caja cubica de tamaño L, que tiene todas sus caras a potencial 0, excepto la cara de arriba que esta a potencial V y la de abajo a potencial -V.

5.2. Bases polares

En base polares tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\ \nabla \Psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\phi} \end{aligned}$$

La ecuación de Laplace se puede resolver por separación de variables. Estos son problemas en los cuales la solución o las fuentes no dependen en una de las variables, e.g z

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi \sim U_1(\rho)U_2(\phi)$$

Para el caso $m \neq 0$ tenemos

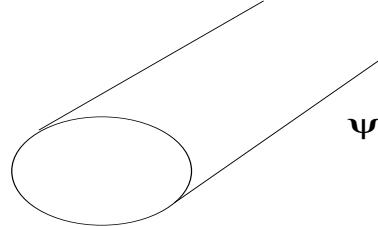
$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU_1}{d\rho} \right) &= m^2 U_1 \quad \rightarrow \quad U_1 = A_m \rho^m + B_m \rho^{-m} \\ \frac{d^2 U_2}{d\phi^2} &= -m^2 U_2 \quad \rightarrow \quad U_2 = C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi \end{aligned}$$

y para el caso $m = 0$ tenemos

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU_1}{d\rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad U_1 = A_0 + B_0 \ln \rho$$

$$\frac{d^2 U_2}{d\phi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad U_2 = C_0 + D_0 \phi$$

La sumatoria es para todos los m reales, pero generalmente la restricción en m depende en las condiciones de borde de interés. Por ejemplo, m es entero si el problema incluye $\phi \in [0, 2\pi]$.



Problema: Calcule el potencial dentro de un cilindro infinito que tiene un potencial $\Psi = V \cos \phi$ sobre su superficie.

5.3. Bases esféricas

En una base rectangular los operadores diferenciales para un campo escalar Ψ son

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\ \nabla \Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\phi} \end{aligned}$$

Notemos que también tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right]$$

Para un campo vectorial A la divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + r \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right],$$

el rotor es

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

y el Laplaciano es

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A}|_r &= \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r + \left[-\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \right] A_\theta + \left[-\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] A_\phi \\
\nabla^2 \mathbf{A}|_\theta &= \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2 \sin \theta} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla^2 \mathbf{A}|_\phi &= \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

La ecuación de Laplace se puede resolver por separación de variables.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi \sim \frac{U_1(r)}{r} U_2(\theta) U_3(\phi)$$

con

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U_1}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_1 &= 0 & \rightarrow & \quad U_1 = A_\ell r^{\ell+1} + B_\ell r^{-\ell} \\
\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU_2}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] U_2 &= 0 & \rightarrow & \quad U_2 = C_\ell^m P_\ell^m(\cos \theta) + D_\ell^m Q_\ell^m(\cos \theta) \\
\frac{d^2 U_3}{d\phi^2} + m^2 U_3 &= 0 & \rightarrow & \quad U_3 = e^{\pm im\phi}
\end{aligned}$$

donde $P_\ell^m(x)$ y $Q_\ell^m(x)$ son las funciones de Legendre asociadas.

5.3.1. Funciones de Legendre

La ecuación de Legendre regular, usando $x = \cos \theta$, es

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right] + \ell(\ell+1) P_\ell = (1-x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1) P_\ell = 0.$$

Si hacemos una expansión en series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}$$

obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k+n)(k+n-1) a_n x^{k+n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [\ell(\ell+1) - 2(k+n) - (k+n)(k+n-1)] a_n x^{k+n} = 0$$

por lo que la ecuación indicial es

$$k(k-1) = 0,$$

que tiene solución $k = 0$ y $k = 1$. Con $k = 0$, $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ tenemos

$$a_{n+2} = -\frac{\ell + n + 1)(\ell - n)}{(n + 1)(n + 2)} a_n$$

la cual no converge para $x = \pm 1$, por lo tanto exigimos que ℓ sea un entero par y truncamos la serie generando el polinomio $p_\ell(x)$. Con $k = 1$, $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ tenemos

$$a_{n+2} = -\frac{\ell + n + 2)(\ell - n - 1)}{(n + 2)(n + 3)} a_n$$

la cual no converge para $x = \pm 1$, por lo tanto exigimos que ℓ sea un entero impar y truncamos la serie generando el polinomio $q_\ell(x)$. Estas dos soluciones producen $P_\ell(x)$ para valores pares e impares. Para el caso de $p_\ell(x)$ con ℓ impar y $q_\ell(x)$ con ℓ construimos la segunda solución de Legendre $Q_\ell(x)$. En este caso no podemos truncar la serie, con lo cual diverge para $x = \pm 1$.

La función de Legendre $P_\ell(x)$ se puede escribir como

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell,$$

la cual satisface la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell}.$$

Los primeros polinomios de Legendre son

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

Además tenemos la relación

$$(2\ell + 1)P_\ell(x) = \frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx}$$

5.3.2. Funciones de Legendre asociadas

La ecuación asociada de Legendre

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell}{dx} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_\ell = 0.$$

Es fácil darse cuenta que

$$P_\ell^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{m+\ell}}{dx^{m+\ell}} (x^2 - 1)^\ell,$$

satisface la ecuación asociada de Legendre, y por lo tanto corresponden a las soluciones regulares. Estas soluciones satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{\ell + m}{\ell - m} \delta_{\ell, \ell}.$$

Es importante notar que es un polinomio, con una expansión finita en x .

Para construir una solución completa, debemos tomar la sumatoria sobre todos los m y ℓ . La restricción en m y ℓ dependen de las condiciones de borde de interés. Por ejemplo, m es entero si $\phi \in [0, 2\pi]$. Además, si nos restringimos al rango $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, entonces nos quedamos con los P_{ℓ}^m donde ℓ, m son enteros que satisfacen

$$\begin{aligned} \ell &\geq 0 \\ -\ell &\leq m \leq \ell \end{aligned}$$

Para esta situación podemos definir los armónicos esféricos

$$Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = C_{\ell}^m P_{\ell}^m(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

que satisfacen

$$\frac{1}{r^2} (L_{\theta} + L_{\phi}) Y_{\ell, m} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] Y_{\ell, m} = -\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} Y_{\ell, m}$$

con las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) &= \delta_{\ell, \ell} \delta_{m, m} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} l l Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi) &= \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \end{aligned}$$

Los primeros armónicos esféricos son

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \quad Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Notemos que esto tiene sentido solo si $-\ell \leq m \leq \ell$ si ℓ es entero, ya que $P_{\ell}(x)$ es un polinomio de orden ℓ . Es muy útil derivar

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) &= C_{\ell,m} P_\ell^{-m}(\cos \theta) e^{-im\phi} \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_\ell^{-m}(\cos \theta) e^{-im\phi} \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \left[(-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\cos \theta) \right] [e^{im\phi}]^* \\ &= (-1)^m \left[(-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right]^* \\ &= (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \end{aligned}$$

o lo que es equivalente

$$C_{\ell,m} P_\ell^m(\cos \theta) = (-1)^m C_{\ell,-m} P_\ell^{-m}(\cos \theta)$$

La solución general al potencial se puede escribir

$$\Psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell,m} r^\ell + \frac{B_{\ell,m}}{r^{-(\ell+1)}} \right) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

En el caso especial de la simetría azimutal tenemos sólo el caso $m = 0$, lo cual significa que la solución general es

$$\Psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}) P_\ell(\cos \theta)$$

ya que

$$Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta).$$

Problema: Encuentre el potencial al interior de un casquete esférico donde $V(\theta) = V_o$ para $0 \leq \theta \leq \alpha$ y cero para $\alpha \leq \theta \leq \pi$.

Por la simetría sabemos que el potencial se puede escribir como

$$\Psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Por lo tanto en el casquete tenemos

$$V(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Utilizando la ortogonalización, multiplicamos por $P_m(\cos \theta)$ e integramos $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2m+1}{2} \int_0^{\pi} V(\theta) P_m(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= V_o \frac{2m+1}{2} \int_0^{\alpha} P_m(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= V_o \frac{2m+1}{2} \int_{\cos \alpha}^1 P_m(x) dx \\ &= \frac{V_o}{2} [P_{m-1}(\cos \alpha) - P_{m+1}(\cos \alpha)] \end{aligned}$$

y para el caso $m = 0$ tenemos

$$A_0 = \frac{V_o}{2} (1 - \cos \alpha)$$

Por lo tanto la solución es

$$\Psi = \frac{V_o}{2} \left[(1 - \cos \alpha) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (P_{\ell-1}(\cos \alpha) - P_{\ell+1}(\cos \alpha)) \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \right]$$

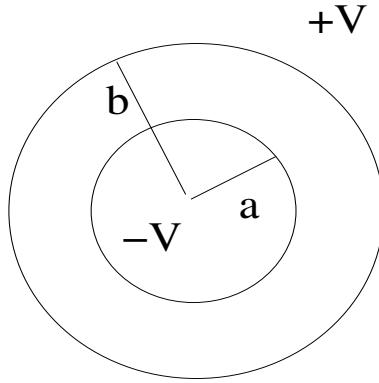
De aquí podemos calcular el campo eléctrico en el origen, y obtener

$$E = \frac{V_o}{2} \left[\frac{3}{2} (\cos^2 \alpha - 1) \right] (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

y claramente tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow \pi$.

En general no es difícil de demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - x'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad \rightarrow \quad \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \cos(\phi - \phi') \sin \theta \sin \theta' \\ \frac{1}{|x - x'|} &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi) \end{aligned}$$



Problema: Encuentre el potencial entre dos esferas de radio $a < r < b$ que están a potencial $\Psi(r = a) = -V$ y $\Psi(r = b) = V$

5.4. Bases cilíndricas

En bases cilíndricas los operadores diferenciales para un campo escalar Ψ son

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ \nabla \Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z}\end{aligned}$$

Para un campo vectorial A la divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

el rotor es

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

y el Laplaciano es

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A}|_\rho &= \nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2} A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla^2 \mathbf{A}|_\phi &= \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{\rho^2} A_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \\ \nabla^2 \mathbf{A}|_z &= \nabla^2 A_z\end{aligned}$$

La ecuación de Laplace se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi \sim U_1(\rho)U_2(\phi)U_3(z)$$

la solución por separación de variable es

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU_1}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) U_1 = 0 &\quad \rightarrow \quad U_1 = A_{k,m} J_m(k\rho) + B_{k,m} N_m(k\rho) \\ \frac{d^2U_2}{d\phi^2} + m^2 U_2 = 0 &\quad \rightarrow \quad U_2 = C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi \\ \frac{d^2U_3}{dz^2} - k^2 U_3 = 0 &\quad \rightarrow \quad U_3 = D_k e^{+kz} + E_k e^{-kz} \end{aligned}$$

Las funciones $J_m(x)$ y $N_m(x)$ son conocidas como las funciones de Bessel y Neumann respectivamente. Para el caso $m = 0$ podemos tratar de construir una expansión en series

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$$

que genera

$$a_0[k(k-1) + k]x^k + a_1[(k+1)k + (k+1)]x^{k+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n(n+k)(n+k-1) + (n+k) + a_{n-2}]x^{k+n} = 0.$$

La ecuación indicial es $r(r-1) + r = 0$ por lo que tenemos una solución desgenerada $r = 0$. Usando $r = 0$, $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, con la ecuación de recursión

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2+k)^2} a_n,$$

podemos construir la expansión en serie

$$J_0(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right]$$

la cual converge para todo x . De la misma forma podemos construir las funciones $J_m(x)$. Las funciones de Neumann divergen para $x \rightarrow 0$ y no son consideradas para problemas en que involucren el origen. Es útil en problemas de borde resolver el número infinito de raíces $x_{m,n}$ de

$$J_m(x_{m,n}) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

con lo cual se puede demostrar que

$$\int_0^a \rho d\rho J_m \left(x_{m,r} \frac{\rho}{a} \right) J_m \left(x_{m,s} \frac{\rho}{a} \right) = \frac{a^2}{2} J_{m+1}(x_{m,r}) \delta_{r,s}$$

y el sistema de raíces $x_{m,n}$ forman un sistema completo en el intervalo $[0, a]$. De hecho esto restringe los valores de k para sistemas discretos (pero infinitos)

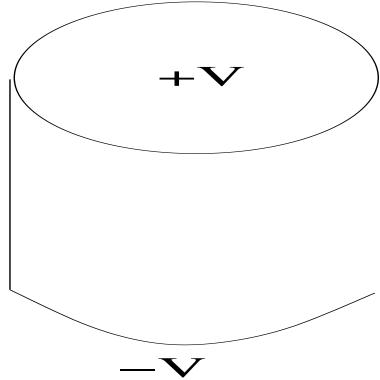
$$k_{m,n} = \frac{x_{m,n}}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para cada m . Si el rango de ρ se hace infinito, entonces requerimos de una representación continua, similar a las series infinitas de Fourier, donde la suma discreta en k se convierte en una integral

$$\int_0^\infty dk e^{\pm kz} (C_m(k)J_m(k\rho) + D_m(k)N_m(k\rho))(A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi)$$

$$\int_0^\infty x dx J_m(kx)J_m(k'x) = \frac{1}{k}\delta(k' - k)$$

donde el \pm depende de la restricción de z .



Problema: Encuentre el potencial dentro de un cilindro de largo L , donde la tapa superior esta a un potencial V , la tapa inferior esta a un potencial $-V$ y el resto a potencial cero.

En muchas situaciones es útil tomar una conjunción mas apropiada para ciertas condiciones de borde en el infinito en termino de funciones de Hankel

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x) \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x)$$

que son útiles para tener condiciones de salida (radiación) en el infinito. En otras situaciones estamos interesados en que la dependencia de z sea osculatoria, lo que implica que tenemos que hacer la transformación

$$k \rightarrow ik$$

y por lo tanto definimos las funciones de Bessel modificadas

$$I_m(k\rho) = i^{-m}J_m(ik\rho) \quad K_m(k\rho) = \frac{\pi}{2}i^{m+1}H_m^{(1)}(ik\rho)$$

La elección de la normalización es para que estas funciones sean reales para ρ real.

La expansiones asintóticas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_m(x) \rightarrow \frac{x^m}{2^m m!}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) \rightarrow \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_0(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2)$$

son útiles cuando tenemos que forzar ciertas condiciones de borde en el infinito.

Veremos mas adelante la importancia del Wronskiano, que en ecuaciones diferenciales determinan si dos funciones son linealmente independientes

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Para el caso de ecuaciones diferenciales del tipo

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y(x) = 0$$

Dado que y_1 e y_2 satisfacen esta ecuación, se puede probar que

$$W' = -p_1 W$$

y por lo tanto

$$W(y_1, y_2) = C \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

Para el caso de

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

tenemos que

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = C \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

Las expresiones asintóticas se puede usar para evaluar la constante c , tal que

$$J_m \; N'_m - J'_m \; N_m \; = \; \frac{2}{\pi x}$$

$$I_m \; K'_m - I'_m \; K_m \; = \; -\frac{1}{x}$$

6. La Ecuación de Poisson y la función de Green

Estamos interesados en resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

sujeta a la condición de borde

$$\Psi(\mathbf{x})|_{\delta\Omega}$$

La función de green en un dominio Ω corresponde al potencial producido por una carga puntual en la posición \mathbf{y} ,

$$\rho(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

La función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (1)$$

con lo cual podemos notar que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

esta propiedad de simetría será relevante en futuros estudios.

6.1. Función de Green en el espacio infinito

Ahora construiremos la función de Green para el espacio infinito.

6.1.1. En 3D

El Laplaciano es

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}$$

y para el problema con simetría esférica $G(r)$ tenemos que

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rG) = 0 \quad r \neq 0$$

y por lo tanto

$$G = \frac{1}{r}$$

Ya hemos demostrado que efectivamente tenemos

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

Para el caso arbitrario tenemos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

es la función de green para el espacio infinito, ya que

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

6.1.2. En 2D

El Laplaciano es

$$\nabla^2 G = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}$$

y para el problema con simetría cilíndrica $G(\rho)$ tenemos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dG}{d\rho} \right) = 0 \quad \rho \neq 0$$

y por lo tanto

$$G = a \ln \rho = \frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)$$

por lo tanto integrando en la superficie $x_1 = 0 \pm \epsilon_1$ con $x_2 = 0 \pm \epsilon_2$ y $\epsilon_i \rightarrow 0$

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx_1 \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx_2 \left[\frac{d^2 G}{dx_1^2} + \frac{d^2 G}{dx_2^2} \right] = -4\pi$$

podemos encontrar que

$$2a\pi = -4\pi$$

Entonces efectivamente obtenemos que

$$G = -2 \ln \rho$$

Para el caso arbitrario tenemos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2 \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

es la función de green para el espacio infinito, ya que

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Se entiende que las funciones deltas y las ∇^2 son en 2D.

6.1.3. En 1D

El Laplaciano es

$$\nabla^2 G = \frac{d^2 G}{dx^2}$$

Tenemos que

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = 0 \quad x \neq 0$$

y por lo tanto

$$G = \begin{cases} ax + b & x < 0 \\ cx + d & x > 0 \end{cases}$$

Es fácil darse cuenta que $G(x)$ debería ser continua en $x = 0$, con lo cual $b = d = 0$. Podemos elegir esta constante como cero, ya que una constante no cambia el campo eléctrico que el potencial genera. Su derivada tiene que ser discontinua, ya que si integramos

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = -4\pi\delta(x)$$

de $x = 0 \pm \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos que

$$a - c = -4\pi$$

Vemos que la solución es

$$G(x) = -2\pi|x|$$

Es fácil de encontrar que efectivamente tenemos

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(x)$$

Para el caso arbitrario tenemos

$$G(x, y) = -2\pi|x - y|$$

es la función de green para el espacio infinito, ya que

$$\nabla^2 G(x, y) = -4\pi\delta(x - y)$$

Se entiende que las funciones deltas y las ∇^2 son en 1D.

6.2. Función de Green para un volumen arbitrario

De ahora en adelante nos concentraremos en la función de Green para regiones Ω arbitrarias en 3D y dejaremos los problemas en otras dimensiones para la tarea. Dado que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

podemos notar que la función de Green para un volumen arbitrario se puede escribir como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \rightarrow \quad \nabla^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

siempre y cuando $\nabla^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Esto significa que $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ puede ser cualquier función que satisfaga la ecuación de Laplace. Por lo tanto para tener una solución única dentro de $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, vamos a tener que forzar condiciones de borde sobre G , de la misma forma que forzamos condiciones de borde sobre la ecuación de Laplace para tener soluciones únicas.

Es mas o menos intuitivo, dado que el problema a resolver es lineal, que una vez que tenemos el potencial para la carga puntual, es factible obtener el potencial por superposición de una distribución continua de cargas. Veremos que primero tenemos que tener cuidado con las condiciones de borde tanto para Ψ como para G . Comenzaremos con el teorema de Green. Estamos interesados en resolver el problema

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad \Psi|_{\partial\Omega}$$

en $\mathbf{x} \in \Omega$ con alguna condición de borde para $\Psi|_{\partial\Omega}$. Dado que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Psi \nabla G) &= \Psi \nabla^2 G + \nabla \Psi \cdot \nabla G \\ \nabla \cdot (G \nabla \Psi) &= G \nabla^2 \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla G \end{aligned}$$

podemos obtener

$$\int_{\Omega} (\Psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Psi) d^3x = \oint_{\partial\Omega} \left(\Psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS$$

donde la normal apunta hacia afuera del volumen Ω de interés. Ahora elegimos G como la función de Green que satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

con condiciones de borde que especificaremos mas abajo. Obtenemos

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3y + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \Psi(\mathbf{y}) - \Psi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) dS_y$$

donde los dos términos de superficie en la ecuación representan la carga superficial y la capa de un dipolo en la superficie. El potencial y el campo afuera del volumen es cero debido a las discontinuidades. Las condiciones de borde de Dirichlet se usan cuando Ψ está definido en el borde, y las condiciones borde de Neumann cuando $\partial\Psi/\partial n$ está definido en el borde.

Todavía no hemos forzado las condiciones de borde sobre G (es una libertad dada por F), las cuales tendremos que forzar para obtener una solución única a la ecuación de Poisson. Asumamos dos soluciones

$$U = \Psi_2 - \Psi_1$$

que satisfacen la ecuación de Poisson con la misma densidad de carta y las mismas condiciones de borde. Usando las igualdades dadas más arriba tenemos

$$\int_{\Omega} (U \nabla^2 U + |\nabla U|^2) d^3x = \oint_{\partial\Omega} \left(U \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS$$

por lo tanto existe una sola solución, esto es $U = 0$, si requerimos que

$$\oint_{\partial\Omega} \left(U \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0$$

lo que implica poner condiciones de borde sobre la superficie $\partial\Omega$. Por lo tanto las dos condiciones naturales son

- especificar el potencial en el borde, $\Psi|_{\partial\Omega}$
- especificar la carga en el borde, $\frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$

Vemos inmediatamente que especificar los dos tipos de condiciones sería redundante, y generaría soluciones no reales. Esto significa que dada un tipo de condición de borde para Ψ , tenemos que hacer cero una de las integrales de superficie de arriba, y para eso utilizamos la flexibilidad en la condición de borde de G que aun nos queda.

1. En el caso de condiciones de borde tipo Dirichlet, donde el potencial $\Psi(\mathbf{x}) = |_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} 0$ está definido en el borde, forzamos $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} 0$ para \mathbf{y} en el borde tal que

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3x - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

Esto es equivalente a encontrar la carga en la superficie.

2. En el caso de condiciones borde de Neumann, donde la densidad de carga $\partial\Psi(\mathbf{x})/\partial n_{\mathbf{x}} = |_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} 0$ está definida en el borde, forzamos $\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial n_{\mathbf{y}}|_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} = 4\pi/S$ para \mathbf{y} en el borde tal que

$$\Psi(\mathbf{x}) = \langle \Psi \rangle_S + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3y + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\Psi}{\partial n_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{y}}$$

La razón para esta última condición de borde es para satisfacer

$$\oint_{\delta\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} dS_y = -4\pi \neq 0$$

La solución general para Ψ se construye con el uso de funciones de Green, las cuales construiremos a partir de

- Método de las imágenes.
- Expansión ortonormal de la función de Green.
- Expansión de los valores propios del problema relacionado.
- Solución numérica (ver apéndice)

Problema: Cual es el teorema de Green equivalente en 2D

Problema: Cual es el teorema de Green equivalente en 1D

6.3. Método de las imágenes

En particular, si situamos cualquier set de cargas fuera de Ω , entonces al superposición de los potenciales satisfacen la condición ya nombrada

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (2)$$

dentro de Ω , esto quiere decir que la contribución de las cargas exteriores a la densidad de carga interior es cero. Si logramos con este set de cargas exteriores, aparte de la carga interior, satisfacer las condiciones de borde, entonces tendremos una solución dentro de Ω . Pronto veremos que esta solución es la única solución al problema de borde. Por lo tanto, en orden a resolver la ecuación de Poisson, dentro Ω , tenemos la libertad de usar cualquier distribución de carga exterior al borde para satisfacer las condiciones de borde requeridas. Este es el método llamado de las imágenes.

Problema: Una carga frente a un plano conductor (a tierra).

Es fácil hallar la carga imagen. Podemos entonces calcular la carga superficial y la fuerza en la carga real q . Es interesante notar que la fuerza está también relacionada con

$$F = \int 2\pi\sigma^2 dS$$

lo cual es una declaración general.

Problema: tiene ese signo?

Problema: Una carga dentro de una esfera conductora (a tierra).

El borde se fija en $\Psi = 0$. Ponemos otra carga exterior, en diferentes q_2 y d_2 , pero en la misma linea. Esta carga q_2 está en la realidad inducida sobre la superficie.

$$\Psi = \Psi_{in} + \Psi_{out} = \frac{q_1}{|\mathbf{x} - d_1 \mathbf{k}|} + \frac{q_2}{|\mathbf{x} - d_2 \mathbf{k}|}$$

En *Mathematica* podemos escribir este problema como:

$$\Psi[x_-, y_-, z_-] = \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q1}{\sqrt{(x-d1)^2 + y^2 + z^2}}$$

Podemos buscar la solucion

$$s = \text{Simplify}[\text{Solve}[\{\Psi[R, 0, 0] == 0, \Psi[-R, 0, 0] == 0\}, \{q1, d1\}], d < R \& d > 0]$$

que, dado los parámetros y las condiciones de borde, obtenemos

$$\{q1 \rightarrow \frac{qR}{d}, d1 \rightarrow \frac{R^2}{d}\}$$

El potencial es

$$\Psi[x_-, y_-, z_-] = \Psi[x, y, z] /. s$$

lo que da

$$\frac{q}{\sqrt{(-d+x)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{qR}{d \sqrt{\left(-\frac{R^2}{d} + x\right)^2 + y^2 + z^2}}$$

Podemos graficar los contornos como se muestran en Fig. 4, donde también se muestra las lineas de campo.

```
ContourPlot[\Psi[x, 0, z]/.{R → 1, d → 0.8, q → 1}, {x, -1, 1}, {z, -1, 1}, ContourShading→False, AxesLabel→{"x", "z"}, PlotPoints→50]
```

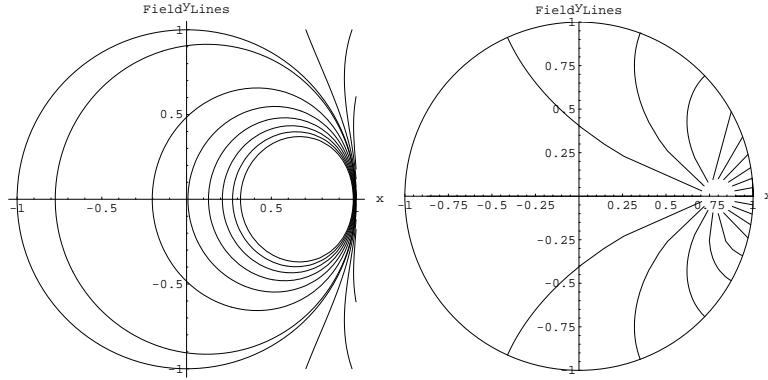


Figura 4: (a) Equipotencial, (b) Campo eléctrico dentro de una esfera conductora a tierra.

Podemos calcular la carga superficial inducida en la superficie de la esfera

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (3)$$

y la fuerza que siente la carga real.

Problem: El origen es un punto estable, o inestable?

Las lineas de campo se definen como las lineas que su tangente es paralela al campo electrico, esto es

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{E}}{|E|}$$

las cuales se pueden ver en la Fig 4, y claramente son ortogonales a la superficie, como deberia ser. Resultados similares pueden ser obtenidos para una carga puntual fuera de una esfera conductora.

Problema: Esferas conductoras con hemisferios a diferente potencial. Hemos construido la función de Green por el método de las imágenes para el potencial fuera de las esferas conductoras con $\Psi = 0$ en el borde de la esfera. Necesitamos integrar con las condiciones de borde de Dirichlet. Note que esto es equivalente a la densidad de carga en la superficie.

Problema: Una carga q fuera de una esfera aislada con carga Q , pero conductora. Una esfera a tierra

(equipotencial) tiene una carga q_2 . Sumando $Q - q_2$, distribuido uniformemente sobre la superficie, alcanzamos una carga total Q . Esto significa, que es el equivalente a una carga puntual de magnitud $Q - q_2$ en el origen. El potencial y la fuerza pueden ser construidos por superposición

$$\Psi = \Psi_{in} + \Psi_{out} = \frac{q_1}{|\mathbf{x} - d_1 \mathbf{k}|} + \frac{q_2}{|\mathbf{x} - d_2 \mathbf{k}|} + \frac{Q - q_2}{|\mathbf{x}|}$$

Lo mismo se puede hacer con una esfera conductora en la tierra en un potencial V específico.

Problema: Una esfera conductora (a tierra) en un campo eléctrico uniforme asintótico. Es construido en una forma similar, con 2 cargas de distinto signo a una distancia $R \gg a$, y sus dos imágenes dentro de la esfera. El límite tiene sentido cuando $2q/R^2 \rightarrow E_o$.

Problema: Construya por imágenes la función de Green para un plano conductor en 1D

6.4. Expansión de la función de Green en bases ortonormales

Hemos visto en que en general, todo lo que necesitamos hacer es resolver la ecuación de Laplace, y esta es la solución generada para construir la función de Green. Supongamos que queremos solucionar la ecuación de Laplace dada una condición de borde. El apéndice explica la expansión de la solución en términos de las bases ortonormales de la ecuación de Laplace en distintos sistemas de coordenadas (Ver apéndice C):

- Rectangulares.
- Polares.
- Esféricas.
- Cilíndricas.

De las cuales podemos solucionar problemas de valor de borde en diferentes geometrías.

Para encontrar la función de Green en una geometría dada, expandamos la función de Green en términos de los modos normales de la ecuación de Laplace para esa geometría, y resolvemos directamente para los coeficientes desde

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

con la condición de borde Dirichlet

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\partial\Omega} = 0$$

6.4.1. G en coordenadas esféricas para espacio infinito por método directo

Podemos expandir la función de Green en términos de los modos normales de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m}(r, r', \theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

donde

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Dado que el problema es lineal y la función delta ya tiene el coeficiente para $Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi')$, por simetría podemos expandir G como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} g_{\ell}(r, r') Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Usando la ortogonalidad de los armónicos esféricos, podemos encontrar

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_{\ell})}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} g_{\ell} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r')$$

de donde obtenemos la solución

$$g_{\ell}(r, r') = \begin{cases} Ar^{\ell} + Br^{-(\ell+1)} & r < r' \\ A'r^{\ell} + B'r^{-(\ell+1)} & r > r' \end{cases}$$

Ahora necesitamos involucrar las condiciones de borde. Como estamos hablando del espacio infinito, tenemos

$$g_{\ell}(r, r') = \begin{bmatrix} A(r')r^{\ell} & r < r' \\ B(r')\frac{1}{r^{\ell+1}} & r > r' \end{bmatrix} = C \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

donde en la última expresión hemos hecho cumplir la continuidad en r' , y la simetría $G(x, x') = G(x', x)$. El valor de C es obtenido integrando desde $r = r' - \varepsilon$ hasta $r = r' + \varepsilon$ la ecuación de arriba para g

$$\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} r \times \left[\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_{\ell})}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} g_{\ell} \right] = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r')$$

$$\frac{d}{dr}(r g_{\ell}) \Big|_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \quad \rightarrow \quad C = \frac{4\pi}{2\ell+1}$$

y la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

donde

$$r_> = \max[r, r'] \quad r_< = \min[r, r']$$

En el caso de simetría azimutal tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos \gamma) \\ \frac{1}{|x - x'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma) \rightarrow \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \cos(\phi - \phi') \sin \theta \sin \theta' \end{aligned}$$

La última expresión puede también ser encontrada evaluando \mathbf{x} y \mathbf{x}' en el eje z (donde $\gamma = 0$), y expandiendo $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. En esta notación $r_>$ es el más largo entre \mathbf{x} y \mathbf{x}' , y $r_<$ el opuesto. Es interesante notar que somos capaces de encontrar toda la solución sólo evaluando la expresión anterior donde $\cos \gamma = 1$ y luego multiplicando cada término por $P_{\ell}(\cos \gamma)$.

6.4.2. G en coordenadas esféricas entre dos esferas conductoras por método directo

Podemos expandir la función de Green en términos de los modos normales de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Nuevamente escribimos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m}(r, r', \theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

donde

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Notemos ya que el problema es lineal y la función delta ya tiene el coeficiente $Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi')$. Por lo tanto podemos expandir G como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} g_l(r, r') Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

donde obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_l)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r')$$

La solución es

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & r < r' \\ A'r^l + B'r^{-(l+1)} & r > r' \end{cases}$$

donde hemos usado la ortogonalidad de los armónicos esféricos. Ahora necesitamos involucrar las condiciones de borde. Tomamos el espacio vacío entre dos esferas conductoras de radios $a < b$ y recordando que r' está en el medio, tenemos

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A(r') \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & r < r' \\ B(r') \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & r > r' \end{cases} = C \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

donde en la última expresión hemos hecho cumplir la continuidad en r' , y la simetría $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$. El valor de C es obtenido integrando desde $r = r' - \varepsilon$ hasta $r = r' + \varepsilon$ la ecuación de arriba para g

$$\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} r \times \left[\frac{1}{r} \frac{d^2(r g_l)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \right] \\ \frac{d(r g_l)}{dr} \Big|_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} = -4\pi \quad \rightarrow \quad C = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)}$$

y la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right)} \left(r_<^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

6.4.3. \mathbf{G} en coordenadas esféricas fuera de una esfera conductora por método indirecto

Supongamos que sabemos la solución de G en una geometría simple. Podemos usar esta solución

$$\nabla^2 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

para construir G para geometrías más complicadas

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

con

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad F|_{\delta\Omega} = 0$$

Por ejemplo, tomemos la función de Green para el espacio infinito

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|x - y|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

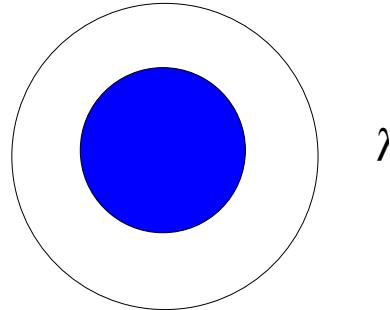
luego el potencial G puede ser escrito como

$$G = \hat{G} + F = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} + A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

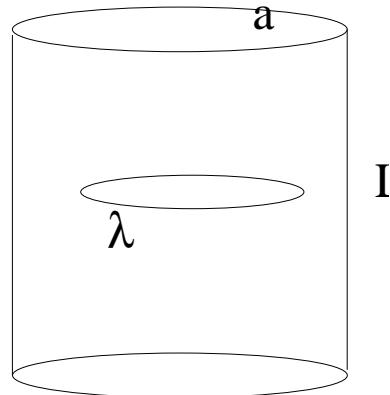
Donde F puede ser escrita en la forma más general, y hemos incluido la linealidad del problema en los coeficientes A y B . Notemos que las condiciones de salto en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ esta incluida en la expresión de \hat{G} . Por lo tanto sólo nos tenemos que preocupar de las condiciones de borde en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ (note que $a < y$), y la condición en $r \rightarrow \infty$, la cual es $A = 0$. La solución luego

$$G|_{r=a} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{a^{2\ell+1}}{y^{\ell+1} r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

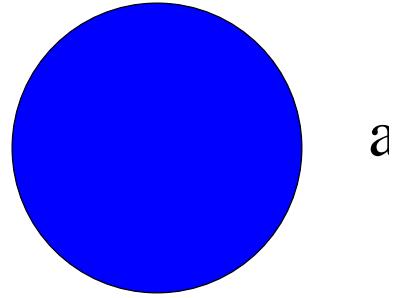
las cuales son la mismas soluciones como arriba con $b = 0$.



Problema: Encuentre el potencial producido por un anillo de carga de densidad λ (concéntrico con la esfera) fuera de una esfera conductora a potencial $V_0 \cos \theta \sin \phi$.



Problema: Encuentre el potencial producido por un anillo de carga de densidad λ de radio $R < a$ dentro de un cilindro de radio a y largo L . El anillo esta puesto perpendicular al eje de simetría del cilindro en $L/2$.



Problema: Encuentre el potencial externo producido por una esfera de radio a que tiene un potencial $\Psi = e^{-\theta^2}$ sobre su superficie.

Problema: Encuentre el potencial producido por un anillo de carga entre dos esferas, asumiendo $G(r, \theta)$ y $G(r, \theta, \phi)$.

6.4.4. Expansión en bases de un problema relacionado

Otro método para obtener las funciones de Green es expandiendo en un sistema completo de los valores propios de un problema relacionado. El problema relacionado es

$$\nabla^2 \Psi + (f(\mathbf{x}) + \lambda) \Psi = 0$$

el cual es satisfecho para ciertos valores $\{\lambda_n, \Psi_n\}$

$$\nabla^2 \Psi_n + (f(\mathbf{x}) + \lambda_n) \Psi_n = 0 \rightarrow \int \Psi_n \Psi_m d^3x = \delta_{nm}$$

Otros valores dan las soluciones no convergentes o las singulares. La función de Green puede, entonces, ser encontrada por

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + (f(\mathbf{x}) + \lambda) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n a_n(\mathbf{x}') \Psi_n(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_n \frac{\Psi_n^*(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda}$$

Notemos que la ecuación para las funciones propias pueden en principio ser diferentes desde la ecuación satisfecha por la función de Green.

Problema: Funciones propias en el espacio infinito.

Asumamos la ecuación de ondas

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi_k(x) = 0 \rightarrow \Psi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik \cdot x}$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2} d^3k$$

7. Magnetostática

Biot, Savart (~ 1820) y Ampere (~ 1820) propusieron que la fuerza inducida por un cable que lleva una corriente I_1 con un elemento de longitud dl_1 en un cable que también lleva una corriente I_2 con un elemento de longitud dl_2 es

$$\mathbf{F}_{2,1} \sim \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{d\ell_2 \times [d\ell_1 \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}$$

Esta dependencia fue descubierta por cuidadosos experimentos. En un sentido esto define la “extraña cantidad” denominada corriente. En el sistema CGS la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Las corrientes son medidas en *statampères* ($10^{-9}/3$ Amperes).

Las corrientes fueron una entidad misteriosa hasta que fueron descubiertas la conexión entre las cargas y las corrientes. Si definimos

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))\end{aligned}$$

claramente tenemos la ecuación de continuidad macroscópica

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0}$$

Para casos magnetostáticos, la dependencia del tiempo no está incluida.

Si la corriente no está concentrada en un cable conductor infinitesimal, definimos la densidad de corriente como la corriente por el área representativa

$$\mathbf{J} = ne \langle \mathbf{v} \rangle_x \rightarrow \mathbf{J} d^3x = I d\ell$$

Veremos más adelante que esta función continua es un promedio espacial de la velocidad de la carga $\langle \mathbf{v} \rangle_x$ en alguna escala particular intermedia, si existe. Esto asume que hay tanto una escala espacial (y temporal) donde tal promedio es significativo, i.e., donde las desviaciones son pequeñas en todo tiempo, mirar Fig. 1 y análisis más adelante.

8. Campo magnético y potencial magnético

Un campo magnético puede ser definido en una forma similar como en el caso de la electrostática, pero se requiere que

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint d\ell_y \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \oint \frac{d\ell_y \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

y pasando a una formulación macroscópica

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y$$

Esta definición implica la bien conocida “regla de la mano derecha”. Debemos siempre ser cuidadosos sobre esta definición, ya que incluye una “fuerza propia”, similar a una “energía propia”, efecto que se produce cuando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Por lo tanto, solo tiene sentido la fuerza de un “grupo de cargas” sobre otro “grupo de cargas”.

Hemos asumido la idea de superposición, lo cual está bien siempre y cuando no vayamos al régimen de mecánica cuántica, óptica no lineal, etc.

Podemos fácilmente definir el potencial vectorial

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \left(\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \right)$$

con lo cual tenemos la ecuación de Maxwell

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Como habíamos visto en el caso electrostático

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

fue útil tener el rotor y la divergencia del campo. Entonces, qué es $\nabla \times \mathbf{B}$? Tomemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \nabla \times \left[\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \right] \\ &= \nabla \nabla \cdot \left[\frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{y}) \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d^3y \right] - \left[\frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{y}) \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d^3y \right] \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \nabla \left[\frac{1}{c} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \right] \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \left[\int \frac{\rho(\mathbf{y}) d^3y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

Obtenemos el resultado integrando por partes los términos de la forma $\nabla \cdot (f \mathbf{A})$. Para el caso magnetostático el último término es cero, este último término fue propuesto por Maxwell completando las llamadas ecuaciones de Maxwell.

Podemos definir el potencial vectorial como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \nabla \Psi \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

La elección de Ψ depende del **gauge** que elijamos. Es útil utilizar el **gauge** $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ya que nos da que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

lo cual es lo mismo que la ecuación de Poisson, pero en forma vectorial. En el caso de la electrostática, en general, no conocemos las corrientes inducidas en los bordes.

Supongamos que tenemos un campo vectorial que

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} \neq 0$$

entonces podemos elegir otro campo vectorial

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \nabla \Psi$$

que da

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} + \nabla^2 \Psi$$

Por lo tanto es factible encontrar un Ψ tal que

$$\nabla^2 \Psi = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}$$

y por lo tanto podemos asumir

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

9. Método de solución

En el caso de la electrostática el borde contribuyó al potencial vía la generación de cargas superficiales. Estamos interesados en los problemas de valor de borde donde el potencial fue definido en la superficie. En el caso presente

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$

la construcción de la función de Green es un poco mas complicada en relación con los conceptos equivalentes a los conductores de la electrostática. Lo que requiere entender el comportamiento del medio bajo la presencia del campo magnético, lo cual genera corrientes microscópicas, lo que depende del tiempo y es en general un problema tiempo dependiente. ¿cuál es el campo magnético dentro de un conductor?

Tomemos estas ecuaciones cerca de una interfase y tratemos de deducir como cambia el campo al cruzar la interfase. Tomemos una caja infinitesimal de tapa y fondo dS , y lado $dh \rightarrow 0$ (ver Fig. 3a). Usando el teorema de Gauss para la integral de volumen obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B} \, dx^3 &= 0 \\ \oint_{\delta\Omega} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= 0 \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &\approx 0\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos una condición de borde para los campos

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

Para el caso de campo tangencial, tomemos un rectángulo perpendicular, como se muestra en la Fig. 3b. Integrando sobre esta superficie que atraviesa la interfase tenemos

$$\begin{aligned}\oint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= 4\pi \oint \vec{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\ell &= 0 \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} \, d\ell &\approx 4\pi \int \mathbf{J}_\perp dh \, d\ell\end{aligned}$$

en el límite $dh \rightarrow 0$, con

$$\mathbf{K} = \lim_{dh \rightarrow 0} \int \mathbf{J}_\perp dh$$

Por lo tanto, la carga de la superficie genera una discontinuidad en el campo magnético tangencial debido a una corriente superficial. Con lo cual obtenemos la segunda condición de borde

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = 4\pi \mathbf{K}$$

donde \mathbf{K} es la corriente superficial que se induce por la discontinuidad en el campo magnético tangencial.

En algunas situaciones es posible construir una corriente de imagen para situaciones de condiciones de borde simples. Estudiaremos tales casos en el próximo capítulo. Por ahora, nos concentraremos en la situación del espacio infinito.

Problema: El campo magnético producido por un loop de corriente de radio R .
Este problema puede ser solucionado por integración directa,

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\ell \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

con

$$\mathbf{y} = R[\cos \phi, \sin \phi, 0]$$

y

$$d\boldsymbol{\ell} = \frac{d\mathbf{y}}{d\phi} d\phi = [-R \sin \phi, R \cos \phi, 0] d\phi$$

Pero ahora estudiaremos usando la función de Green en el espacio infinito. La densidad de corriente en coordenadas esféricas es

$$\mathbf{J} = I \frac{\delta(y - a)}{a} \delta(\theta_y - \pi/2) [-\sin \phi_y, \cos \phi_y, 0]$$

con lo que podemos integrar usando $Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = C_{\ell,m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{4\pi}{c} \sum_{\ell, m}^{\infty} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)}{2\ell + 1} \int dy^3 \mathbf{J}(\mathbf{y}) \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) \\ &= \frac{4\pi I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)}{2\ell + 1} C_{\ell,m} P_{\ell}^m(0) \int_0^{2\pi} d\phi_y e^{-im\phi_y} \left[\frac{e^{-i\phi_y} - e^{i\phi_y}}{2i}, \frac{e^{i\phi_y} + e^{-i\phi_y}}{2}, 0 \right] \\ &= \frac{8\pi^2 I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \frac{1}{2\ell + 1} |C_{\ell,m}|^2 P_{\ell}^m(\cos \theta) P_{\ell}^m(0) e^{im\phi} \left[\frac{\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}}{2i}, \frac{\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}}{2}, 0 \right] \end{aligned}$$

Dado que

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi)$$

o lo que es equivalente

$$C_{\ell,m} P_{\ell}^m(\cos \theta) = (-1)^m C_{\ell,-m} P_{\ell}^{-m}(\cos \theta)$$

Para el caso $m = \pm 1$, tenemos finalmente

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} |C_{\ell,1}|^2 P_{\ell}^1(0) P_{\ell}^1(\cos \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

donde ahora $r_{>} = \text{Max}[r, a]$ y $r_{<} = \text{Min}[r, a]$. Dado que

$$P_{\ell}^1(0) = \begin{cases} (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{(\ell+1)!}{2^{\ell} \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} & \ell \text{ impar} \\ 0 & \ell \text{ par} \end{cases}$$

De esta expresión podemos calcular el campo magnético lejos del loop $r \gg a$ como

$$\begin{aligned}
B_r &= \left(\frac{\pi I a^2}{c} \right) \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n n!} \frac{a^{2n}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}^1(\cos \theta) \right] \\
B_\theta &= \left(\frac{\pi I a^2}{c} \right) \left[-\frac{\sin \theta}{r^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n (n+1)!} \frac{a^{2n}}{r^{2n+3}} P_{2n+1}^1(\cos \theta) \right]
\end{aligned}$$

El término en los paréntesis redondos es el momento del dipolo magnético para el loop plano (área por la corriente). Este resultado será útil cuando discutamos el medio magnético en el próximo capítulo.

10. Fuerza de Lorenz

Ahora podemos calcular la fuerza que siente un carga q en la presencia de un campo magnético y un campo eléctrico

$$\rho(\mathbf{x}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = q\mathbf{v}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$$

utilizando las definiciones de arriba, tenemos

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \int \rho(\mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y}) d^3y + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) d^3y$$

que nos da

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{x}) + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

11. Solución numérica

Estamos interesados en resolver numéricamente la ecuación de Laplace y la de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho$$

En general muchos de estos problemas quedan explícitos como problemas con condiciones de borde, no como un problema inicial que se puede integrar con métodos estándar.

11.1. Problemas en 1D

Para el caso de una dimensión tenemos que resolver

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -4\pi\rho(x)$$

que en principio se puede encontrar como

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \Psi'(0)x - 4\pi \int_0^x dz \int_0^z \rho(y)dy$$

Podemos notar que para integrar esta ecuación necesitamos ser capaces de hacer la integral y además tener dos condiciones de borde en $x = 0$.

Muchas veces la integral no se puede resolver en forma analítica y en otras no tenemos las condiciones en el mismo punto, sino mas bien tenemos condiciones de borde $\Psi(0)$ y $\Psi(L)$.

11.1.1. “Shooting Method”

Para esto debemos formular un “shooting method”.

Problema: Supongamos que tenemos que resolver

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -4\pi\rho(x)$$

que en principio se puede encontrar como

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \Psi'(0)x - 4\pi \int_0^x dz \int_0^z \rho(y)dy$$

Podemos notar que para integrar esta ecuación necesitamos ser capaces de hacer la integral y además tener las condiciones de borde en $x = 0$.

Muchas veces la integral no se puede resolver en forma analítica y en otras no tenemos las condiciones en el mismo punto, sino mas bien tenemos condiciones de borde $\Psi(0)$ y $\Psi(L)$. Para estos casos, podemos utilizar un “método de disparo” para encontrar la solución en forma numérica.

Por ejemplo, si queremos resolver el problema de

$$\rho(x) = \sin(\cos[x]) \quad \Psi(0) = 1 \quad \Psi(1) = 4$$

Para eso definimos una función en MATHEMATICA

```
fun[xo_] := (p[x]/.NDSolve[{p''[x] == -4Pi\rho[x], p[0] == 1, p'[0] == xo}, p[x], {x, 0, 1}])/.x -> 1
```

con lo cual podemos encontrar el valor de $\Psi(1)$ dado un valor inicial $x_o = \Psi'(0)$. Ahora tenemos que encontrar el cero de la función

$$g(xo) = fun[xo] - \Psi(1)$$

Para encontrar el valor de $\Psi'(0)$ que de $\Psi(1) = 4$. Esto se puede hacer con el método de la secante dados dos valores iniciales $s_0 = 1$, $s_1 = 3$,

$$s_{n+1} = s_n - g(s_n) \frac{s_n - s_{n-1}}{g(s_n) - g(s_{n-1})}$$

el cual converge rápidamente a $s \rightarrow 7,2$, y la solución se muestra en la Fig. 5.

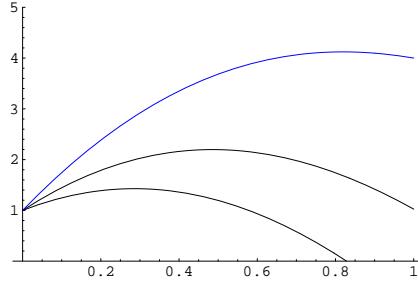


Figura 5: Solución al problema en una dimensión

En MATHEMATICA podemos hacer uso de un método mas eficiente que esta dado por `FindRoot`.

11.1.2. Elementos finitos

También es posible construir directamente una aproximación numérica del funcional

$$S[f] = \int \mathcal{L} dx$$

discretizando la función $f(x)$ en termino de funciones localizadas

$$f(x) = \sum_i f_i h_i(x)$$

donde $h_i(x)$ es el elemento finito alrededor del punto de la grilla (x_i) . Por ejemplo,

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{\Delta x} & |x - x_i| \leq \Delta x \\ 0 & |x - x_i| > \Delta x \end{cases}$$

con $x_i = i\Delta x$. Pero hay otras posibilidades como una cuadrática centrada en x_i o una Gaussiana centrada en x_i . Podemos calcular la integral de arriba en función de f_i . Luego de optimizar esta expresión sobre los valores desconocidos de f_i , obtenemos la solución esperada. En MATHEMATICA podemos utilizar NSolve si el problema es polinomial, o FindMinimum si el problema es no-lineal en f_i . Para discretizaciones mas avanzadas, es posible que tengamos que usar un método mas global como algoritmos genéticos o CSA, ya que pueden existir múltiples mínimos.

Ejemplo: Supongamos que queremos resolver el mismo problema de arriba

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -4\pi\rho(x)$$

con

$$\rho(x) = \sin(\cos[x]) \quad \Psi(0) = 1 \quad \Psi(1) = 4$$

En este caso sabemos que este problema se puede escribir como un funcional

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Psi'^2 - 4\pi\rho\Psi$$

Por lo tanto re-escribimos la acción como

$$S[\{\Psi_i\}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^N \Psi_i \Psi_j \int_0^1 dx h'_i(x) h'_j(x) - 4\pi \sum_{i=0}^N \Psi_i \int_0^1 dx h'_i(x) \rho(x)$$

Con la definición

$$A_{i,j} = \int_0^1 dx h'_i(x) h'_j(x)$$

y

$$b_i = 4\pi \int_0^1 dx h'_i(x) \rho(x)$$

donde $i = 0, \dots, N$ y $j = 0, \dots, N$. Entonces se puede escribir como una matriz actuando sobre el vector $\bar{\Psi} = (\Psi_0, \dots, \Psi_N)$,

$$S[\bar{\Psi}] = \frac{1}{2} \bar{\Psi}^T A \bar{\Psi} - \bar{\Psi}^T b$$

Notemos que las condiciones de borde tienen que ser satisfechas por

$$\Psi(0) = \sum_i \Psi_i h_i(0) \quad \Psi(1) = \sum_i \Psi_i h_i(1)$$

que se usan para despejar dos Ψ_i . Para nuestros elementos finitos triangulares tenemos

$$\Psi_0 = 1 \quad \Psi_N = 4$$

Con estos elementos finitos podemos calcular inmediatamente

$$A = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^N \Psi_n A_{n,m} \Psi_m - \sum_{n=0}^N b_n \Psi_n$$

Si ahora buscamos el óptimo

$$\frac{dS}{d\Psi_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N-1$$

obtenemos

$$\sum_{n=0}^N A_{i,n} \Psi_n - b_i = 0 \quad i = 1, \dots, N-1$$

porque la matriz A es simétrica. Notemos que las condiciones de borde están incluidas aquí ya que la sumatoria va de $n = 0$ hasta $m = N$. Separemos los términos correspondientes a condiciones de borde

$$\sum_{n=1}^{N-1} A_{i,n} \Psi_n = b_i - A_{i,0} \Psi_0 - A_{i,N} \Psi_N \quad i = 1, \dots, N-1$$

Podemos re-escribir entonces esto como

$$\bar{A} \Psi = \bar{b}$$

y la solución es entonces

$$\bar{\Psi} = \bar{A}^{-1} \bar{b}$$

Problemas mas complicados también se pueden enfrentar.

11.2. Problema en 2-D y 3-D

Para el caso de una dimensión tenemos que resolver

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} = -4\pi\rho(x, y) \quad \Psi|_{\Omega}$$

en el borde.

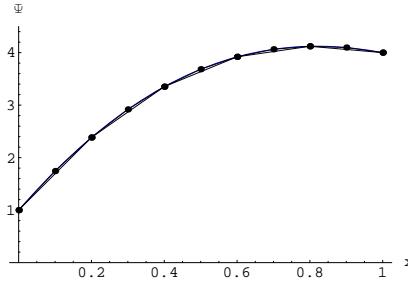


Figura 6: Solución al problema en una dimensión con elementos finitos

11.2.1. Solución por relajación

Es posible probar que el teorema del valor medio para el potencial, en el cual el potencial en el centro de una esfera, sin ninguna carga, es igual al potencial promedio en la superficie de la esfera. Si asumimos una discretización esto puede ser usado por iteración para obtener el valor convergente para el potencial en una región sin ninguna carga, y donde las condiciones límite para el potencial es conocida

$$\Psi_{i,j,k}^{(n+1)} = \frac{1}{6} \left[\Psi_{i+1,j,k}^{(n)} + \Psi_{i-1,j,k}^{(n)} + \Psi_{i,j+1,k}^{(n)} + \Psi_{i,j-1,k}^{(n)} + \Psi_{i,j,k+1}^{(n)} + \Psi_{i,j,k-1}^{(n)} \right] + \frac{4\pi}{6} \Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2 \rho_{i,j,k}$$

asumiendo una condición de borde conocida, la solución converge a la actual solución de la ecuación de Poisson. En otros sistemas de coordenadas es necesario discretizar apropiadamente. La extensión a 1D o 2D es trivial.

Problema: Descargas fractales

Asumamos que definimos una descarga fractal como un sistema de puntos adyacentes que están en un potencial fijo $\Psi = 1$, y el infinito (en este caso, un círculo de radio R) en $\Psi = 0$. Dada esta configuración de potencial, podemos usar el método de relajación para calcular el potencial en cualquier lado. En dos dimensiones el método de relajación es

$$\Psi_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left[\Psi_{i+1,j}^{(n)} + \Psi_{i-1,j}^{(n)} + \Psi_{i,j+1}^{(n)} + \Psi_{i,j-1}^{(n)} \right]$$

Por lo tanto conocemos el campo eléctrico en cualquier lado, y especialmente en los puntos adyacentes a la descarga. La descarga se desarrollará agregando en los puntos adyacentes a la descarga. Un punto tiene la probabilidad de ser agregado a la descarga proporcional a un poder η en el campo eléctrico local

$$P_{i,j} \sim E_{i,j}^\eta$$

Una vez que el punto es agregado, recalculamos el potencial y repetimos la operación. Usamos el código de potencial escrito en C++ para calcular el fractal siguiente. El resultado está dado para $\eta = 1,0$

El potencial es mostrado como los contornos de color. Obviamente si $\eta = 0$ tenemos una estructura en dos dimensiones, en cambio si η va hacia infinito tenemos una línea de una dimensión.

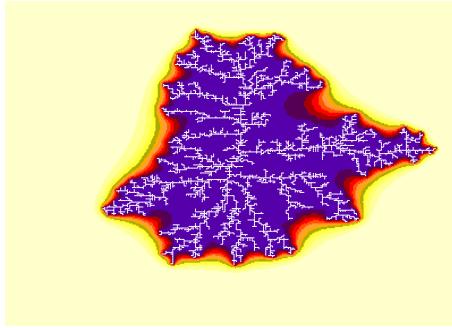


Figura 7: Descarga Fractal

11.2.2. Solución directa

También es posible construir una solución numérica resolviendo la ecuación de Laplace en forma directa desde su discretización. En forma implícita podemos escribir en la aproximación a primer orden de las derivadas

$$\frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j}}{\Delta y^2} = -4\pi\rho_{i,j}$$

Tenemos que resolver este set implícito de relaciones, pero donde están mezclados condiciones de borde con valores que desconocemos. La idea se separar los valores que conocemos de los valores desconocidos en forma explícita

$$A\Psi = B \quad \rightarrow \quad \Psi = A^{-1}B$$

Así se puede resolver el problema. De hecho la subrutina “Solve” de MATHEMATICA puede ser muy útil en estas situaciones. Notemos que otras discretizaciones son también posibles. Lo interesante, es que en principio una vez que resolvemos un problema, todos los otros problemas (con condiciones de borde similares) están resueltos.

Problema: Lente electrostático. Pretendemos resolver el problema

$$\Psi(x < 1, y = \pm 0,5) = \Psi(x > 4, y = \pm 0,5) = -1 \quad \Psi(2 < x < 3, y = \pm 0,5) = 0$$

en $[0, 5] \times [-0,5, 0,5]$ con una interpolación lineal entre los electrodos en el borde. Utilizaremos la función de MATHEMATICA NDSolve para encontrar una solución numérica.

```

ny = 20; nx = 50; pl = -1; pr = -1;
stp = {pl, pl, 0, 0, pr, pr};
stx = {0, nx/5, 2*nx/5, 3*nx/5, 4*nx/5, nx + 1};
f = Interpolation[Transpose[stx, stp], InterpolationOrder → 1];

eqna = Table[-4*a[i,j]+a[i+1,j]+a[i-1,j]+a[i,j+1]+a[i,j-1]==0,{i,2,nx},{j,2,ny}];
eqn1 = Table[a[i, 1] == f[i], {i, 1, nx + 1}];
eqn2 = Table[a[i, ny + 1] == f[i], {i, 1, nx + 1}];
eqn3 = Table[a[1, j] == pl, {j, 2, ny}];
eqn4 = Table[a[nx + 1, j] == pr, {j, 2, ny}];

eq = Flatten[{eqna, eqn1, eqn2, eqn3, eqn4}];
var = Flatten[Table[a[i, j], {i, 1, nx + 1}, {j, 1, ny + 1}]];
sol = Flatten[Nsolve[eq, var]];

```

Dada la solución, ahora podemos reconstruir el potencial como

```

Δx = 0,1; xmax = nxΔx; ymax = nyΔx/2;
Ψ = Interpolation[Flatten[Table[{iΔx, jΔx - ymax, a[i + 1, j + 1]/.sol}, {i, 0, nx}, {j, 0, ny}], 1]];
g1 = ContourPlot[Ψ[x, y], {x, 0, xmax}, {y, -ymax, ymax}];

```

el cual se muestra en la Fig. 8. Ahora podemos calcular el campo eléctrico

```

tmax = 8;
efx[x_-, y_-] = D[Ψ[x, y], x];
efy[x_-, y_-] = D[Ψ[x, y], y];
ex[x_-, y_-] = If[x >= 0 & & x <= xmax & & y >= -ymax & & y <= ymax, efx[x, y], 0];
ey[x_-, y_-] = If[x >= 0 & & x <= xmax & & y >= -ymax & & y <= ymax, efy[x, y], 0];

```

y programar el calculo de la trayectoria de electrones

```

tra[xo_-, yo_-, eo_-, θ_-]:= (
solu = NDSolve[{x''[t]==ex[x[t],y[t]],y''[t]==ey[x[t],y[t]],
x[0]==xo,y[0]==yo,x'[0]==eo*Cos[θ],y'[0]==eo*Sin[θ]}, {x[t], y[t]}, {t, 0, tmax}];
x1[t_-] = x[t] /. Flatten[solu];
y1[t_-] = y[t] /. Flatten[solu];
Return[ParametricPlot[{x1[t], y1[t]}, {t, 0, tmax}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}]];
)

s = Table[tra[0.1, yv, 0.01, 0], {yv, -0.5, 0.5, 0.1}];

```

Finalmente, podemos grafical todo junto como se muestra en la Fig. 8, que muestra que el lente electrostático es convergente.

```
gra = Show[g1, s, DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotRange -> {{0, xmax}, {-ymax, ymax}}, Frame -> True, FrameLabel -> {"x", "y"}];
```

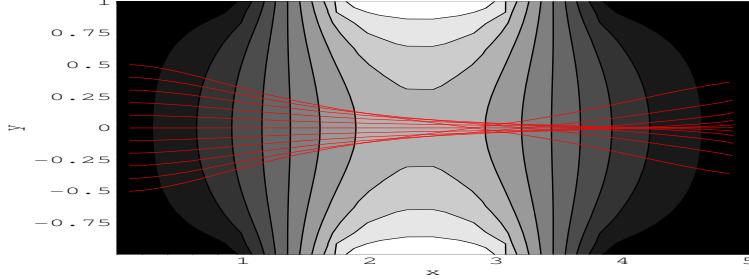


Figura 8: Solución al problema en dos dimensiones con las trayectorias de electrones superpuestos. La trayectoria de los electrones en un lente electrostático definen la distancia focal del lente. Esto es un lente convergente.

Las trayectorias en rojo se calcularon numéricamente utilizando

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{q}{m} \nabla \Psi$$

Notemos que podemos normalizar

$$\bar{\Psi} = \frac{\Psi}{V_o} \quad y = \frac{x}{L} \quad \tau = v_o t$$

con lo cual todo el problema queda determinado en termino de un parámetro adimensional. Es factible entonces graficar la distancia focal y la magnificación del lente electrostático como función de este parámetro.

11.2.3. Solución por elementos finitos

En realidad el método de elementos finitos tiene que ver con un procedimiento mas general para resolver problemas de este tipo. Notemos que la ecuación de Laplace viene de un principio de optimización

$$L[\Psi] = \int ((\nabla \Psi)^2 - 4\pi\rho\Psi) dx^3 \quad \rightarrow \quad \delta L = 0 \rightarrow \nabla^2 \Psi = -4\pi\rho$$

Por lo tanto uno puede asumir una forma de interpolación

$$\Psi(x, y) = \sum_{i,j} \Psi_{i,j} h(x, y, x_i, y_j)$$

donde $h(x, y, x_i, y_j)$ es el elemento finito alrededor del punto de la grilla (x_i, y_j) . Usando una aproximación lineal

$$h(x, y, x_i, y_i) = h(x, x_i)h(y, y_i)$$

donde

$$h(x, x_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{\Delta x} & |x - x_i| \leq \Delta x \\ 0 & |x - x_i| > \Delta x \end{cases}$$

con $x_i = i\Delta x$, se puede calcular la integral de arriba. Luego optimizamos esta expresión sobre los valores desconocidos de $\Psi_{i,j}$. Aquí lo importante es ordenar apropiadamente los índices para poder escribir este problema como

$$\bar{A}\Psi = \bar{b}$$

y la solución es entonces

$$\bar{\Psi} = \bar{A}^{-1}\bar{b}$$

donde b contiene información sobre las condiciones de borde, y A es una matriz conocida.

Si tenemos condiciones de borde donde otro sistema de coordenadas es razonable, tenemos que evaluar el funcional en forma apropiada.

Cuando las condiciones de borde no son regulares o rectangulares, es conveniente usar una grilla no rectangular. Para estos casos es muy común utilizar una grilla triangular (la mayoría de las veces se utiliza una grilla variable con en la Fig. 9

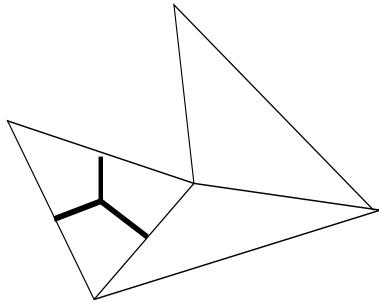


Figura 9: Grilla triangular variable

Para estos casos, conviene utilizar una interpolación lineal dentro de cada triángulo

$$\Psi_i(x, y) \approx a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}y$$

donde los coeficientes varían en cada triángulo de área A_i y dependen de la posición de los tres puntos que definen cada triángulo. Es posible hacer una transformación de una interpolación dentro de

los triángulos a una descripción en termino de elementos finitos sobre cada punto de la grilla, pero estos claramente dependen de la posición de los otros puntos del triangulo. El caso de una grilla regular es mas fácil. Notemos que el Lagrangiano en dos dimensiones es

$$\int (\nabla \Psi)^2 dx^2 = \sum A_i (a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2)$$

donde la suma es sobre los triángulos. Notemos que puede ser mas fácil organizar computacionalmente los triángulos en termino de un método de refinamiento de la grilla, en lo que se llama un método adaptivo.

Appendix

A. Convención de las sumatorias de Einstein

Desde ahora, usaremos la convención de las sumatorias de Einstein. Esto significa que dos índices en una expresión implican una doble sumatoria explícita. Definamos

$$(A \times B)_k = \varepsilon_{i,j,k} A_i B_j$$

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} P(i, j, k) & i \neq j \neq k \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

con $P(i, j, k) = (-1)^n$, con n el número de permutaciones de elementos adyacentes que necesitamos operar sobre (i, j, k) para producir $(1, 2, 3)$, el cual vale 1. Por ejemplo,

$$P(2, 3, 1) = P(2, 1, 3) = P(1, 2, 3) = 1$$

$$P(3, 2, 1) = -P(3, 1, 2) = P(1, 3, 2) = -P(1, 2, 3) = -1$$

Esto es equivalente a ver si la rotación cíclica de (i, j, k) da $(1, 2, 3)$ que tiene valer +1 o $(2, 1, 3)$ que tiene valor -1. Por ejemplo,

$$P(2, 3, 1) \rightarrow P(1, 2, 3) \quad \rightarrow \quad P(2, 3, 1) = 1$$

$$P(3, 2, 1) \rightarrow P(2, 1, 3) \quad \rightarrow \quad P(3, 2, 1) = -1$$

Con estas definiciones no es difícil darse cuenta que

$$\varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{l,m,k} = \delta_{i,l} \delta_{j,m} - \delta_{i,m} \delta_{j,l}$$

con $\delta_{i,j} = 0$ si $i = j$, y cero en otro caso. Esta relación fundamental ya que permite calcular productos como

$$\begin{aligned} (A \times B)^2 &= \varepsilon_{i,j,k} A_i B_j \varepsilon_{l,m,k} A_l B_m \\ &= (\delta_{i,l} \delta_{j,m} - \delta_{i,m} \delta_{j,l}) A_i B_j A_l B_m \\ &= A^2 B^2 - (A \cdot B)^2 \\ A \times (A \times B) &= A^2 B - A(A \cdot B) \end{aligned}$$

B. Funciones Delta

Una función delta puede ser construida de muchas maneras

- Como un límite de una Gaussiana con $\sigma \rightarrow 0$.

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Como un límite de $\delta_{i,j}$ en un espacio de dimensión $N \rightarrow \infty$.

La definición que nos interesa es

$$\begin{aligned} \delta(x - a) &= 0 \quad x \neq a \\ \int_I \delta(x - a) f(x) dx &= f(a) \quad a \in I \end{aligned}$$

Es en realidad una distribución. Para definir distribuciones apropiadamente es necesario definir medidas (por ejemplo Lebesgue). Notemos que la integral de Riemann no tiene mucho sentido acá (excepto como límite de algo más continuo).

Entonces es claro que

$$f'(a) = - \int_I \delta'(x - a) f(x) dx$$

y haciendo un cambio de variable tenemos

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

Notemos que aquí asumimos que las funciones son bastante suaves con ceros simples.

Otro resultado importante es

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Primero es fácil darse cuenta que en coordenadas esféricas tenemos

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

con lo cual

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{r} \right] = 0 \quad r \neq 0$$

pero por el teorema de Gauss tenemos que

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \Psi \, d^3y = \int_{\partial\Omega} \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} dS$$

y usando

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\mathbf{\phi}}$$

con lo cual

$$\nabla \left[\frac{1}{r} \right] = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

y por lo tanto si integramos una esfera de radio R, obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \, d^3y = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \\ -4\pi & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

para cualquier R. Esto implica la expresión de arriba desde la definición de la función delta.

Es también posible probar esto usando un procedimiento de límites con un potencial de la forma

$$\Psi_a(x) = \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{\sqrt{|x - y|^2 + a^2}} dy$$

Esto tiene que ver con el concepto de distribución, la cual es un funcional lineal tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\psi_n) = S\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n\right)$$

para una secuencia convergente ψ_n . También se puede utilizar el concepto de medida (por ejemplo Lebesgue), tal que

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x) \delta [dx] = f(0)$$

o en forma mas “suave” como

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x) \delta [dx] = \int_{\infty}^{-\infty} f(x) dH(x)$$

donde

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Así, podemos definir la derivada de la distribución

$$\delta[\Psi] = - \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(x) H(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) H'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dH(x) = \Psi(0)$$

En d dimensiones, tenemos

$$\delta^{(d)}[c\mathbf{x}] = |c|^{-n} \delta^{(d)}(\mathbf{x})$$

y en el caso de la composición

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta^{(d)}[g(\mathbf{x})] d^d x = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{|\nabla g|} dS(\mathbf{x})$$