

Capítulo 2: Expansión multipolar y medios

En este capítulo discutiremos los comportamientos electrostáticos y magnetostáticos de cargas localizadas y elementos de corriente, como también los efectos que estos producen en el medio.

Índice

1. Multipolos eléctricos	3
2. Medio eléctrico	4
2.1. Derivación rápida	4
2.2. Derivación “un poco mas” correcta	5
2.3. Condiciones de borde	8
3. Multipolos magnéticos	10
4. Medio magnético	12
4.1. Derivación rápida	12
4.2. Derivación “un poco mas” correcta	13
5. Condiciones de borde y solución	16
5.1. Método general	17
5.2. Caso $J = 0$, por potencial escalar	17
6. Energía	24
6.1. Energía eléctrica	25
6.1.1. En un espacio vacío	26
6.1.2. Expansión de dipolo	26
6.1.3. En un medio presente	27
6.2. Energía magnética	27
7. Modelos de materiales	28
7.1. Modelos simples de ϵ y μ	29
7.2. Modelos Estadísticos de ϵ y μ	31
7.3. Modelos simples de magnetización	32
7.4. Método de MonteCarlo	33
7.5. Dinámica de Espines	33
8. Solución numérica	34

1. Multipolos eléctricos

Si asumimos una distribución de carga localizada con

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = |x| \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x^2}}$$

podemos calcular el potencial usando la función de Green, para el espacio infinito, lejos de la fuente local $|x| \gg |y|$ expandiendo

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \approx \frac{1}{|x|} \left[1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x^2} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{4x^4} + \dots \right]$$

En términos de los coeficientes mas usuales tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \rho(\mathbf{y}) \mathbf{y} d^3y \\ Q_{i,j} &= \int \rho(x) (3y_i y_j - y^2 \delta_{i,j}) d^3y \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \approx \frac{q}{x} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{x^3} + \frac{x_i Q_{i,j} x_j}{x^5} + \dots$$

Podemos encontrar

$$\mathbf{n} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \frac{3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{p}}{|x - x_o|^3}$$

En termino de una expansión en multipolos también podemos escribir

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{l,m}(\theta, \phi)}{x^{l+1}} \left[\int \rho(y) y^l Y_{l,m}^*(\theta_y, \phi_y) d^3y \right] = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{l,m}(\theta, \phi)}{x^{l+1}} q_{l,m}$$

donde los coeficientes en los paréntesis cuadrados son los momentos de los dipolos. En general, el valor de los momentos multipolares dependen de la elección del origen. Por supuesto asumimos que el campo evaluado esta lejos de las fuentes, por lo que esta aproximación no es valida cerca de las fuentes como podemos ver en la evaluación

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} & \textit{inside} \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{E}(0) & \textit{outside} \end{cases}$$

donde la esfera de radio R incluye y excluye las fuentes respectivamente. Por lo tanto, cuando consideramos el origen debemos incluir

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \frac{3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|} - \frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$$

Suponiendo que tenemos un numero de partículas

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d^3x = \sum_i q_i \mathbf{x}_i$$

2. Medio eléctrico

Es importante notar que dado que la carga es discreta, aun en un medio macroscópicamente neutral hay efectos macroscópicos como vimos arriba.

2.1. Derivación rápida

Si un medio esta presente entonces la carga, asumiendo un medio neutral, se re-orienta a si mismo para producir dipolos, quadrupolos, etc. La contribución al potencial total es

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \int \left[\frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)Q_{i,j}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^5} + \dots \right] d^3y \\ &= \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\rho(\mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{y})] d^3y + \dots \end{aligned}$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle$ es la densidad dipolar. Hemos usado

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

e integrando por partes

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d^3y = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y = 0$$

asumiendo que $P \rightarrow 0$ en infinito. También asumimos que la contribución del dipolo es la mas relevante. Podemos definir la ecuación para el campo vectorial $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ a primer orden como

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot [\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}] = 4\pi\rho}$$

Esta es la ecuación de la electrostática en materiales.

Problema: Una particular cargada dentro del material siente una fuerza producida por \mathbf{E} o \mathbf{D} ?

2.2. Derivación “un poco mas” correcta

Aquí es importante tener en cuenta la escala intermedia λ que se usa para pasar del discreto al continuo, lo que técnicamente significa promediar sobre un volumen de tamaño λ^3 alrededor de la posición \mathbf{x} y durante un tiempo T alrededor del tiempo t , esto es

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{T\lambda^3} \int_{\lambda^3, T} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) dy^3 d\tau \quad (1)$$

y tiene sentido si las fluctuaciones espacio-temporales son pequeñas (esto implica algunas restricciones de densidad, etc.). Notemos que también podemos utilizar un kernel $K(\mathbf{y})$ para suavizar los efectos de borde, en vez de la función escalón que utilizamos aquí. Notemos que en muchas situaciones, como materiales normales, la escala debería ser $\lambda \sim 10^2$ A, con lo cual podemos “borrar” las escalas atómicas y moleculares. Por lo tanto la escala temporal apropiada $T \sim L/c \sim 10^{-16}$ s es tan pequeña que efectivamente no hace nada. Pero hay muchas situaciones, por ejemplo en plasmas, donde este promedio espacio-temporal tiene que ser hecho con cuidado, porque T puede ser importante. Por ejemplo, cuando la desviación de la velocidad es proporcional a la velocidad termal $\langle v^2 \rangle \sim v_T^2$. Esto tiene particular importancia en plasmas diluidos, el cual corresponde a la mayoría del universo. En general si tenemos una ecuación que modela la microfísica las fluctuaciones espaciales y temporales, como es el caso del plasma, nos damos cuenta que estas fluctuaciones están amarradas a través de una función de dispersión $\omega(k)$, y por lo tanto el promedio temporal (o espacial) es redundante. Aunque se puede hacer si es necesario. Es entonces suficiente calcular

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d^3y$$

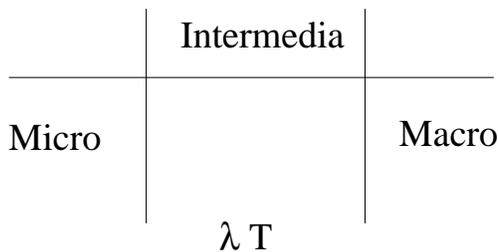


Figura 1: Escala para promediar

Macroscópicamente, tenemos una ecuación para el campo fluctuante

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = 4\pi\bar{\rho} = 4\pi(\bar{\rho}_f + \bar{\rho}_m)$$

donde $\bar{\rho}$ incluye tanto la carga libre ρ_f y las distribuciones de carga alrededor de las moléculas y átomos ρ_m , que en general son neutrales en la escala λ

$$\langle \bar{\rho}_m(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$$

Para la n -ésima molécula, tenemos un set de cargas en las posiciones $\mathbf{x}_i^{(n)}$ que se están moviendo alrededor del centro de masas $\mathbf{x}_n(t)$ de la molécula. Dado que $\lambda \gg |x_i^{(n)}|$, podemos expandir

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_i) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_i^{(n)} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{x_{i,\alpha}^{(n)} x_{i,\beta}^{(n)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right) + \dots$$

de lo que podemos concluir que la densidad de carga que aporta la n -ésima molécula es

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_i q_i^{(n)} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_i^{(n)}(t)) &= q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) - \mathbf{p}_n(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &+ \sum_{\alpha\beta} q_{n,\alpha\beta}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \dots \end{aligned}$$

donde

$$q_n = \sum_i q_i^{(n)} \quad \mathbf{p}_n(t) = \sum_i q_i^{(n)} \mathbf{x}_i^{(n)}(t)$$

Si definimos

$$\bar{\rho}_m(\mathbf{x}, t) = \sum_n \bar{\rho}_n(\mathbf{x}, t),$$

ahora podemos promediar en nuestra escala intermedia para obtener

$$\langle \rho_f(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle \sum_n \rho_n(\mathbf{x}, t) \rangle = \rho(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} Q_{\alpha\beta} + \dots$$

donde $\rho(\mathbf{x})$ (para mantener la convención estándar) corresponde a la densidad de carga macroscópica neta o libre. Hemos usado que

$$\nabla \cdot (\mathbf{p} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)) = \mathbf{p} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$$

Tenemos las siguientes definiciones

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} dy^3 \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{y}) \mathbf{p}_n(t)$$

donde $\mathbf{p}_n(t) = \sum_i q_i^{(n)} \mathbf{x}_i^{(n)}(t)$ es el dipolo eléctrico efectivo (y promediado en el sentido cuántico) de la molécula n . Es importante notar que el promedio de una derivada espacial es

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)}{\partial x_i} dy^3 = \left\langle \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right\rangle$$

Lo mismo aplica para una derivada temporal. Notemos que si incluimos el promedio temporal en nuestro promediador en Eq. 1, se obtiene el mismo resultado en los dos casos.

Notemos que la contribución de la superficie tiene que ser pequeña, para que esto tenga sentido. De alguna forma esto determina la escala λ . De la misma forma tenemos

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} dy^3 \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{y}) q_{n,\alpha\beta}(t)$$

donde $q_{n,\alpha\beta}$ es el tensor cuadrupolar efectivo (y promediado en el sentido cuántico) de la molécula n .

La ecuación para el campo eléctrico macroscópico se obtiene promediando

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle$$

y la ecuación de Maxwell macroscópica es entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \langle \rho \rangle = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t) - 4\pi (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \dots$$

donde $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle$ es el campo macroscópico. Podemos definir

$$D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha - 4\pi \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots$$

y re-escribir la ecuación de Maxwell como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t)$$

donde ρ es la densidad de carga neta macroscópica (o libre). Esta derivación ha incluido la dependencia temporal de las variables para hacerla consistente con el caso dinámico.

Es importante darse cuenta que \mathbf{E} es el campo macroscópico total (efectivo y macroscópico) que sienten las partículas en la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

y que además

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

dado que aun tenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = \langle \nabla \times \mathbf{e} \rangle = 0$$

correspondiente al promedio macroscópico de la ecuación microscópica.

Todavía necesitamos una relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} , que en general nos dan las ecuaciones microscópicas del plasma, o la mecánica cuántica. Si asumimos que el medio es lineal, entonces tenemos

$$\mathbf{P} = \lambda_c \mathbf{E}$$

podemos escribir

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho$$

con la definición de $\epsilon = 1 + 4\pi\lambda_c$. Vemos que el problema se resuelve como antes, pero con la propiedad de densidad de carga afectada por la contribución del dipolo. Veremos mas adelante que ϵ es en realidad un tensor.

2.3. Condiciones de borde

Ahora tenemos las ecuaciones de Maxwell que incluye el medio

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

Asumiendo la misma construcción del primer capitulo, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} &= 4\pi\sigma \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

la componente normal de la región 1 a la región 2, y la carga superficial es ahora una carga superficial real (no inducida). Aun cuando $\sigma = 0$, hay una polarización en la densidad de carga superficial en el limite entre los dos medios, y está dado por

$$\sigma_e = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}$$

Problema: Una cavidad esférica en un medio dieléctrico inmerso en un campo eléctrico uniforme

Notemos que en general ϵ depende de la posición, en particular en la interfase. Esto implica que la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon \nabla^2 \Phi + (\nabla \epsilon) \cdot (\nabla \Phi) = 0$$

Pero en la dos regiones (no en el borde) tenemos $\epsilon = const$, por lo tanto el potencial satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Es importante notar que no hay cargas libres en el sistema, solo cargas de polarización. Dado que tenemos $\Phi(r \rightarrow \infty) = E_o z = -E_o r \cos \theta$, podemos construir la solución general adentro y afuera de la cavidad como

$$\Phi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l \cos \theta$$

$$\Phi_{out} = -E_o r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l \cos \theta$$

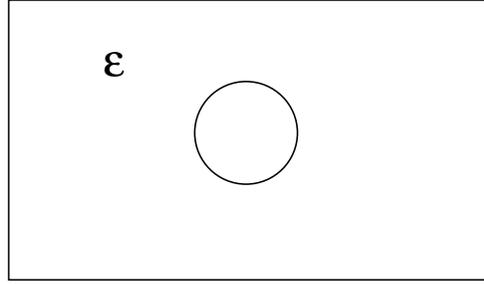


Figura 2: Cavidad en medio dieléctrico

donde no hay cargas externas, entonces ϵ no aparece todavía. Solo aparece a través de las condiciones de borde

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ -\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\epsilon \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \Phi_{in} &= -\left[\frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} \right] E_o r \cos \theta \\ \Phi_{out} &= -\left[1 + \frac{\epsilon-1}{1+2\epsilon} \frac{a^3}{r^3} \right] E_o r \cos \theta \end{aligned}$$

El campo dentro de la esfera es constante proporcional a E_o , mientras el campo afuera tiene también una contribución de un campo del polo eléctrico con momento

$$\mathbf{p} = \frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon} a^3 \mathbf{E}_o$$

y la carga superficial de la polarización es

$$\sigma_e = -(\mathbf{P}_{out} - \mathbf{P}_{in}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{1+2\epsilon} E_o \cos \theta$$

Problema: Problema de apantallamiento dieléctrico. Supongamos que podemos un cascaron dieléctrico entre los radios $a < r < b$. Encuentre el campo eléctrico

Las líneas de campo eléctrico pueden ser calculadas numéricamente resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{|E(r)|}$$

Por lo tanto, la idea es programar un integrador que resuelva la trayectoria que parte del punto (x_o, y_o, z_o) , con lo cual se calcula un sistema de trayectorias para diferentes condiciones iniciales, como se ve en la Fig. 3.

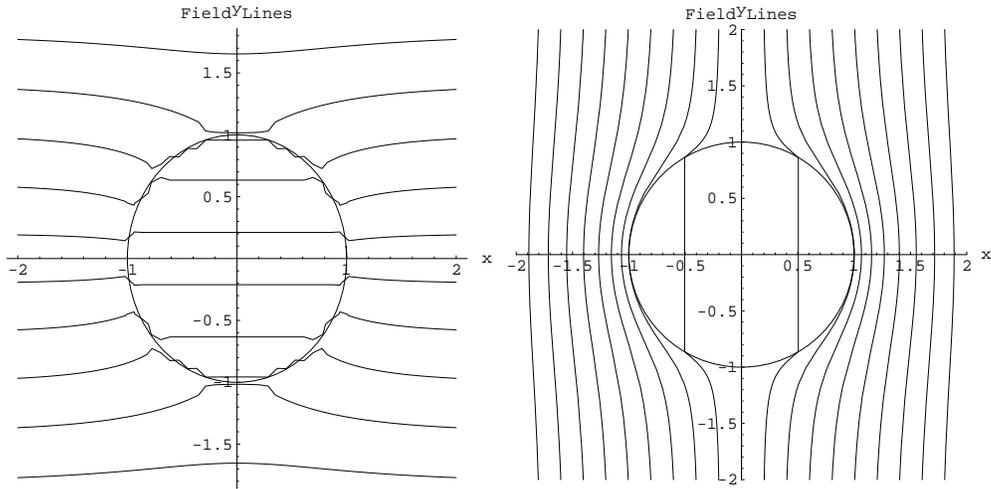


Figura 3: Equipotencial y Líneas de fuerza para el problema de la cavidad en el medio dieléctrico, con $\epsilon = 10$.

Problema: Resuelva el potencial producido por un anillo de carga de densidad lineal λ a una distancia $R > a$ fuera de una esfera dieléctrica de radio a . **Ayuda:** construya la función de Green.

3. Multipolos magnéticos

Asumamos una distribución de corriente localizada, luego podemos calcular el potencial usando la función infinita de Green expandiendo en una serie de Taylor, cerca del origen

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \frac{1}{cx} \int J_i(\mathbf{y}) d^3y + \frac{x_j}{cx^3} \int J_i(\mathbf{y}) y_j d^3y + \dots \\ &= \frac{x_j}{cx^3} \int J_i(\mathbf{y}) y_j d^3y + \dots \\ &= - \left[\frac{\mathbf{x}}{x^3} \times \left(\frac{1}{2c} \int \mathbf{y} \times \mathbf{J} d^3y \right) \right]_i + \dots \\ &= - \left[\frac{\mathbf{x} \times \mathbf{m}}{x^3} \right]_i + \dots \end{aligned}$$

el coeficiente en los paréntesis cuadrados es el momento magnético

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{y} \times \mathbf{J} d^3y$$

Hemos usado la expresión

$$\nabla_y \cdot (fg\mathbf{J}) = (\nabla_y f) \cdot g\mathbf{J} + (\nabla_y g) \cdot f\mathbf{J} + fg\nabla_y \cdot \mathbf{J}$$

con $f = 1$, $g = y_i$, e integrado sobre una superficie infinita con

$$\int_{\Omega} \nabla_y \cdot (fg\mathbf{J}) dy^3 = \int_{\partial\Omega} (fg\mathbf{J}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

para una distribución localizada. Notemos que en magnetostatica tenemos $\nabla_y \cdot \mathbf{J} = 0$. Con esto podemos entonces demostrar que

$$\int J_i(y) d^3y = 0$$

para el caso magnetostático. En el segundo paso utilizamos $f = y_j$, $g = x_j y_i$ para demostrar que

$$\int_{\Omega} [x_j y_i J_j + x_j y_j J_i] dy^3 = 0$$

y

$$\epsilon_{i,j,k} x_j (\mathbf{y} \times \mathbf{J})_k = \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{k,l,m} x_j y_l J_m = x_j y_i J_j - x_j y_j J_i$$

En términos de los coeficientes mas usuales, con $\mathbf{n} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$, tenemos

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{x^3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = \frac{3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3}$$

En general el valor de los momentos dependen de la elección del origen como podemos ver aquí. Por supuesto asumimos que el campo aquí evaluado lejos de las fuentes, entonces la aproximación no es válida cerca de las fuentes como podemos ver evaluando

$$\int_{r < R} \mathbf{B}(\mathbf{x}) dx = \begin{cases} \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} & \text{inside} \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{B}(0) & \text{outside} \end{cases}$$

donde la esfera de radio R incluye y excluye la fuente respectivamente. Por lo tanto, considerando el origen debemos incluir

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = \frac{3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$$

Si la corriente fluye en un circuito cerrado plano , tenemos

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J} d^3x = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x} \times d\boldsymbol{\ell} = \frac{I}{c} \hat{\mathbf{n}} \int da = \frac{IA}{c} \hat{\mathbf{n}}$$

Suponiendo que tenemos un número de partículas

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad \rightarrow \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2c} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \mathbf{L}_i$$

entonces esto es equivalente al momento angular de las partículas. Conocemos de la mecánica cuántica que en general el momento de las partículas en un medio depende fuertemente de la magnitud del campo local (caso ferromagnético) y en particular del spin de las partículas.

La densidad de momento magnético se define como

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \mathbf{x} \times \mathbf{J}$$

4. Medio magnético

Si un medio está presente, luego el momento magnético local se re-orienta a si mismo, y interactúa con los vecinos, para producir dipolos, quadrupolos, etc.

4.1. Derivación rápida

La contribución al vector potencial producido por una densidad (por unidad de volumen λ^3) de momento magnético $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_i n_i \langle \mathbf{m}_i \rangle$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{c\mathbf{M}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right] d^3y \\ &= \frac{1}{c} \int [\mathbf{J}(\mathbf{y}) + \nabla_y \times \mathbf{M}(\mathbf{y})] \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \end{aligned}$$

Hemos asumido que la contribución del dipolo es la más relevante. Podemos concluir que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

y también

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

4.2. Derivación “un poco mas” correcta

Utilizando un procedimiento parecido al anterior para un medio eléctrico, podemos escribir la ecuación microscópicas como

$$\nabla \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} [\bar{\mathbf{j}}_f(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{j}}_m(\mathbf{x}, t)]$$

donde $\bar{\mathbf{j}}$ incluye tanto la corriente neta o libre $\bar{\mathbf{j}}_f$ y las corrientes efectivas alrededor de las moléculas y átomos $\bar{\mathbf{j}}_m$.

La ecuación macroscópica de campo es

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) \rangle$$

La densidad de corriente que aporta la molécula es

$$\bar{\mathbf{j}}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_i q_i^{(n)} \left(\mathbf{v}_n(t) + \mathbf{v}_i^{(n)}(t) \right) \delta^{(3)} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_i^{(n)}(t) \right)$$

con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{j}}_n(\mathbf{x}, t) &\approx q_n \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) - \mathbf{v}_n(t) \left[\mathbf{p}_n(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right] \\ &+ \sum_i q_i^{(n)} \mathbf{v}_i^{(n)}(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) - \sum_\alpha \left[\sum_i q_i \mathbf{v}_i^{(n)}(t) x_{i,\alpha}^{(n)}(t) \right] \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + \dots \end{aligned}$$

Notemos el termino

$$\sum_i q_i^{(n)} \mathbf{v}_i^{(n)}(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) = \frac{d\mathbf{p}_n(t)}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$$

Si calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} d^3y \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{y}) \mathbf{p}_n(t) \\ &\approx \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} d^3y \sum_n \left[\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{y}) \frac{d\mathbf{p}_n(t)}{dt} - \mathbf{p}_n \left(\mathbf{v}_n \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{y}) \right) \right] \\ &= \left\langle \sum_n \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle - \left\langle \sum_n \mathbf{p}_n \left(\mathbf{v}_n \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

y utilizamos

$$\bar{\mathbf{j}}_m = \sum_n \bar{\mathbf{j}}_n,$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \\
&- \langle \sum_n \mathbf{v}_n(t) [\mathbf{p}_n(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] \rangle + \langle \sum_n \mathbf{p}_n(t) [\mathbf{v}_n(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] \rangle \\
&- \langle \sum_n \sum_i q_i^{(n)} \mathbf{v}_i^{(n)}(t) [\mathbf{x}_i^{(n)}(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] \rangle
\end{aligned}$$

donde la corriente macroscópica esta definida como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \langle \bar{\mathbf{j}}_f(\mathbf{x}, t) \rangle + \left\langle \sum_n q_n \mathbf{v}_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right\rangle .$$

Notemos que

$$\nabla \times [\mathbf{v}_n(t) \times \mathbf{p}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] = \mathbf{v}_n(t) [\mathbf{p}_n(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] - \mathbf{p}_n(t) [\mathbf{v}_n(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] ,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \\
&+ \nabla \times \langle \sum_n \mathbf{p}_n(t) \times \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle \\
&- \langle \sum_n \sum_i q_i^{(n)} \mathbf{v}_i^{(n)}(t) [\mathbf{x}_i^{(n)}(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] \rangle
\end{aligned}$$

Definamos ahora el momento magnético molecular (evaluado por ejemplo utilizando una formulación cuántica)

$$\mathbf{m}_n(t) = \sum_i \frac{q_i^{(n)}}{2c} \mathbf{x}_i^{(n)}(t) \times \mathbf{v}_i^{(n)}(t)$$

y la magnetización macroscópica como

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_n \mathbf{m}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right\rangle = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda^3} dy^3 \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t) - y) \mathbf{m}_n(t) ,$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\nabla \times [\mathbf{m}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] &= -\mathbf{m}_n(t) \times \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \\
&= \sum_i \frac{q_i^{(n)}}{2c} \mathbf{x}_i^{(n)}(t) [\mathbf{v}_i^{(n)}(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] - \sum_i \frac{q_i^{(n)}}{2c} \mathbf{v}_i^{(n)}(t) [\mathbf{x}_i^{(n)}(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)]
\end{aligned}$$

y usando un argumento similar al usado anteriormente para la contribución de \mathbf{M} en \mathbf{A} , podemos finalmente escribir

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \\
&+ c \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \\
&+ \nabla \times \langle \sum_n \mathbf{p}_n(t) \times \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle
\end{aligned}$$

Asumiendo que el material no tiene un movimiento neto ($v_n = 0$), podemos concluir que a primer orden

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

De la misma forma, la segunda ecuación de Maxwell en su formulación macroscópica es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esta derivación ha incluido la dependencia temporal de las variables para hacerla consistente con el caso dinámico. Notemos que en ese caso la ecuación de Maxwell sería

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

con

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

Es importante darse cuenta que \mathbf{B} es el campo que sienten las partículas en la fuerza de Lorenz.

Notemos que con las definiciones

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t)) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_n q_n \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t))$$

podemos ver que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

No es difícil de demostrar que nuestra derivación “un poco mas correcta” mantiene esta condición a todo orden y por lo tanto las ecuaciones de Maxwell en el material garantizan esta relación entre las corrientes y las cargas. Claro que para el caso electrostático la condición es $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

5. Condiciones de borde y solución

Las ecuaciones de Maxwell para la magnetoestática en un material son

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

Asumiendo la misma construcción del primer capítulo tenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}\end{aligned}$$

La densidad de corriente superficial (como discontinuidad) esta definida como

$$\mathbf{K} = \lim_{dh \rightarrow 0} \int \mathbf{J} dh$$

Aún cuando $\mathbf{K} = 0$, hay una densidad corriente de la magnetización superficial en el borde entre los dos medios, y está dado por

$$\mathbf{K}_m = -c(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Todavía necesitamos una relación entre \mathbf{H} y \mathbf{B} .

1. **Caso 1:** Si asumimos que el medio es lineal, tenemos un medio diamagnético

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= \lambda_M \mathbf{B}\end{aligned} \rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}$$

2. **Caso 2:** Un imán permanente

$$\mathbf{M} = \text{constante}$$

3. **Caso 3:** Para materiales ferromagnéticos, en los cuales tenemos *hysteresis*, podemos describir

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H})$$

En cada caso podemos resolver los problemas como lo habíamos hecho hasta ahora, pero con la densidad de corriente apropiada afectada por la contribución de los dipolos.

5.1. Método general

El problema general es

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

con

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

En general necesitamos especificar la dependencia de $\mathbf{M}(\mathbf{B})$. Dado que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, y asumiendo el Gauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, podemos escribir

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - 4\pi\nabla \times \mathbf{M}$$

lo cual se debe de resolver con las condiciones de borde apropiadas.

5.2. Caso $J = 0$, por potencial escalar

Para el caso $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (con $\mu = const$), podemos introducir un potencial escalar

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla\Phi$$

con lo cual tenemos la ecuación

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Para casos donde μ o \mathbf{M} dependen del espacio o de los campos, entonces tenemos que resolver un problema más complicado.

Problema: Una esfera de radio a y $\mu = const$ en un campo \mathbf{B} asintótico $\mathbf{B} = B_o\hat{z}$.

Notemos que en general μ depende de la posición. En particular en la interfase tenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0 \quad \rightarrow \quad \mu\nabla^2\Phi + \nabla\mu \cdot \nabla\Phi = 0$$

Esto garantiza que Φ es continuo cruzando la interfase. Además, en la dos regiones (no en el borde) tenemos $\mu = const$, por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Dado que $\mathbf{H}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}_o$ tenemos $\Phi(r \rightarrow \infty) = -B_o z = -B_o r \cos\theta$, y la expansión

$$\Phi_{in} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\Phi_{out} = -B_o r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Notemos que μ no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para B_r y H_{θ}

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ -\mu \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \Phi_{in} &= -\left[\frac{3}{\mu+2} \right] B_o r \cos \theta \\ \Phi_{out} &= -\left[1 + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3} \right] B_o r \cos \theta \end{aligned}$$

En vez de la continuidad de los campos tangenciales hemos utilizado la continuidad de Φ .

En términos de los campos tenemos

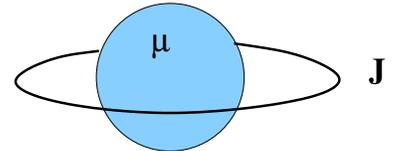
$$\mathbf{H}_{in} = \left[\frac{3}{\mu+2} \right] \mathbf{B}_o$$

$$\mathbf{H}_{out} = B_o + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{B}_o - 3(\mathbf{B}_o \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}}]$$

El campo dentro de la esfera es un campo magnético constante proporcional a \mathbf{B}_o , mientras que el campo de afuera tiene también una contribución de un campo de dipolo magnético con momento

$$\mathbf{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 \mathbf{B}_o \quad \rightarrow \quad \mathbf{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \mathbf{B}_o$$

Problema: Considere una esfera de radio a de material polarizable con constante μ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio $b > a$ en la cual fluye una corriente constante $\mathbf{J} = J_o \hat{\phi}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



Primero escribamos el potencial vector $\mathbf{A} = A_o \hat{\phi}$ para el anillo en todo el espacio, con

$$A_o = \frac{4\pi I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} |C_{\ell}^1|^2 P_{\ell}^1(0) P_{\ell}^1(\cos \theta)$$

donde ahora $r_> = \text{Max}[r, b]$ y $r_< = \text{Min}[r, b]$. Dado que

$$P_\ell^1(0) = \begin{cases} (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{(\ell+1)!}{2^\ell \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} & \ell \text{ impar} \\ 0 & \ell \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto supongamos $\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta) \hat{\phi}$ y para $r \neq b$ tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi = 0$$

Con lo cual podemos plantear la solución

$$A_\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} |C_{\ell,1}|^2 P_\ell^1(0) P_\ell^1(\cos \theta) \begin{cases} a_\ell r^\ell & r < a \\ \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} + \frac{a^\ell b_\ell}{r^{\ell+1}} & r > a \end{cases}$$

Utilizando las condiciones de borde de continuidad

$$a_\ell a^\ell = \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} + \frac{a^\ell b_\ell}{a^{\ell+1}}$$

Usando

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[r \frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \hat{r} - r \sin \theta \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta} \right]$$

con $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ y dado que no hay corriente superficiales, tenemos

$$\mu \left. \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right|_{r=a-} = \left. \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right|_{r=a+}$$

que es equivalente a

$$\mu a_\ell (\ell+1) a^\ell = (\ell+1) \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} - \ell \frac{a^\ell b_\ell}{a^{\ell+1}}$$

De estas relaciones podemos resolver a_ℓ y b_ℓ , y también calcular el campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Problema: Una esfera de radio a con magnetización $\mathbf{M} = M_o \hat{\mathbf{z}}$ constante.

Notemos que en general μ depende de la posición. En particular en la interfase tenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 4\pi\nabla \cdot \mathbf{M}$$

Esto garantiza que Φ es continuo cruzando la interfase. Además, en la dos regiones (no en el borde) tenemos $\mu = const$, por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Dado que $\mathbf{H}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}_o$ tenemos $\Phi(r \rightarrow \infty) = -B_o z = -B_o r \cos \theta$, y la expansión

$$\begin{aligned} \Phi_{in} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \Phi_{out} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

Notemos que M no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para B_r y H_{θ}

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= 0 \\ -\frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \left[-\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{r}} \Big|_{r=a} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \Phi_{in} &= \frac{4\pi}{3} M_o r \cos \theta \\ \Phi_{out} &= \frac{4\pi}{3} M_o \frac{a^3}{r^3} r \cos \theta \end{aligned}$$

Notemos el signo positivo en la expresión del componente radial de \mathbf{B} ya que la normal en $r < a$ apunta hacia adentro de la caja. En vez de la continuidad de los campos tangenciales hemos utilizado la continuidad de Φ .

En términos de los campos tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{in} &= 4\pi\mathbf{M} \\ \mathbf{H}_{out} &= 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}}] \end{aligned}$$

y el campo magnético es

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{in} &= 8\pi\mathbf{M} \\ \mathbf{B}_{out} &= 4\pi\frac{a^3}{r^3}[\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}}]\end{aligned}$$

Es interesante notar que hay otras formas de resolver este mismo problema. Por ejemplo dado que tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot [\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 4\pi\nabla \cdot \mathbf{M}$$

podemos escribir el potencial como

$$\Phi = - \int_{\Omega} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

donde la integral es en todo el espacio. Notemos que para la esfera tenemos

$$\mathbf{M} = M_o \hat{\mathbf{z}} \theta(a - r)$$

con

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_o \frac{\partial}{\partial z} \theta(a - r) = -M_o \delta(a - r) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta(a - r)$$

Esto implica que obtenemos el mismo resultado anterior

$$\begin{aligned}\Phi &= M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \int_0^{\infty} r_y^2 dr_y \delta(r_y - a) \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y \cos \theta_y Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) \\ &= \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta\end{aligned}$$

ya que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi)$$

Si \mathbf{M} es suave y localizado, podemos usar

$$\nabla_x \cdot \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad 0 = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \nabla_y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

para escribir

$$\Phi = -\nabla_x \cdot \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

donde $\bar{\Omega}$ corresponde a la region donde $\mathbf{M} \neq 0$.

Si la magnetización puede ser considerada como discontinua en la superficie podemos escribir tambien

$$\Phi = - \int_{\bar{\Omega}} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \oint_{\delta\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y$$

ya que la expresión anterior para el caso de una esfera se puede re-escribir como

$$\nabla_y \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta(a - \xi)$$

con ξ como la variable que parametriza el borde de magneto. Para el caso de la esfera tenemos el mismo resultado anterior

$$\begin{aligned} \Phi &= M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) a^2 \frac{r_{>}^{\ell}}{r_{<}^{\ell+1}} \int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y (\hat{\mathbf{z}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}_y) Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) \\ &= \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \end{aligned}$$

Este problema también se puede resolver en términos del vector potencial \mathbf{A} ya que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

lo que tiene como solución

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

en el Gauge de Coulomb. Donde la integral es sobre todo el espacio Ω .

Si \mathbf{M} es suave y localizado, entonces podemos escribir

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

Si hay una discontinuidad podemos escribir

$$\mathbf{A} = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \oint_{\delta\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS$$

por la misma razón anterior.

Problema: Calcular el campo magnético producido por un magneto permanente dentro de una cavidad conductora.

Las condiciones de borde en el conductor son

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Si en el conductor perfecto podemos asumir que las cargas se moverán libremente para forzar que no hayan campos dentro de este, podemos entonces decir que

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Por lo tanto el campo magnético normal $\mathbf{B}_{\perp} = 0$ en el borde. Ahora la segunda condición no es muy satisfactoria, ya que sabemos que si la conductividad es alta, pero finita, entonces la corriente superficial eventualmente se debería disipar tal que $\mathbf{K} \rightarrow 0$. Por lo tanto, la condición

$$\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

se da por lo general en una situación tiempo dependiente, donde tenemos un forzamiento que mantiene $\mathbf{K} \neq 0$. Osea, esta condición de borde depende de la historia del proceso que crea la configuración final. De la misma manera, si la conductividad es grande, pero finita, entonces

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

y por lo tanto tenemos que resolver el problema como un problema tiempo dependiente, ya que vamos a necesitar otra ecuación que relacione \mathbf{E} con \mathbf{B} (la ecuación de Faraday).

Notemos que el campo magnético terrestre tiene un campo magnético estático, aproximadamente dipolar, sobre su superficie, y por lo tanto el campo magnético no es cero dentro de la tierra, a pesar

de que la conductividad es bastante alta. En este caso las condiciones de borde son, dado que no tenemos corriente en la superficie,

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$$

Problema: Pongamos media esfera de radio R hecha de un magneto permanente sobre un muy buen conductor. Encuentre el campo magnético en toda todo el espacio. Cual es la fuerza que siente el magneto?

Problemas interesantes:

1. Qué cambiaría si dejamos el problema ser en dos dimensiones, e.g. el problema de una línea de corriente en la dirección z?
2. Incluyendo una cavidad cilíndrica dieléctrica.
3. Una vela espacial magnética

6. Energía

Para un grupo de partículas, tenemos la ecuación de Newton

$$\frac{dm_i \dot{\mathbf{x}}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$$

Multiplicando esta ecuación por la velocidad obtenemos la conservación de energía

$$\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{dm_i \dot{\mathbf{x}}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} \right) = \sum_{j \neq i} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i}^{int} + \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{ext}$$

Si también requerimos que la fuerza entre dos partículas sea conservativa, el potencial satisface

$$\frac{dU(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)}{dt} = \frac{\partial U(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_j} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j + \frac{\partial U(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = -\dot{\mathbf{x}}_j \mathbf{F}_{i,j} - \dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{F}_{j,i}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} \right) &= \sum_{i \neq j} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{ext} \\
&= \left[\sum_{j>i} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{j<i} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} \right] + \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{ext} \\
&= \left[\sum_{j>i} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{i<j} \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{F}_{i,j} \right] + \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{ext} \\
&= -\frac{d}{dt} \left[\sum_{j>i} U_{i,j} \right] + \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{ext}
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos el principio de conservación de energía

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{ext}$$

con la definición

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} \quad U = \sum_{j>i} U_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{i,j}$$

El cambio en energía $E = T + U$ es el trabajo hecho por las fuerzas exteriores. También tenemos

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{x}}_i'^2}{2}$$

y la energía puede ser descompuesta en la energía del centro de masa y la energía con respecto a él.

6.1. Energía eléctrica

En el caso de una fuerza eléctrica externa (estática) en el espacio vacío, tenemos que el cambio en la energía está dado por

$$W = - \int_A^B \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \nabla \Phi_E \cdot d\mathbf{l} = q(\Phi_B - \Phi_A) \quad \rightarrow \quad \int \rho(x) \Phi(x) d^3x$$

esto es independiente del camino tomado, es decir, la fuerza es conservativa.

6.1.1. En un espacio vacío

Por lo tanto, el trabajo hecho en traer una carga desde el infinito es solo q veces el potencial escalar. Luego, trayendo un número de partículas desde el infinito en cantidades infinitesimales, tenemos que el trabajo hecho por las partículas internas está dado por

$$U = \sum_{j>i} U_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d^3x = -\frac{1}{8\pi} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x = \frac{1}{8\pi} \int |E|^2 d^3x$$

Las últimas integraciones fueron hechas sobre todo el espacio por partes. Hay una contribución de “energía propia” que está presente en las distribuciones continuas que no están presentes en la representación discreta. Cuidado debemos tener en la cuenta de la contribución de la “energía propia” en cualquier cálculo.

Para un sistema de conductores, cada uno con un potencial V_i y carga Q_i , en espacio vacío, el potencial depende linealmente de la carga Q_j (representa un factor geométrico), y

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_j C_{i,j} V_j \\ V_i &= \sum_j p_{i,j} Q_j \end{aligned} \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_i C_{ij} V_j$$

Las C_{ii} son las capacitancias, y $C_{i,j}$ son los coeficientes de inducción.

6.1.2. Expansión de dipolo

Ponemos una densidad de carga ρ en un campo externo descrito por Φ , calculamos la energía como

$$U = \int \rho \Phi d^3x$$

note que el factor $1/2$ no se aplica aquí debido a que el campo es externo.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \left[\frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot \mathbf{E} \right] \dots$$

$$U = q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} Q_{i,j} \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots$$

ya que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ para un campo externo. La contribución del cuadrupolo a la energía es de particular interés en la física nuclear.

Por lo tanto, la energía de los dos dipolos interactuantes es

$$U_{1,2} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario del dipolo 1 al dipolo 2.

6.1.3. En un medio presente

Hasta ahora hemos usado la relación lineal para W en el espacio vacío. Esta condición de linealidad no es muy clara en el caso general, y es mejor aproximar el problema desde el punto de vista del campo. En particular, la energía fue calculada trayendo la carga desde el infinito por pequeñas cantidades al mismo tiempo y sumando las contribuciones, luego

$$\delta W = \int \delta \rho \Phi d^3x = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot (\delta \mathbf{D}) \Phi d^3x = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d^3x$$

Ahora integramos $\delta \mathbf{D} : \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{D}$

$$W = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \rightarrow \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d^3x$$

Hemos usado que $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, y la última expresión es verdadera solo si el medio es lineal, y recuperamos el resultado lineal. En general, la integral de arriba puede depender de la historia del proceso (*hysteresis*) y puede ser muy complicado. Comparando este resultado con el que teníamos, concluimos que esta no-linealidad aparece en un proceso no local.

Notemos que la energía depende de la historia. Como traemos carga del infinito, debemos ser cuidadosos si mantenemos los conductores a V o Q constantes. Si requerimos mantener estos valores constantes, entonces debemos trabajar moviendo cargas hacia afuera y hacia adentro, para mantener la constancia en los conductores.

6.2. Energía magnética

Supongamos que tenemos una lenta variación de un campo externo B ,

$$B_i(x) = B_i(0) + (\mathbf{x} \cdot \nabla) B_i(0) + \dots$$

tenemos

$$\begin{aligned}
F_i &= \frac{1}{c} \left[\int \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x \right]_i \\
&= \frac{1}{c} \varepsilon_{i,j,k} \int [J_j B_k(0) + J_j x_\ell \partial_\ell B_k] d^3x \\
&= \frac{1}{c} \varepsilon_{i,j,k} (\mathbf{m} \times \nabla)_j B_k
\end{aligned}$$

donde hemos usado la definicion anterior

$$(\mathbf{m} \times \nabla)_j = \frac{1}{c} \int J_j x_\ell d^3x \partial_\ell$$

Por lo tanto

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

donde hemos asumido que $\partial_i m_k = 0$. Podemos observar que la energía potencial puede ser definida como

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

lo cual está bien, excepto que el trabajo debe ser hecho en traer esta configuración al lugar (desde el infinito) ya que se requiere mantener \mathbf{J} que produce \mathbf{M} . Este período transiente debe ser estudiado en el formalismo del próximo capítulo con campos dependientes del tiempo. Por lo tanto, la energía magnética depende del camino tomado a la contribución en el caso general.

Un análisis similar puede ser hecho para el torque neto

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x} \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] d^3x \quad \rightarrow \quad \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(0)$$

para un campo externo.

7. Modelos de materiales

En general ϵ y μ pueden ser tensores. El caso mas claro es cuando hay un campo magnético constante presente. En ciertas situaciones es posible resolver por estos tensores.

7.1. Modelos simples de ϵ y μ

Problema El oscilador armónico. Si ponemos un campo eléctrico constante

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_o^2\mathbf{r} + q\mathbf{E}$$

Normalizando este problema, podemos re-definir el tiempo como $\tau = \omega_o t$, y nos queda la ecuación de movimiento

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \frac{q}{\omega_o^2 m} \mathbf{E}$$

Es posible encontrar la solución general a este problema como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_o \cos(\omega_o t) + \frac{\mathbf{v}_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) + \frac{q}{m\omega_o^2} \mathbf{E} (1 - \cos(\omega_o t))$$

$$z(t) = \left[\frac{q}{\omega_o^2} \right] E_z + z_o \cos \omega_o t + \frac{v_{z_o}}{\omega_o} \sin \omega_o t$$

y por lo tanto podemos encontrar el tensor macroscópico

$$\mathbf{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} nq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(\tau) d\tau = \left[\frac{nq^2 \mathbf{E}}{m\omega_o^2} \right]$$

con

$$\lambda = \frac{nq^2}{m\omega_o^2}$$

De la misma forma si aplicamos un campo magnético constante

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_o^2\mathbf{r} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

Nuevamente es posible re-escalar las ecuaciones de movimiento como

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \times \left(\frac{q\mathbf{B}}{\omega_o mc} \right)$$

Es posible encontrar la solución general a este problema. Al calcular la magnetización

$$\mathbf{M} = \lim_{T \rightarrow \infty} n \frac{1}{T} \int_0^T \frac{q}{2c} \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} d\tau$$

encontramos que \mathbf{M} es lineal con \mathbf{B} , y que μ es diagonal, pero depende de las condiciones iniciales. Esto significa que necesitamos tomar un promedio extra sobre las distribuciones de partículas. Podemos encontrar, asumiendo isotropía ($x_i^2 = r_o^2/3$ y $v_i^2 = v_o^2/3$), que μ es

$$\mu_{i,j} = \frac{nq^2}{10mc^2\omega_o} \left[\frac{2}{3}r_o^2 - \frac{2}{3m\omega_o^2}mv_o^2 + \frac{1}{m\omega_o}L_i \right] \delta_{i,j}$$

Para el caso de un tomo tenemos

$$v_o = \omega_o r_o$$

y usando $L_x = L_y = L_z = L$, podemos encontrar

$$\mu = \frac{nq^2}{10m^2c^2\omega_o^2}L$$

Si pensamos en la foto clásica de un electrón alrededor de un núcleo sin un campo eléctrico, el campo combinado es cero fuera del átomo en el sentido tiempo promedio. Un campo eléctrico impuesto deforma la órbita circular generando un campo dipolo red lejos del átomo.

Problema: Tomemos el problema de un electrón en una fuerza central

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Qq}{r^3}\mathbf{r}$$

Calcule los tensores ϵ y μ a primer orden en $|E|$ y $|B|$ promediados en forma apropiada. Notemos que acá tenemos que promediar también en la orientación de la elipse.

Tomemos el modelo clásico de un electrón en una orbita circular alrededor de un núcleo, dado por un potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

con la ecuación de movimiento en el plano $x - y$. El momento angular es $\mathbf{L} = p_\theta \hat{\mathbf{z}}$. En el plano la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{\rho} = -V'(\rho) \quad \rightarrow \quad V(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\theta^2}{2\mu\rho^2}$$

La orbita circular en el plano esta dada por

$$V'(\rho_o) = 0$$

con

$$\rho_o = \frac{p_\theta^2}{km} \quad \dot{\theta}_o = \frac{p_\theta}{m\rho_o^2}$$

Esto define el vector

$$\boldsymbol{\rho}_o = \rho_o \cos(\dot{\theta}_o t) \hat{\mathbf{x}} + \rho_o \sin(\dot{\theta}_o t) \hat{\mathbf{y}}$$

Si perturbamos la orbita circular

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}_o + [x(t), y(t), z(t)]$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{k}{2m\rho_o^3} \left[x + 3 \cos(2\dot{\theta}_o t) x + 3 \sin(2\dot{\theta}_o t) y \right] + \frac{q}{m} \mathbf{E}_x \\ \ddot{y} &= \frac{k}{2m\rho_o^3} \left[y + 3 \sin(2\dot{\theta}_o t) x - 3 \cos(2\dot{\theta}_o t) y \right] + \frac{q}{m} \mathbf{E}_y \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{mr_o^3} z + \frac{q}{m} \mathbf{E}_z \end{aligned}$$

al cual le hemos agregado un campo eléctrico uniforme.

7.2. Modelos Estadísticos de ϵ y μ

En general, cuando tenemos muchas partículas en el sistema, es preferible utilizar un método estadístico para encontrar valores par ϵ y μ

Dada una ecuación de energía, llamado un Hamiltoniano, veremos luego que la función de distribución de equilibrio puede ser escrita en términos del Hamiltoniano, y está dado en la forma canónica como

$$f(x, p) = \frac{e^{-\beta H}}{\int e^{-\beta H} dx dp}$$

de la cual podemos definir el valor esperado para cualquier variable dinámica o función

$$\langle F \rangle = \frac{\int e^{-\beta H} F(x, p) dx dp}{\int e^{-\beta H} dx dp}$$

usando una descripción para H construiremos un modelo para materiales eléctricos y magnéticos.

Problema: Tomemos un Hamiltoniano del oscilador armónico con la presencia de un campo eléctrico, luego

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_o^2 x^2 - eEz$$

$$P = N \langle p_{pol} \rangle = N \langle ez \rangle = \frac{Ne^2}{m\omega_o^2} E$$

pero las partículas pueden bajar su energía reorientándose hacia el campo

$$H = H_o - \mathbf{p}_o \cdot \mathbf{E} = H_o - p_o E_o \cos \theta$$

$$P = N \langle p_{pol} \rangle = N \langle p_o \cos \theta \rangle \simeq \frac{1}{3} \frac{p_o^2}{kT} E_o$$

7.3. Modelos simples de magnetización

Como vimos abajo, la energía de una colección de N spins puede ser escrita como

$$H = \sum_i \mathbf{h} \cdot \mathbf{s}_i + \sum_{i,j} J_{i,j} \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_i$$

con H como la energía o el Hamiltoniano y J como la interacción entre los spins, el cual es en general una interacción de dipolo que decae como r^{-3} . Usando un rango corto de interacción dando solamente a los vecinos más cercanos contribución, tenemos

$$\mathbf{M}(h, \{s_i\}) = \frac{\int e^{-\beta H} \sum_i \mathbf{s}_i dx dp}{\int e^{-\beta H} dx dp}$$

Esta formula puede generar interesantes dinámicas, transiciones de fase, etc. La transición de fase no se convierte hasta que vamos en dimensiones más altas (el modelo en dos dimensiones *ising* de Onsager). Usando una aproximación mala del campo en una dimensión en “equilibrio” según la mecánica estadística, tenemos

$$H = \sum_i (\mathbf{h} + J \langle \mathbf{s} \rangle) \cdot \mathbf{s}_i = \sum_i (\mathbf{h} + JNM) \cdot \mathbf{s}_i$$

$$M_z(h, \{s_i\}) = \langle \sum_i s_{z,i} \rangle = \frac{\int e^{-\beta H} \sum_i s_{z,i} dx dp}{\int e^{-\beta H} dx dp} = N \tanh[(h + JNM)\beta]$$

el último resultado es obtenido asumiendo que s_z es discreto y puede tener valores 1,-1. Notemos que este problema implica resolver una ecuación trascendental, el cual se puede resolver por ejemplo usando un método de Newton para encontrar el cero de la función

$$g(M, \beta, b_o) = M - N \tanh[(b_o + JNM)\beta]$$

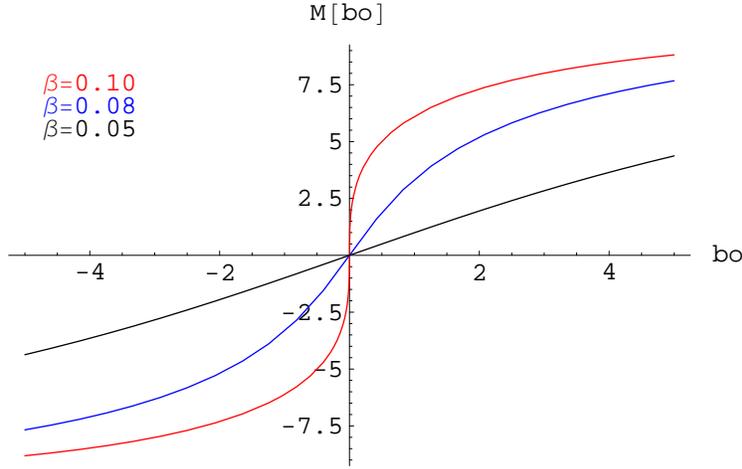


Figura 4: (a) Solución de M_z usando el campo medio en 1-D para diferentes temperaturas, para $N = 10$ y $J = 0,1$

De la Fig. 4a podemos observar el caso de paramagnético con $J > 0$, donde los espines se alinean con el campo. Aquí también observamos una transición de fase exactamente en el límite $\beta \rightarrow 0$. El caso de diamagnético $J < 0$, los espines se alinean con los vecinos. El caso ferromagnético, en el límite $B_o \rightarrow 0$, aun tenemos una magnetización si la temperatura $T < T_c$.

7.4. Método de MonteCarlo

En general tenemos que evaluar la integral de arriba en el equilibrio, consistente con fluctuaciones a cierta temperatura T . Tomemos el Hamiltoniano con $s=1,-1$, y podemos utilizar el método de monte Carlo para encontrar la magnetización en equilibrio con un baño termal. En cada instante t , tenemos la configuración $\{s_I^{(t)}\}$ con interacción vecino mas cercano. Repetir la siguiente receta para cada valor de $\beta = 1/T$ la temperatura

1. Tomar un spin al azar y hacer un flip en $x = \{s_I^{(t)}\}$
2. Calcular la energía $\Delta E = E(y) - E(x)$
3. $X=y$ si $\Delta E \leq 0$ o si $r < \exp(-\beta \Delta E)$, con r un numero al azar
4. Repetir N veces

Podemos entonces calcular la Magnetización $\langle s_I^{(t)} \rangle$ y repetimos para otros valores de T y B , estimando la curva $\mathbf{M}(\mathbf{T}, \mathbf{B})$. Se puede observar una transición de fase en 2D. En la Fig. 4b vemos como se da esta transición de fase para ciertos valores.

7.5. Dinámica de Espines

Hasta ahora hemos trabajado con situaciones en equilibrio, pero también podemos estar interesados en la dinámica de los espines. Para ello podemos asumir un modelo para un espín que puede orientarse en

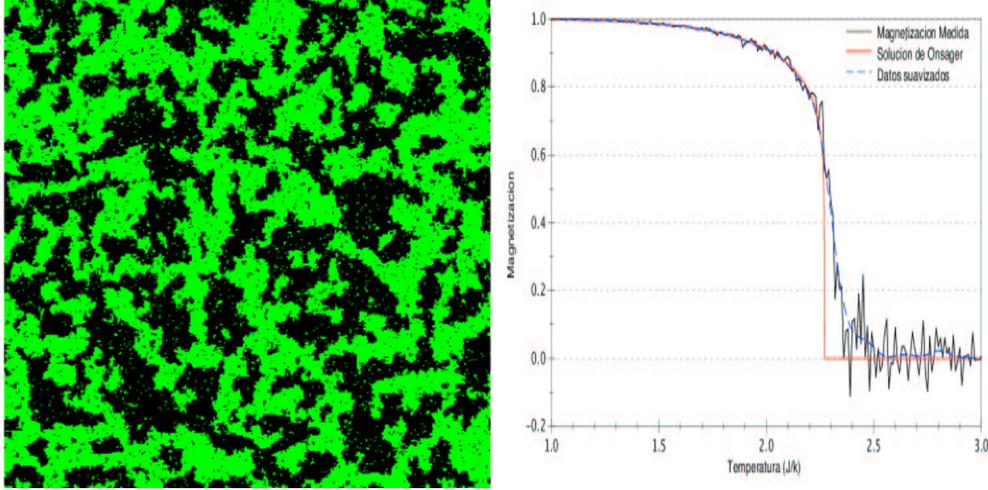


Figura 5: (a) Solución de Monte Carlo para el modelo de Ising (400x400) mostrando dominios claros para $T = 2$. (b) La magnetización como función de la temperatura, mostrando la transición de fase a temperatura finita. Hecho por Paul Blackburn.

por ejemplo 3 dimensiones. Utilizando la expresión canónica para la evolución de la variable, utilizando el paréntesis de Poisson, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = [\mathbf{S}_i, \mathbf{B}]$$

Esperamos ver cosas interesantes con este modelo, denominado de Heisenberg. Hasta donde yo se este es un problema interesante que puede dar origen a publicaciones.

Para el caso de orientación en 3 dimensiones, tenemos

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = J \sum_j \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j$$

y si usamos interacción con vecinos próximos se puede hacer la simulación. La temperatura se puede forzar desde los bordes.

8. Solución numérica

Hay una manera simple para resolver la ecuación para el potencial cuando incluimos dieléctricos

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Psi) = - = 4\pi\rho$$

Integrando sobre el volumen de una esfera de radio Δx , podemos encontrar que

$$\oint_{\partial\Omega} \epsilon \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx -\frac{4\pi}{\Delta} x \Delta y \Delta z \rho_{i,j,k}$$

con lo cual podemos estimar numéricamente la integral de superficie

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \epsilon \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \epsilon_{i+1/2,j,k} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}})_{i+1/2,j,k} + \epsilon_{i-1/2,j,k} (-\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}})_{i-1/2,j,k} \\ &+ \epsilon_{i,j+1/2,k} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}})_{i,j+1/2,k} + \epsilon_{i,j-1/2,k} (-\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}})_{i,j-1/2,k} \\ &+ \epsilon_{i,j,k+1/2} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{i,j,k+1/2} + \epsilon_{i,j,k-1/2} (-\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{i,j,k-1/2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}})_{i+1/2,j,k} &= \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{i+1/2,j,k} = \frac{\Psi_{i+1,j,k} - \Psi_{i,j,k}}{\Delta x} \\ (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}})_{i,j+1/2,k} &= \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{i,j+1/2,k} = \frac{\Psi_{i,j+1,k} - \Psi_{i,j,k}}{\Delta y} \\ (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{i,j,k+1/2} &= \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{i,j,k+1/2} = \frac{\Psi_{i,j,k+1} - \Psi_{i,j,k}}{\Delta z} \end{aligned}$$

Esto corresponde a la discretización a primer orden de la ecuación de arriba. Podemos resolver esto por relajación o por un método directo.

El caso de elementos finitos tenemos que minimizar el funcional

$$S[\Phi] = \int [(\epsilon \nabla \Phi)^2 + 4\pi \rho] dx$$

usando elementos finitos como describimos anteriormente.

El caso magnético se hace en forma similar.