

Capítulo 3: Variaciones temporales y las ecuaciones de Maxwell

En este capítulo discutiremos las ecuaciones del electromagnetismo con variaciones en el espacio y el tiempo.

Índice

1. Fuerza de Lorenz	3
2. La Ley de Inducción de Faraday	4
3. Materia y las ecuaciones de Maxwell	6
3.1. Ecuaciones de Maxwell	6
3.2. Condiciones de Borde	7
4. Transformaciones duales y monopolos magnéticos	7
5. Transformaciones de campos	8
5.1. Rotación	8
5.2. Inversión Espacial	9
5.3. Inversión Temporal	9
5.4. Cantidades Electromagnéticas	9
6. Energía y Teorema de Poynting	10
6.1. Ecuación de Energía	10
6.2. Energía Magnética	11
6.3. Ecuación del Momento	12
6.4. Campos Armónicos	13
7. Solución por potenciales	16
7.1. Gauge de Coulomb	16
7.2. Gauge de Lorentz	17
8. Soluciones para fuentes harmónicas	17
9. Solución Numérica de la ecuación de ondas	25
9.1. Propagación de Frentes	26

1. Fuerza de Lorenz

Las corrientes fueron una entidad misteriosa hasta que fueron descubiertas la conexión entre las cargas y las corrientes. Si definimos

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))\end{aligned}$$

claramente tenemos la ecuación de continuidad macroscópica

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0}$$

De dichas relaciones obtenemos además

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}_i, t) + q \left[\frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i, t) \right]$$

Es importante notar que los campos que siente una particular cargada es \mathbf{E} y \mathbf{B} , los cuales incluyen todas las cargas en el material. Mientras que \mathbf{D} y \mathbf{H} son los campos producidos por las distribuciones de carga y corrientes libres (netas) promediadas en una escala espacial y temporal.

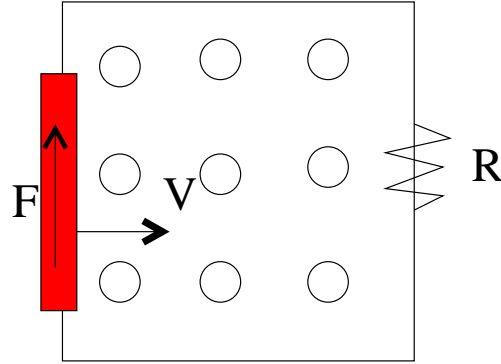


Figura 1: Conductor en un campo magnético

Supongamos que tenemos un conductor que se mueve en un campo magnético uniforme; entonces las cargas libres en el conductor sienten una fuerza que es proporcional a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. En el fondo dicha fuerza genera un campo eléctrico “efectivo” $\bar{\mathbf{E}}$ en el conductor. Asumiendo una transformación Galileana, re-escribimos la ecuación de arriba para un sistema de referencia moviéndose con el conductor, obteniendo

$$\mathbf{F} = q\bar{\mathbf{E}} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{E}} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]$$

Esto demuestra que los campos se transforman de una manera no trivial (esta observación nos llevara a la teoría de la relatividad y a una formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell). Por lo tanto es de esperarse que la relación general es

$$\mathbf{F} = q\bar{\mathbf{E}} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]$$

cuando hay campos eléctricos y magnéticos en el sistema inicial. Lo cual se ha comprobado en un sinnúmero de experimentos para velocidades pequeñas. Aun falta lo que pasa para $\bar{\mathbf{B}}$, pero esto lo estudiaremos en el capítulo de relatividad.

2. La Ley de Inducción de Faraday

Faraday (~ 1830) observó el comportamiento de un circuito eléctrico en el tiempo cambiando los campos magnéticos. El observó que se generaba un transiente de corriente en el circuito si

- La corriente de un circuito aledaño era prendida o apagada
- Un circuito adyacente, con una corriente fija, se movía respecto al primer circuito
- Un magneto permanente se ponía dentro o fuera del circuito

La relación derivada para la diferencia de potencial mostrada en el diagrama es

$$|\bar{E}L| = \left| \frac{v}{c} B_0 L \right|$$

las cuales se pueden relacionar con integrales de superficie y de linea, para el caso menos homogéneo, como

$$\oint_{\partial S(t)} \bar{\mathbf{E}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS$$

recordando que el borde de la superficie esta orientada de tal forma que $d\boldsymbol{\ell}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ satisfacen la regla de la mano derecha. Esto quiere decir que si \mathbf{B}_o es paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$ y por lo tanto sale del plano en la figura, entonces $\bar{\mathbf{E}}$ y $d\boldsymbol{\ell}$ están en la misma dirección. Esta derivada completa es exactamente el resultado relevante (y experimental), y tiene sentido si notamos que el área del circuito de la figura cambia como

$$\frac{dA}{dt} = -vL$$

Estas son las observaciones de Faraday, que pueden ser resumidas como

$$\epsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

con las definiciones

$$\Phi = \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \epsilon = \oint_{\delta C} \bar{\mathbf{E}} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Con Φ como el flujo magnético que cruza el circuito cerrado. ϵ es la fuerza electromotriz o la integral de línea del campo eléctrico $\bar{\mathbf{E}}$ que rodea el circuito. El campo $\bar{\mathbf{E}}$ es, para el sistema de referencia en reposo, un elemento $d\boldsymbol{\ell}$ del circuito C. La constante de proporcionalidad c^{-1} depende de las unidades definidas por las leyes de Coulomb y Ampère, y puede ser obtenida por un argumento similar al usado arriba para una transformación Galileana. El signo (-) es consistente con la ley de Lenz, que dice que la corriente inducida está en una dirección que se opone al cambio de flujo en el circuito.

Notemos que tenemos

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

donde \mathbf{v} es constante durante la diferenciación. Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \oint_{\partial S(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Esto nos permite re-escribir la ley de Faraday con los campos en el mismo sistema de referencia

$$\int \left[\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

Dado que la superficie es en principio arbitrario, tenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Con esta relación podemos completar las ecuaciones de Maxwell, propuestas por él mismo en 1865, como

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

El ultimo termino de la ecuación de Ampère fue derivado en el capitulo 1 y es necesario para hacer las ecuaciones consistentes con la descripción microscópica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

La ley de fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]$$

En muchas situaciones, también incluiremos la ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma \bar{\mathbf{E}} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

que relacione la corriente y el campo eléctrico. Veremos más de esto más adelante.

3. Materia y las ecuaciones de Maxwell

En el capítulo 2 derivamos que en la presencia de materiales tenemos

$$\langle \bar{\rho}(x, y) \rangle = \rho(x, y) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial^2 Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots$$

con lo cual podemos definir

$$D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha - 4\pi \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots$$

También encontramos que en el caso que $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$ (el sistema completo puede moverse con velocidad constante \mathbf{v}), entonces

$$B_\alpha = H_\alpha + 4\pi M_\alpha + \left[(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right]_\alpha$$

el último término es usualmente pequeño, cuando

$$\frac{v}{c} \ll 1$$

3.1. Ecuaciones de Maxwell

Estos resultados se mantienen en el caso de variaciones temporales. Al aplicar nuestro promediado a la ecuación microscópica

$$\langle \nabla \times \mathbf{e} \rangle = -\frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle$$

obtenemos la representación macroscópica de la ecuación de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell son a primer orden

$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

En muchos casos podemos asumir que tenemos un material lineal como en el capítulo 2. Se debe tener cuidado en considerar las variaciones en las temperaturas y en las densidades. Por lo tanto, el análisis

directo requiere el uso de conceptos de mecánica estadística, y la descripción tensorial es un poco más complicada.

3.2. Condiciones de Borde

Podemos estudiar nuevamente las condiciones de borde para las, ahora completas, ecuaciones de Maxwell. Para un borde inmóvil, tenemos lo que teníamos antes

$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$	$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$
$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$	$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$

Para una interfase en movimiento, con velocidad \mathbf{v} , usamos la transformación

$$\int_S \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \rightarrow \int_{S(t)} \left[\frac{d\bar{\mathbf{D}}[\mathbf{x}(t), t]}{dt} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Debido a que en el sistema S , \mathbf{D} no cambia en el tiempo. Mientras que en el sistema $S(t)$, la integral debe cambiar debido a el movimiento de S . Entonces, tenemos

$$\int_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{D} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Notemos que no tomamos derivadas con respecto a \mathbf{v} . Entonces, las condición de borde para los campos, visto en el sistema del laboratorio, para la interfase en movimiento, es

$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$	$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$
$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$	$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$

4. Transformaciones duales y monopolos magnéticos

Supongamos que incluimos una carga magnética y corriente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_m & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Podemos hacer la siguiente transformación, con ξ real,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \bar{\mathbf{E}} \cos \xi + \bar{\mathbf{B}} \sin \xi & \mathbf{B} &= -\bar{\mathbf{E}} \sin \xi + \bar{\mathbf{B}} \cos \xi \\ \rho_e &= \rho'_e \cos \xi + \rho'_m \sin \xi & \mathbf{J}_e &= \bar{\mathbf{J}}_e \cos \xi + \bar{\mathbf{J}}_m \sin \xi \\ \rho_m &= -\rho'_e \sin \xi + \rho'_m \cos \xi & \mathbf{J}_m &= -\bar{\mathbf{J}}_e \sin \xi + \bar{\mathbf{J}}_m \cos \xi \end{aligned}$$

que deja las ecuaciones de Maxwell invariantes. Esto también deja $\mathbf{E} \times \mathbf{B}, E^2 + B^2$ invariantes. Esto significa que es una asunto de conveniencia el hablar de carga eléctrica o magnética. Si todas las partículas tienen el mismo radio de carga eléctrica a magnética, podemos hacer una transformación dual para obtener $\rho_m = 0$ y $\mathbf{J}_m = 0$. Por el estudio de la mecánica cuántica de un electrón en presencia de un monopolo magnético, se puede demostrar que la consistencia de tal cuantización requiere

$$\frac{q_m q_e}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

así que la existencia de un monopolo magnético implica la cuantización de una carga eléctrica.

5. Transformaciones de campos

Ahora iremos a las leyes de transformación para los campos, esto nos servirá, por ejemplo, para construir relaciones tipo $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Estamos interesados en tres transformaciones en general.

Supongamos que realizamos una transformación de coordenadas que es, en general, no lineal. La pregunta es qué le pasa a las variables físicas

5.1. Rotación

Las coordenadas se transforman como vectores bajo un rotación

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\mathbf{x}$$

donde

$$\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}$$

Esto implica que $\det \mathbf{R} = \pm 1$. El producto cruz, se transforma de una forma especial, dada por

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} \times \mathbf{D} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{C}} = \det(R) \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}}$$

y por lo tanto \mathbf{C} se denomina un pseudo-vector. Notemos que el producto cruz da un -1 al hacer $x \rightarrow -x$. Por ejemplo, $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{p}$ se transforman como vectores y el momento angular como pseudo-vector.

El potencial electrostático sólo depende de la distancia entre dos puntos, y por lo tanto es invariante bajo rotaciones. Se le denomina un escalar

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}) = \psi(\mathbf{x})$$

Por ejemplo el producto escalar de dos vectores se transforma como un escalar.

Si una transformación del sistema transforma un campo como vector, entonces

$$\bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{R}\mathbf{V}(\mathbf{x})$$

Se puede definir la transformación de un vector.

5.2. Inversión Espacial

Supongamos que realizamos una transformación de coordenadas

$$\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$$

los vectores se transforman como vectores polares

$$\mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}}) = -\mathbf{V}(\mathbf{x})$$

o como pseudo-vectores(así como el producto cruz)

$$\mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{V}(\mathbf{x})$$

Un análisis similar se aplica a los escalares y los tensores. En general, un tensor de rango N se transforma con un factor $(-1)^N$, y un pseudo-tensor se transforma como $(-1)^{N+1}$.

5.3. Inversión Temporal

Supongamos que realizamos una transformación de coordenadas

$$\bar{t} = -t$$

La pregunta es cuando los tensores son pares o impares. Tomemos como ejemplo las ecuaciones de movimiento de Newton; son invariantes respecto a una reversión temporal si $\bar{t} = -t$ y $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, dado que

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -q \nabla \Psi \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 \bar{\mathbf{x}}}{d\bar{t}^2} = -q \bar{\nabla} \bar{\Psi}$$

5.4. Cantidades Electromagnéticas

Si decidimos que la carga debe ser un escalar bajo las 3 transformaciones. De las ecuaciones de Maxwell notamos que \mathbf{E} es un vector polar dado que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Por lo tanto podemos construir Tabla 1.

Table 1.

Cantidad	Transformación Rotación	Inversión Espacial	Inversión Temporal
$\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P}$	vector	impar	par
$\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{M}$	pseudo-vector	par	impar
\mathbf{J}	vector	impar	impar
$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi$	pseudo-vector	impar	impar

Supongamos que queremos encontrar $\mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B}_0)$ en una campo magnético constante. Entonces, los candidatos para la transformación de propiedades son de segundo orden en \mathbf{B}_0

$$\mathbf{P} = \lambda_0 \mathbf{E} + \lambda_1 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right) + \lambda_2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{E} + \lambda_3 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 + \dots$$

Si requerimos que, para bajas frecuencias, sólo las fuerzas eléctricas entren, entonces

$$\mathbf{P} = \lambda_0 \mathbf{E} + \lambda_1 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right) + \lambda_2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{B}_0 \right) \mathbf{B}_0 + \dots$$

Otra relación que es interesante es la relación de Ohm mas generalizada, que tiene

$$\lambda_o \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \eta_o \mathbf{J} + \lambda_1 (\mathbf{H} \times \mathbf{J}) + \dots$$

Este resultado incluye el comportamiento girotrópico y el efecto de Hall en los materiales y el plasma.

6. Energía y Teorema de Poynting

Comenzaremos mirando un sistema de partículas; tenemos

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

6.1. Ecuación de Energía

Si miramos las ecuaciones de fuerza, notaremos que las relaciones de energía pueden ser derivadas multiplicando por la velocidad (no-relativista). En este caso sólo el campo E da una contribución

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

En el caso de una distribución de carga continua, el trabajo efectuado por el campo es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [U_{mec}] &= \int_{\Omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left[c \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right] d^3x \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left[c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] d^3x \end{aligned}$$

Si asumimos que el material es lineal, podemos definir la energía electromagnética

$$U_{e\&m} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})] dx^3$$

Definiendo $U = U_{mec} + U_{e\&m}$ tenemos el principio de conservación de energía como

$$\frac{dU_{mec}}{dt} + \frac{dU_{e\&m}}{dt} = - \oint_{\delta\Omega} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}) ds$$

con

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

como el vector de Poynting. Dado que el volumen es arbitrario, podemos definir la densidad de energía electromagnética como

$$u_{e\&m} = \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}]$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{S}) = 0$$

6.2. Energía Magnética

Finalicemos la discusión acerca de la energía magnética. El término

$$W_m = \int \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{8\pi} d^3x$$

es la energía magnética en el campo. Podemos usar un simple argumento para notar que lo arriba escrito es, justamente, la energía magnética. Tomemos un pequeño “loop” de corriente de espesor $\Delta\sigma$ y área S . Si el flujo sobre el loop cambia, entonces la fuente debe hacer trabajo para mantener la corriente constante.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = -I\epsilon = \frac{I}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

Cuando un se realiza un cambio infinitesimal, tenemos

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi$$

Aquí asumimos que las corrientes son sumables, entonces $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. El incremento del trabajo realizado contra el emf inducido, es

$$\delta W = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{B}) ds = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_S [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})] ds = \frac{J\Delta\sigma}{c} \oint_{\delta S} \delta\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Cualquier distribución de la densidad de la corriente puede ser escrita como una suma de pequeños “loops” cómo éste. Entonces, como $\mathbf{J}\Delta\sigma\delta\boldsymbol{\ell} = \mathbf{J}d^3x$, tenemos

$$\delta W = \frac{1}{c} \int (\delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d^3x \quad \rightarrow \quad \delta W = \frac{1}{4\pi} \int (\delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d^3x$$

y para el caso de un material lineal, tenemos

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d^3x \quad \rightarrow \quad W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d^3x$$

Las expresiones de la derecha son para una distribución localizada de cargas.

Problema: Para el caso de N circuitos eléctricos, es posible demostrar que

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N L_n I_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} L_n M_{nm} I_m$$

donde L_n es la auto-inductancia y $M_{n,m}$ es la inductancia mutua entre pares de circuitos.

6.3. Ecuación del Momento

La suma de todos los momentos es

$$\frac{dP_{mec}}{dt} = \int_V \left[\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + (\text{otras fuerzas}) \right] d^3x$$

Ahora utilizaremos

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{D} \quad \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c} \mathbf{B} \times \mathbf{D} \right] + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{D} + \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})] \end{aligned}$$

Sumando el termino $\mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y después de un poco de álgebra, podemos encontrar que

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right] d^3x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} d^3x = \oint_{\delta\Omega} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

donde el tensor de stress de Maxwell es

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[E_{\alpha} D_{\beta} + B_{\alpha} H_{\beta} - \frac{1}{2} [(E \cdot D) + (B \cdot H)] \delta_{\alpha\beta} \right]$$

Además tenemos

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_{\beta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}}$$

con

$$[\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{\beta} = T_{\alpha\beta} \hat{n}_{\alpha}$$

Obtenemos el resultado que los campos electromagnéticos tienen un momento efectivo

$$\mathbf{P}_{E\&M} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

Es importante notar que esta expresión en materiales no es aceptada comúnmente, ya que intuitivamente es razonable pensar que $\mathbf{P}_{E\&M}$ debería estar relacionado con \mathbf{S} , y por lo tanto una expresión mas aceptada es

$$\mathbf{P}_{E\&M} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

Es posible derivar esta expresión directamente de la mecánica estadística, para el caso de medios lineales e isotropicos, notando que ϵ como μ dependen de la temperatura. Ahora, en el caso lineal, la primera expresión, se puede escribir como

$$\mathbf{P}_{E\&M} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_{E\&M} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{v_{ph}^2} \mathbf{S}$$

que muestra que en un material el momentum se desplaza con la velocidad de fase en el medio, lo cual sugiere que la primera expresión no esta tan equivocada.

Este momento electromagnético puede ser visto como presión radiativa. La NASA ha diseñado una nave espacial que puede ir lejos de la Tierra usando la presión radiactiva solar como un sistema de propulsión. Se debe tener cuidado, eso sí, para contrarrestar el efecto gravitacional.

6.4. Campos Armónicos

Asumamos que los campos tienen una dependencia temporal harmónica

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}]$$

Por lo tanto los productos los podemos evaluar como

$$\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \text{Re} [(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) e^{-2i\omega t}]$$

La última parte del producto desaparece si estamos interesados en promedios temporales.

Las ecuaciones de Maxwell para este caso particular son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - i\frac{\omega}{c}\mathbf{D} \end{aligned}$$

podemos calcular nuevamente el principio de conservación de energía como

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x + 2i\omega \int_{\Omega} (w_e - w_m) d^3x + \oint_{\delta\Omega} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = 0$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad w_e = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) \quad w_m = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*)$$

La parte real representa la conservación de energía, promediada en el tiempo. La parte imaginaria describe el flujo de energía entre los campos. Esta ecuación nos permite, además, definir la impedancia de un circuito.

Imaginemos un sistema electromagnético que es forzado por un voltaje oscilatorio V_i y una corriente I_i , que ingresan al circuito por una pequeña superficie S_i . La potencia que entra al sistema

$$\frac{1}{2} I_i^* V_i = - \int_{S_i} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds$$

y por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{2} I_i^* V_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x + 2i\omega \int_{\Omega} (w_e - w_m) d^3x + \oint_{\delta\Omega - S_i} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS$$

La integral de superficie es la potencia irradiada al infinito (una integral real), y a altas frecuencias, una importante componente del equilibrio de energía. La impedancia es definida como $Z = R - iX$, con $V_i = Z I_i$

$$R = \frac{1}{|I_i|^2} \left\{ \left[\int_{\Omega} \text{Re} (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x \right] + 2 \oint_{\delta\Omega - S_i} \text{Re} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \right\} + 4\omega \int_{\Omega} \text{Im}[w_m - w_e] d^3x$$

$$X = \frac{1}{|I_i|^2} \left\{ 4\omega \text{Re} \left[\int_{\Omega} (w_e - w_m) d^3x \right] - \int_{\Omega} \text{Im}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x \right\}$$

Notemos que en esta definición hemos asumido que ϵ , σ , y μ son reales (así $\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*$ son reales), aunque pueden representar medios no lineales (dependen de los campos) o anisotropicos (tensores). Mas adelante, cuando estudiemos óptica, veremos que esta es la forma apropiada de proceder.

Para bajas frecuencias, tenemos

$$R = \frac{1}{|I_i|^2} \int_{\Omega} \sigma |\mathbf{E}|^2 d^3x$$

$$X = \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_{\Omega} (w_m - w_e) d^3x$$

asumiendo la ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, con σ como un escalar real.

En general si no hay efectos de propagación en el circuito, y estamos interesados en la solución asintótica, la corriente entrante tiene la misma frecuencia que el voltaje entrante.

- Si tenemos una inductancia localizada, la dinámica esta regida por

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

entonces podemos ver que la inductancia esta relacionada con X donde la energía magnética domina

$$V = -i\omega LI = -iXI \quad \rightarrow \quad X = \omega L = \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_{\Omega} w_m d^3x$$

Problema: Calcular $\int B^2 dx^3 \sim L$ para un anillo de corriente.

- Si tenemos una capacitancia, la dinámica esta regida por

$$V = Q/C$$

entonces, podemos ver que la capacitancia esta también conectada con la reactancia X , donde ahora la energía eléctrica es la dominante

$$V = \frac{I}{-i\omega C} = -iXI \quad \rightarrow \quad X = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_{\Omega} w_e d^3x$$

Problema: Calcular $\int E^2 dx^3 \sim 1/C$ para un capacitador infinito.

- Un circuito LRC esta regido por

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} + I(t)R_c + L \frac{dI(t)}{dt}$$

entonces tenemos

$$V_i = \left(\frac{-1}{i\omega C} + R_c - i\omega L \right) I_i = (R - iX)I_i$$

y por lo tanto

$$R = R_c \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Problema: Graficar las soluciones numéricas para $Q(t)$ y $I(t)$.

7. Solución por potenciales

Podemos ver que el considerar el campo eléctrico como el gradiente de del potencial eléctrico ya no es válido. En el vacío, necesitamos definir los potenciales; comenzaremos por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \psi$$

Usando la forma que tienen las ecuaciones de Maxwell (sin materiales)

$$\nabla^2 \psi + \frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Pero estamos interesados en los campos, no en los potenciales, esto implica una libertad de “gauge”, la cual esta dada por

$$\mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \omega$$

pero esto requiere que

$$\psi \rightarrow \bar{\psi} = \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

7.1. Gauge de Coulomb

En este caso asumimos una transformación de escala

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

lo que nos da

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Lo que muestra que el potencial escalar satisface la misma ecuación de antes, y puede ser integrada inmediatamente como

$$\Psi(x, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dy^3$$

Pero la ecuación para A es mas complicada. Podemos reescribir la ecuación de arriba, para el vector potencial como

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s = -\frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y}) d^3 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Esta no-local densidad de corriente es la llamada “densidad de corriente transversal”. En general la solución representa un tiempo de propagación infinito para el potencial; y ondas viajeras que se propagan con velocidad constante c para el vector potencial. Este Gauge es bastante útil para electrodinámica cuántica, donde se requiere la cuantización de \mathbf{A} .

7.2. Gauge de Lorentz

En este caso usamos la libertad de Gauge como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

Con esta transformación de gauge obtenemos

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Supongamos que tenemos unos potenciales que no satisfacen esta libertad, entonces podemos encontrar otros potenciales tal que

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \left[(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + \left[\nabla^2 \omega - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right]$$

porque siempre es posible encontrar una solución para ω

$$\nabla^2 \omega - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = - \left[(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

como veremos mas adelante.

En general, el resolver problemas de electromagnetismo requiere resolver la ecuación de onda con y sin condiciones de borde. En general la solución representa onda viajeras que se propagan con velocidad constante c . Esto implica que para sentir una perturbación se requiere un tiempo de propagación. Esto es bastante extraño, porque no hemos hecho mención a un sistema de referencia en particular. Esta observación conducirá, eventualmente, a la teoría de la relatividad especial.

8. Soluciones para fuentes harmónicas

Supongamos que tenemos que resolver la ecuación de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho & \nabla \times \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - i \frac{\omega}{c} \mathbf{D} \end{aligned}$$

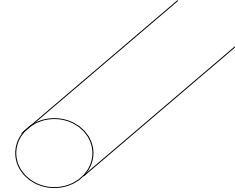
para una variación harmónica en el tiempo $\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$. Para el caso de los potenciales tenemos

$$\nabla^2 \Psi + \sqrt{\mu\epsilon} k_o^2 \Psi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \sqrt{\mu\epsilon} k_o^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}$$

en el Gauge de Lorenz y con $k_o = \omega/c$.

Problema: Tomemos un cilindro conductor muy largo de radio $\rho = a$ sobre el cual tenemos una corriente total $I = I_o e^{-i\omega t}$ que se desplaza a lo largo del cilindro. Encuentre los campos producidos y la potencia radiada por unidad de largo.



Dado que tenemos un cilindro conductor infinito en z , $\partial z = 0$. Tenemos que resolver la ecuación de Helmholtz para $\rho > a$

$$\nabla_{\perp}^2 A_z + k_o^2 A_z = 0$$

con $k_o = |\omega/c|$, ya que la corriente es en la dirección z . La simetría dictamina que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}$$

por lo tanto si exigimos simetría azimutal, podemos escribir la ecuación para $A_z(\rho)$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + k_o^2 A_z = 0$$

que tiene como solución las funciones de Hankel $H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x)$ y $H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x)$, con $m = 0$. Dado que queremos condiciones de borde de radiación en infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

encontramos

$$A_z = A_0 H_0^{(1)}(k_o \rho) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{i(k_o r - \omega t)}$$

Nos falta encontrar A_0 . El campo magnético se puede encontrar ($B = \nabla \times A$) de las relaciones de arriba

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -A_0 k_o G_0(k_o \rho)$$

hemos introducido la función auxiliar

$$G_0(x) = \frac{dH_0^{(1)}(x)}{dx}$$

Ahora utilizamos la condiciones de borde

$$B_\phi = \frac{4\pi}{c} K_z = \frac{2I_o}{ac}$$

con lo que obtenemos

$$A_0 = \frac{2I_o}{ck_o a G_0(k_o a)}$$

El campo eléctrico para $\rho > a$ es

$$E_z = -\frac{1}{ik_o \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) = \frac{1}{ik_o} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \right] = \frac{1}{ik_o} [-k_o^2 A_z] = ik_o A_0 H_0^{(1)}(k_o \rho)$$

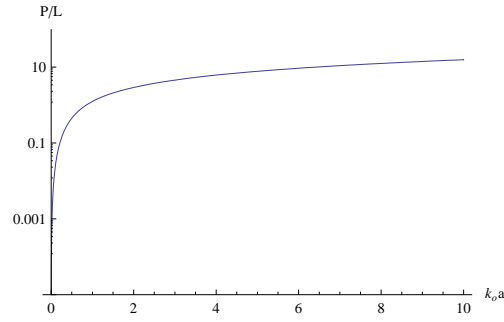


Figura 2: Potencia Radiada Total.

Aunque esta expresión es consistente con

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

para oscilaciones temporales harmónicas se obtiene el campo eléctrico directamente de

$$i\frac{\omega}{c} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B}$$

ya que puede suceder que $\Psi \neq 0$. Notemos que si la oscilación es harmónica, entonces se puede encontrar la solución completa al problema resolviendo para \mathbf{A} , y no es necesario resolver la ecuación para el potencial escalar Ψ . La potencia radiada por unidad de largo es

$$\begin{aligned}
\frac{P}{L} &= \int_{R \rightarrow \infty} \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} \rho d\phi \\
&= (2\pi) \frac{c}{8\pi} |k_o|^2 |A_o|^2 \left(\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho H_0^{(1)}(k_o \rho) G_0^*(k_o \rho) \right) \right) \\
&= (2\pi) \frac{c}{8\pi} |k_o|^2 \left(\frac{4}{c^2 |k_o|^2 a^2} \right) \frac{|I_0|^2}{|G_0(k_o a)|^2} \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{2}{c\pi a^2} \frac{|I_0|^2}{|G_0(k_o a)|^2}
\end{aligned}$$

la cual se muestra en la Fig. 2.

Problema: Tomemos una onda plana $E_o e^{i(k_o x - \omega t)} \hat{y}$ (con $k_o = \omega/c$) incidente sobre un cilindro infinito ($\partial/\partial z = 0$) en la coordenada z . Encuentre los campos radiados.

La onda incidente se puede escribir como

$$B_I = E_o e^{i(k_o x - \omega t)} \hat{z} = E_o e^{i(k_o \rho \cos \phi - \omega t)} \hat{z} = E_o \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_o \rho) i^m e^{i(m\phi - \omega t)} \hat{z}$$

Notemos que en este caso es un poco complicado trabajar con el potencial vector, porque tendríamos que trabajar integrales de los $J_m(x)$, que también se pueden escribir en termino de los J_m . Es mas conveniente trabajar con los campos directamente en este problema particular, ya que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= i\frac{\omega}{c} \mathbf{B} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - i\frac{\omega}{c} \mathbf{D}
\end{aligned}$$

- implica la misma ecuación de onda para $\rho > a$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_o^2 \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{B} + k_o^2 \mathbf{B} = 0$$

Los campos radiados también van a mantener esta simetría en \hat{z} . Por lo tanto podemos encontrar el campo radiado B_z^r de la ecuación de Helmholtz para $\rho > a$, la cual se puede resolver por separación de variables como $B_z^r = U_1(\rho)U_2(\phi)$, lo que nos da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU_1}{d\rho} \right) + \left(k_o^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) U_1 &= 0 \\
\frac{d^2 U_2}{d\phi^2} + m^2 U_2 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución para el campo radiado es

$$B_z^r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_m^{(1)}(k_o \rho) e^{i(m\phi - \omega t)}$$

donde hemos forzado ondas de salida en el infinito. A esto le tenemos que sumar el campo asintótico que también es una solución de la ecuación de onda

$$B_z = \sum_m [a_m H_m^{(1)}(k_o \rho) + i^m E_o J_m(k_o \rho)] e^{i(m\phi - \omega t)}$$

Para encontrar a_m tenemos que aplicar una condición de borde. En este caso conviene

$$E_\phi(\rho = a, \phi) = 0$$

porque no sabemos la corriente inducida en la superficie del conductor. Dado que

$$ik_o \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{i}{k_o \rho} \left[\frac{\partial B_z}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right]$$

por lo tanto

$$a_m H_m^{(1)'}(k_o a) + i^m E_o J_m'(k_o a) = 0 \quad \rightarrow \quad a_m = -i^m \frac{E_o J_m'(k_o a)}{H_m^{(1)'}(k_o a)}$$

Podemos encontrar la densidad de carga superficial como

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_\rho(\rho = a, \phi)$$

y también la corriente superficial

$$K_\rho = \frac{c}{4\pi} B_z(\rho = a, \phi)$$

Notemos que en este caso

$$\mathbf{E} \neq \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}$$

porque tenemos una densidad de carga superficial. El vector de Poynting se puede calcular como

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} E_\phi^r (B_z^r)^* \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

y la potencia radiada es entonces

$$\frac{dU}{dt} = \int_0^{2\pi} S_\rho \rho d\phi = 4E_o^2 \sum_m \left| \frac{J_m'(k_o a)}{H_m^{(1)'}(k_o a)} \right|^2$$

En la onda incidente tenemos

$$S_0 = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{8\pi} = \frac{cE_o^2}{8\pi} \hat{\mathbf{x}}$$

La sección eficaz de escatering, se puede definir como

$$\sigma(\phi)d\phi = \rho \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}}{S_O} d\phi$$

y por lo tanto en el limite $ka \ll 1$ podemos escribir

$$\sigma(\phi) = \frac{\pi(k_o a)^3}{8}(1 - 2 \cos \phi)^2$$

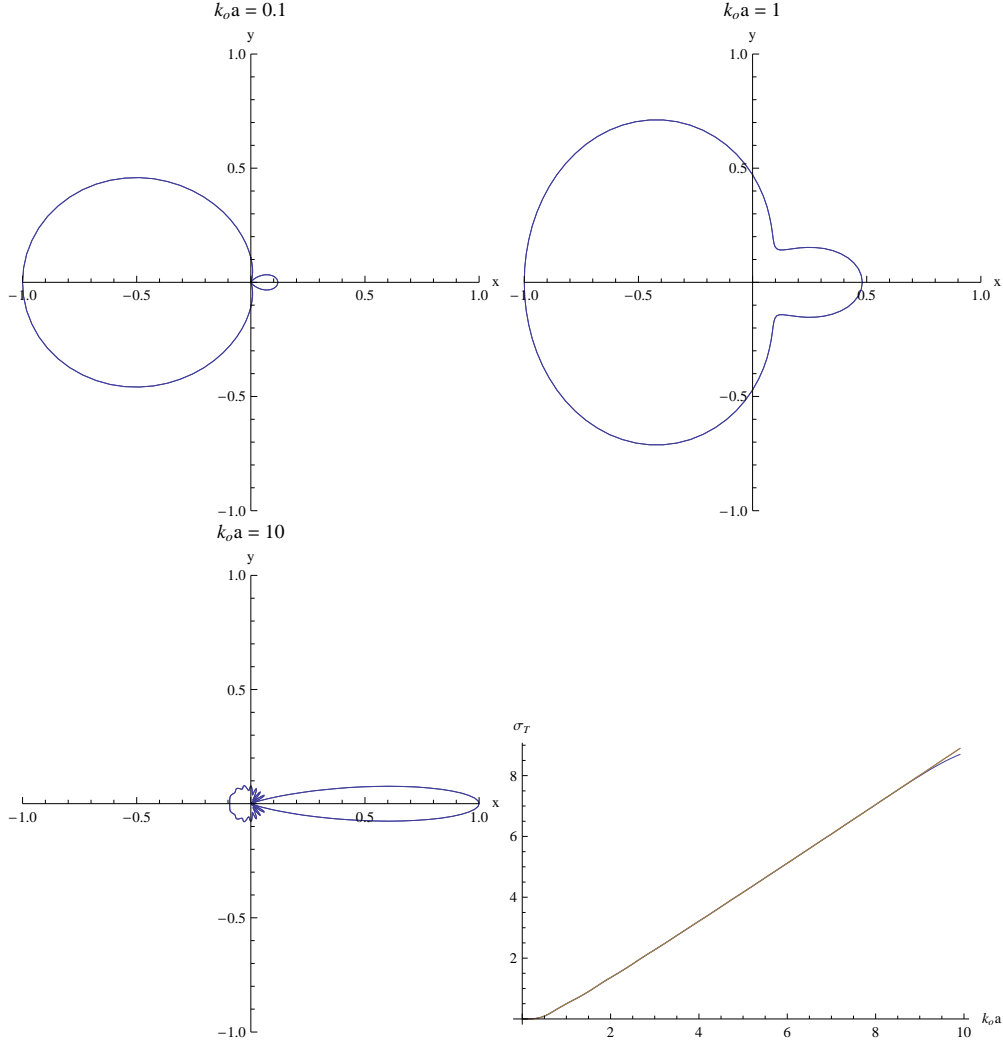


Figura 3: Sección eficaz de escatering diferencial $\sigma(\theta)/\sigma_{max}$ normalizada para (a) $k_o a = 0,1$ ($n_{max} = 5, 10$), (b) $k_o a = 1$ ($n_{max} = 5, 10$), (c) $k_o a = 10$ ($n_{max} = 20, 30$). (d) Sección eficaz de escatering total ($n_{max} = 10, 20, 30$).

Problema: Considere una corriente puntual $\mathbf{J} = J_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - L/2) \hat{\mathbf{z}}$, entre dos planos conductores $z = 0$ y $z = L$. Calcule el campo eléctrico y magnético en todo el espacio.

Podemos mirar el problema desde el punto de vista del potencial vector con sus respectivas simetrías, ya que

$$A = A_z(\rho, z) \hat{\mathbf{z}} \quad \nabla^2 A_z + k_o^2 A_z = -4\pi J/c = -2J_o \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta\left(z - \frac{L}{2}\right).$$

Con lo cual

$$B = \nabla \times A = \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\phi} \quad E = \frac{i}{k_o} \nabla \times B = \frac{i}{k_o} \left[-\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho \partial z} \right] \hat{\rho} + \frac{i}{k_o} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \right] \hat{z}$$

Notemos que la unica condicion de borde que podemos utilizar es sobre el componente tangencial $E_\rho = 0$, lo que exige que

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

y por lo tanto la funcion delta se puede escribir como

$$\delta(z - L/2) = \frac{2}{L} \sum_{n=0} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

con una expansio similar para el potencial

$$A_z(\rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{n=0} g(\rho) \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Al aplicar la ecuacion de onda obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial g}{\partial \rho} + \gamma_n^2 g = -\frac{2J_o}{c\rho} \delta(\rho) \quad \gamma_n^2 = k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

que tiene solucion

$$g_n(z) = C_n H_0^{(1)}(\gamma_n \rho)$$

ya que satisface la condicion de radiacion en $\rho \rightarrow \infty$

$$A \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i(\gamma \rho - \omega t)}.$$

Ahora tenemos que integrar esta ecuacion cerca del origen, usando la expansion de $N_0(x) \sim 2(\ln x)/\pi$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \rho d\rho \times \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial g}{\partial \rho} + \left[k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] g = -\frac{2J_o}{c\rho} \delta(\rho) \right] \rightarrow C_n i 2\pi \frac{2}{\pi} = -\frac{2J_o}{c}$$

$$A_z(\rho, z) = i \frac{J_o}{2cL} \sum_{n=0} H_0^{(1)}(\gamma_n \rho) \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Los campos son

$$\begin{aligned}
B &= \hat{\phi} i \frac{J_o}{2cL} \sum_{n=0} \gamma_n W_1(\gamma_n \rho) \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
E &= -\hat{\rho} \frac{J_o}{2k_o cL} \sum_{n=0} \gamma_n W_1(\gamma_n \rho) \left[\frac{n\pi}{L}\right] \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&\quad - \hat{z} \frac{J_o}{2k_o cL} \sum_{n=0} [\gamma_n W_1(\gamma_n \rho) + \rho \gamma_n^2 W_2(\gamma_n \rho)] \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

con

$$W_1(x) = \frac{dH_0^{(1)}(x)}{dx} \qquad W_2(x) = \frac{d^2 H_0^{(1)}(x)}{dx^2}$$

Usando las condiciones de borde podemos evaluar la corriente K y la densidad de carga σ

9. Solución Numérica de la ecuación de ondas

La solución numérica de la ecuación de ondas supone usar

$$\begin{aligned} f_x(x, t) &= \frac{f(x + dx, t) - f(x - dx, t)}{2dx} + O(dx^3) \\ f_{xx}(x, t) &= \frac{f(x + dx, t) - 2f(x, t) + f(x - dx, t)}{dx^2} + O(dx^3) \\ f_t(x, t) &= \frac{f(x, t + dt) - f(x, t - dt)}{2dt} + O(dt^3) \\ f_{tt}(x, t) &= \frac{f(x, t + dt) - 2f(x, t) + f(x, t - dt)}{dt^2} + O(dt^3) \end{aligned}$$

En una dimensión, podemos estimar en un punto de una grilla (i, n) , con $x_i = i\Delta x$ como el elemento espacial, y $t_n = n\Delta t$ como la variable tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -4\pi f(x, t) \\ \psi_i^{n+1} &= 2\psi_i^n - \psi_i^{n-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (\psi_{i+1}^n - 2\psi_i^n + \psi_{i-1}^n) + 4\pi \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(x_i, t) dt \end{aligned}$$

La generalización a 2 y 3 dimensiones es trivial.

Se debe tener cuidado con la especificación de las condiciones de borde. Para que la ecuación sea numéricamente estable, es importante considerar cierta relación entre Δx y Δt , para la ecuación de ondas sin fuentes. Comenzamos con una perturbación de la forma

$$f_j^n = M^n e^{ikj\Delta x}$$

y con la definición

$$r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

da origen a la ecuación

$$M^2 = 2M - 1 + r^2 2M(1 + \cos k\Delta x)$$

para M y k . Con $r \leq 1$, la ecuación de arriba satisface $|M| \leq 1$ para todos los valores de k , por lo tanto, la solución es estable. Esto tiene sentido, ya que esto significa que debe calcular con más rapidez que la propagación de la onda. No nos podemos mover delante de la onda.

9.1. Propagación de Frentes

La ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial A}{\partial x} = g(x, t)$$

es una de las ecuaciones más complicadas en la física, pero al mismo tiempo es la más común. Puede ser resuelta por el método de las características definidas por la curva

$$\begin{aligned} \frac{dr(\lambda)}{dt} &= U(r(\lambda), \tau(\lambda)) \\ \frac{d\tau(\lambda)}{dt} &= 1 \end{aligned}$$

de esto obtenemos que

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A(r(\lambda), \tau(\lambda)) \\ \frac{dA(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{\partial A}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\lambda} = g(r(\lambda), \tau(\lambda)) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que queremos integrar ambas ecuaciones hacia adelante en t , desde t hasta $t + \Delta t$. Entonces integraremos hacia adelante en el tiempo cada punto x en la red a una posición.

$$\begin{aligned} x_i(t + \Delta t) &= x_i + U(x_i, t) \Delta t \\ A[x_i(t + \Delta t), t + \Delta t] &= A[x_i, t] + g[x_i, t] \Delta t \end{aligned}$$

Notemos que el elemento de la grilla $x_i(t)$ se desplazo a $x_i(t + \Delta t)$ que ya no esta en los puntos de la grilla. A nosotros nos interesa obtener

$$A_i^{n+1} = A[x_i(t), t + \Delta t]$$

Para volver a esta grilla, tenemos que interpolar. Una posibilidad es buscar los dos elementos de la grilla $x_i(t + \Delta t)$ que están mas cerca de x_i e interpolar linealmente A_i^{n+1} . Otra posibilidad es notar que hay un punto \bar{x} que se propaga hasta x_i en el intervalo Δt ,

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{x} + U(\bar{x}, t) \Delta t \\ A[x_i, t + \Delta t] &= A[\bar{x}, t] + g[\bar{x}, t] \Delta t \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos que interpolar $A[\bar{x}, t]$, con la definición

$$\bar{x}^{(k)} = x_i - U(\bar{x}^{(k-1)}, t) \Delta t$$

Esta ultima relación generalmente se resuelve por integración a partir de $\bar{x}^{(0)} \approx x_i$ hasta que converja. Este es el método mas usado en las grandes simulaciones de clima.

Hemos, esencialmente, conveccionado g con una velocidad U , y entonces hemos obtenido A en un tiempo posterior.