Capitulo 4:
Principio de la Relatividad

En este capitulo estudiaremos las consecuencias de la invariancia de la velocidad de la luz en el vacío.

Índice

1. Teoría de la relatividad

Las ecuaciones de Newton son invariantes con respecto a las transformaciones de Galileo

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \bar{\boldsymbol{x}} & = & \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{v}_o t + \mathbf{x}_o \\ \bar{t} & = & t + t_o \end{array}}$$

donde $\mathbf{R}$ es una rotación que satisface $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}$. Estas transformaciones definen los sistemas inerciales de referencia, en donde las ecuaciones de Newton son satisfechas. Que sea invariante no significa que tenga el mismo valor, significa que las ecuaciones tienen la misma forma. Esta definición funcionaría muy bien, excepto que las ecuaciones de Maxwell (léase la ecuación de onda) no son invariantes bajo una transformación galileana, ya que es experimentalmente observado que la velocidad de la luz c es una constante universal independiente del sistema de referencia inercial.

Postulado I de la universalidad de la luz: En el vacío, la luz se propaga con la velocidad universal $c = 299792458[m/s]$ en todos los sistemas inerciales de referencia.

Postulado II del principio de relatividad especial: Las leyes de la naturaleza son invariantes (tienen la misma forma) bajo el grupo de transformaciones de Lorentz L que mantienen la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia inerciales.

Postulado III del principio de relatividad especial: Siempre existe un sistema de referencia universal que esta instantáneamente en reposo con un sistema dado, aunque este este acelerando.

2. Transformaciones

Definamos dos sistemas de referencia, $K(\mathbf{x})$ y $\bar{K}(\bar{\boldsymbol{x}})$. Supongamos que tenemos una transformación entre estos dos sistemas de referencia,

$$\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})$$

Notemos que aunque $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})$ puede no ser lineal, la transformación de los diferenciales, que viven en el espacio tangente,

$$\overline{\mathbf{dx}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{dx}$$

si lo es, donde

$$\mathbf{L} = [\mathbf{D}\boldsymbol{\Lambda}] \qquad \rightarrow \qquad L_{i,j} = \frac{\partial \Lambda_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

con $\mathbf{D}$ como el Jacobiano de la transformación. Las derivadas se transforman como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} = \left.\frac{\partial \Lambda_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}})} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$$

y por lo tanto

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^T\left(\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}})\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

Las transformaciones apropiadas deben satisfacer que el determinante del Jacobiano sea diferente de cero, en $\mathbf{x}$.

En principio las relaciones dinámicas incluyen campos (como las ecuaciones de Maxwell) que también en principio deberían transformarse como

$$F_{\mathbf{y}} = G\left[F_{\mathbf{x}}\right] \quad \rightarrow \quad F_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = G[F_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\bar{\mathbf{x}})\right)]$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos una relación dinámica $H = 0$ (que depende del espacio, derivadas y campos) en el sistema K, esta relación dinámica en el sistema $\bar{K}$ se vería como

$$\begin{aligned}
H\left[\mathbf{x}, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}, F_{\mathbf{x}}\ldots\right] &= H[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}), \mathbf{L}^T\left(\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}})\right)\boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{x}}}, G^{-1}[F_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\bar{\boldsymbol{x}})], \ldots] \\
&= \overline{H}[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{x}}}, F_{\bar{\boldsymbol{x}}}\bar{\boldsymbol{x}}(), \ldots]
\end{aligned}$$

H es denominado invariante, o su forma es independiente del sistema elegido, si el resultado de estas dos transformaciones deja

$$\overline{H}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{x}}}, \ldots) = H(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{x}}}, \ldots)$$

Para el caso de las ecuaciones de Maxwell veremos más adelante que los campos también requieren transformarse para que tengan la misma forma en diferentes sistemas de referencia.

Por ejemplo, miremos la ecuación de Newton, para la particular i,

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_i} \sum_j V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

y le aplicamos una transformación galileana de la trayectoria de $\mathbf{x}(t)$ a $\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{t})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_i &= \left(\mathbf{R}^T\right)(\bar{\boldsymbol{v}}_i - \mathbf{v}_o) \\
\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \left(\mathbf{R}^T\right)\frac{d\bar{\boldsymbol{v}}_i}{d\bar{t}} \\
\frac{\partial}{\partial x_k} &= \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} = \mathbf{R}_{j,k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} = \left(\mathbf{R}^T\right)_{k,j}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}
\end{aligned}$$

Además, $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = |\bar{\boldsymbol{x}}_i - \bar{\boldsymbol{x}}_j|$. Por lo tanto, las ecuaciones de Newton son claramente invariantes si $\mathbf{R}$ es una rotación

$$m_i \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}_i}{d\bar{t}} = -\left(\mathbf{R}\mathbf{R}^T\right)\boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{x}}_i} \sum_j V(|\bar{\boldsymbol{x}}_i - \bar{\boldsymbol{x}}_j|)$$

Miremos las ecuaciones de Maxwell entre sistemas de coordenadas $(\mathbf{x}, t)$ y $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{t})$. Lo primero que nos damos cuenta es que las Leyes de Maxwell, o sea la ecuación de onda, para un escalar Ψ

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 0$$

Bajo una transformación galileana, asumamos que

$$\bar{\Psi}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{t}) = \bar{\Psi}(\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{v}_o t + \mathbf{x}_o, t + t_o) = \Psi(\mathbf{x}, t)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} &= (\mathbf{R}^T)_{i,j}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j} \\
\nabla^2_{\mathbf{x}}\Psi &= (\mathbf{R}^T)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j} = (\mathbf{R}^T)_{ij}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j} = \mathbf{R}_{ki}(\mathbf{R}^T)_{ij}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j} = \nabla^2_{\bar{\boldsymbol{x}}}\bar{\Psi} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{t}} + v_{o,i}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_i} \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + v_{o,i}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_i}\right) = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{t}^2} + 2v_{o.i}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{t}} + v_{o,i}v_{o,j}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_i}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de onda no es invariante

$$\left[\nabla^2_{\mathbf{x}}\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right] = \left[\nabla^2_{\bar{\boldsymbol{x}}}\bar{\Psi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{t}^2}\right] - 2\frac{v_{o,i}}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{t}} - \frac{v_{o,i}}{c}\frac{v_{o,j}}{c}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_i}$$

bajo una transformación galileana. Notemos que el el limite $v_o/c << 1$, es casi invariante.

Si en un sistema de referencia $\bar{\Psi}$ satisface la ecuación de ondas, vemos que en el otro Ψ no la satisface. Note que asumimos que Ψ no requiere transformarse en el nuevo sistema de referencia. Este es extremadamente relevante, ya que implicaría que si en un sistema de referencia se satisfacen las ecuaciones de Maxwell, entonces en el otro sistema de referencia habría que escribir otra forma para estas ecuaciones. Uno podría tratar de exigir que el campo Ψ podría requerir una transformación, pero esto tampoco es factible, ya que la transformación depende de derivadas cruzadas. Veremos mas adelante que resulta más útil pensar en transformaciones de Lorentz, que en el limite $v_o/c << 1$ son equivalentes a una transformación Galileana, ya que sabemos que en el límite de pequeñas velocidades las transformaciones Galileanas parecen estar correctas.

3. La métrica para la relatividad especial

Supongamos que una onda de luz se genera en el punto $(t_s, \mathbf{x}_s)$. En el sistema de referencia $\mathbf{K}$ tenemos que los puntos $(t, \mathbf{x})$ del el frente de la onda de luz satisfacen

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^2 - c^2(t - t_s)^2 = 0$$

Esta relación debe ser invariante en los dos sistemas de coordenadas con la misma velocidad c. Esta relación define una métrica. Notemos, como veremos mas adelante, esto es equivalente a hacer invariante la ecuación de onda.

Hay dos métodos de desarrollar la teoría. Uno es usar una métrica Euclidiana lo que implica definir el tiempo como un número imaginario $(ict, \mathbf{x})$. El otro método es usar una métrica Riemanniana en 4 dimensiones reales con ct como una coordenada. En este capítulo vamos a tomar la segunda alternativa, ya que es más útil en física moderna, como la mecánica cuántica.

3.1. Formulación matricial y el espacio de Minkowsky

Ordenemos un poco nuestra formulación y definamos que nuestro espacio tiempo está caracterizado por el vector diferencial $\vec{dx}$ de la posición que puede ser representado por la lista que representa a sus componentes $\mathbf{dx} = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ en la **base estándar**, donde $x^0 = ct$. Notemos que hay una diferencia entre el vector y su representación. Veremos mas adelante la importancia de poner el índice de los componentes arriba para los vectores.

En general tenemos una medida de distancia dada por

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 = \mathbf{dx}^T\ \boldsymbol{\eta}\ \mathbf{dx}$$

donde hemos hemos definido la matriz

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{\eta}^{-1} = \boldsymbol{\eta}$$

que define la **métrica de Minkowsky**. En general, es útil describir este espacio, como un **espacio Pseudo-Riemanniano**, ya que en un **espacio de Riemann** la métrica da valores positivos para la magnitud de vectores. Cuando los componentes del tensor de la métrica en la base estándar esta descrito por $\boldsymbol{\eta}$, tenemos la relatividad espacial, y un **espacio de Minkowsky**.

Nota: Notemos que técnicamente $\boldsymbol{\eta}$ no es un tensor, es la matriz de componentes que **representa** a un tensor en la base que estamos usando. Por ahora seremos bastante vagos al respecto, pero mas adelante aclararemos esto. El producto escalar entre vectores (palabra que definiremos en forma precisa mas adelante) queda entonces definido como el producto

$$\left\langle\ \vec{dx} \mid \vec{dx}\ \right\rangle = \mathbf{dx}^T\boldsymbol{\eta}\ \mathbf{dx} = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2$$

Ahora podemos definir el vector de derivadas como

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ -\boldsymbol{\nabla} \end{pmatrix}$$

Nuevamente, $\boldsymbol{\partial}$ no es un vector, es una representación de un vector en el sistema estándar de coordenadas en que estamos trabajando.

Mas adelante veremos por que el vector se define con el signo negativo para la derivada temporal. La ecuación de onda se puede escribir como

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) = \boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{\partial}$$

3.2. Transformación de Lorenz (grupo de Poincare)

Asumamos que los componentes de las coordenadas se transforman como

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})$$

donde los diferenciales se transforman como

$$\overline{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{L}\ \boldsymbol{dx} \qquad \rightarrow \qquad L^i{}_j = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^j}$$

donde $Det\mathbf{L} \neq 0$ en el espacio. hemos re-definido L con los componentes arriba y abajo. Esta notación será útil mas abajo. Notemos que $\boldsymbol{dx}$ es la representación (sus componentes) de un vector en una base, que en este caso es la estándar. Este vector vive en el **espacio tangente** donde los componentes de los vectores se transforman linealmente entre los sistema de coordenadas K y $\bar{K}$. Notemos que el vector $\vec{dx}$ es el mismo vector en los dos sistemas de coordenadas, solos sus componentes cambian $\mathbf{dx} \rightarrow \overline{\boldsymbol{dx}}$ al cambiar el sistema de coordenadas (o bases) del sistema K al $\bar{K}$. La distinción de índices arriba y abajo sera mas clara pronto. En el caso de una transformación afina (que utilizaremos en la relatividad especial), tenemos que

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

Los vectores, que transforman sus componentes como lo hace $\vec{\boldsymbol{dx}}$, se denominan 4-vectores.

Notemos que tenemos que forzar el producto interno

$$\left\langle\ \vec{\boldsymbol{dx}} \mid \vec{\boldsymbol{dx}}\ \right\rangle \qquad \rightarrow \qquad \overline{\boldsymbol{dx}}^{\,T} \boldsymbol{\eta}\, \overline{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{dx}\left(\mathbf{L}^T \boldsymbol{\eta}\, \mathbf{L}\right)\mathbf{dx}$$

a ser un invariante en todas las bases. Por lo tanto vemos que si queremos que la distancia ds^2 sea invariante en los dos sistemas de referencia (o una solución de la ecuación de onda), necesitamos que

$$\boxed{\mathbf{L}^T \boldsymbol{\eta}\, \mathbf{L} = \boldsymbol{\eta}}$$

lo que define el grupo G de transformaciones de Lorenz (grupo de Poincare), ya que

1. si $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ pertenecen a G, entonces $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ también pertenecen a G.
2. la identidad pertenece G

3. el inverso

$$\boxed{\mathbf{L}^{-1} = \boldsymbol{\eta}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\eta}}$$

   también pertenece a G

Notemos que

$$\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{L} = \boldsymbol{\eta}\,\mathbf{L}^T\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{L} = \mathbf{1}$$

Multiplicando $\mathbf{L}\,\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{1}$, vemos que

$$\mathbf{L}\,\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{L}^T = \boldsymbol{\eta}$$

y por lo tanto $\mathbf{L}^T$ también pertenece al grupo.

Veamos que pasa con la ecuación de onda. Las derivadas se transforman como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = L^j{}_i\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = (\mathbf{L}^T)^i{}_j\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$$

Notemos la representación del vector de derivadas satisface

$$\boxed{\boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ -\boldsymbol{\nabla} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}\begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ \boldsymbol{\nabla} \end{pmatrix}}$$

$$\partial^i = \eta^{i,j}\frac{\partial}{\partial x^j} = \eta^{i,j}\;L^k{}_j\;\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} = \eta^{i,j}\;L^k{}_j\;\eta_{k,w}\bar{\partial}^w$$

o lo que es equivalente

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\eta}\;\mathbf{L}^T\;\boldsymbol{\eta}\;\bar{\boldsymbol{\partial}}$$

Notemos que esto demuestra que los componentes de $\boldsymbol{\partial}$ se transforman como un vector, ya que

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\partial}} = \mathbf{L}\;\boldsymbol{\partial}}$$

La ecuación de onda transforma entonces como

$$\bar{\boldsymbol{\partial}}^T\;\boldsymbol{\eta}\;\bar{\boldsymbol{\partial}} = \boldsymbol{\partial}^T\;\mathbf{L}^T\;\boldsymbol{\eta}\;\mathbf{L}\;\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial}^T\;\boldsymbol{\eta}\;\boldsymbol{\partial}$$

y por lo tanto también es invariante si los sistemas de coordenadas se relacionan por una transformación de Lorenz.

3.3. Construcción del Grupo

La transformación de Lorentz forma el grupo de transformaciones de Poincare y automáticamente satisface la invariancia de la ecuación de onda y del frente de la onda.

Notemos que el determinante $(\det \mathbf{L}) = \pm 1$. Las transformaciones se clasifican dependiendo del signo del determinante $\det \mathbf{L} = 1$ (Proper) o $\det \mathbf{L} = -1$ (Improper) y del valor de ${L^0}_0 \geq 1$ (orthochronous o mapeando hacia adelante en el tiempo) o ${L^0}_0 \leq -1$. Nos interesa el subgrupo de las **proper orthochronous Lorentz transformations** (POLT) ($\det \mathbf{L} = 1, {L^0}_0 \geq 1$). Estas son las transformaciones que nos interesan porque preservan la causalidad (el antes y el después son preservados) y en el limite de pequeñas velocidades tendremos las transformaciones Galileanas.

Claramente, rotaciones de la parte espacial $\mathbf{R} \in SO(3)$ (con $\det \mathbf{R} = 1$) pertenecen a este grupo

$$\mathbf{L}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Pero, también están las transformaciones permiten mezclar el tiempo y el espacio.

Tomemos los dos sistemas de referencia, con el sistema $\bar{\mathbf{K}}$ moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema $\mathbf{K}$ en la dirección $\hat{x}_1$. Asumamos que la transformación no afecta los ejes perpendiculares a esta dirección $dx^2 = d\bar{x}^2, dx^3 = d\bar{x}^3$. El frente de la onda debe ser un invariante, por lo cual tenemos

$$\left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 = \left(dx^0 + dx^1\right)\left(dx^0 - dx^1\right) = \left(\overline{dx}^{\,0} + \overline{dx}^{\,1}\right)\left(\overline{dx}^{\,0} - \overline{dx}^{\,1}\right) = \left(\overline{dx}^{\,0}\right)^2 - \left(\overline{dx}^{\,1}\right)^2$$

lo que debe de ser invariante en los dos sistemas de referencia. Por lo tanto, cada término en el paréntesis solo puede ser una función de la velocidad

$$\left.\begin{aligned} \overline{dx}^{\,0} + \overline{dx}^{\,1} &= f(v)\left(dx^0 + dx^1\right) \\ \overline{dx}^{\,0} - \overline{dx}^{\,1} &= \frac{1}{f(v)}\left(dx^0 - dx^1\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{dx}^{\,0} \\ \overline{dx}^{\,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f + \dfrac{1}{f} & f - \dfrac{1}{f} \\ f - \dfrac{1}{f} & f + \dfrac{1}{f} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \end{pmatrix}$$

pero, el origen del sistema de referencia $\bar{\mathbf{K}}$ se mueve con velocidad v en el sistema $\mathbf{K}$, lo que implica que el origen del sistema $\bar{\mathbf{K}}$ está dado por $d\mathbf{x} = (dx^0, dx^0 v/c, 0, 0)$ y por $d\bar{\boldsymbol{x}} = (\overline{dx}^{\,0}, 0, 0, 0)$ en los dos sistemas de referencia, con lo cual tenemos

$$\left.\begin{aligned} f(v) &= \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{dx}^{\,0} \\ \overline{dx}^{\,1} \end{pmatrix} = L(v)\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \end{pmatrix}$$

con la definición $\beta = v/c/$ La transformación definida en una dirección más general es

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{v^k}{c} \\ \\ -\gamma\dfrac{v^k}{c} & \delta^{i,j} + (\gamma-1)\dfrac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+(\gamma-1)\dfrac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\dfrac{\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\beta_2^2 & (\gamma-1)\dfrac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\dfrac{\beta_3\beta_1}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\dfrac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

Es fácil probar que en el $\lim v/c \to 0$, esta transformación se reduce a una simple transformación Galileana. Además el inverso está dado por $\mathbf{L}(-\mathbf{v})$, ya que

$$\boxed{\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\eta}\,\mathbf{L}^T\,\boldsymbol{\eta} = \mathbf{L}(-\mathbf{v})}$$

Esta transformación se denomina un **Boost** para diferenciarlo de una rotación espacial que también satisface el requisito de una transformación de Lorentz.

Una conclusión importante es que el tiempo y las distancias medidas dependen del sistema de referencia que se use.

3.3.1. Dilatación del tiempo

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia, el K y el $\bar{K}$. En el sistema $\bar{K}$ el reloj marca $\overline{\Delta t}$ (con $\overline{\Delta x} = 0$ el reloj no se mueve). ¿Cuánto marca en el sistema **K**? La transformación dictamina (usando $L(-v)$)

$$c\Delta t = c\gamma\overline{\Delta t} + \beta\gamma\overline{\Delta x}$$

Los intervalos de tiempo son finalmente

$$\Delta t = \gamma\overline{\Delta t}$$

ya que $\gamma \geq 1$, el intervalo del tiempo en el sistema $\bar{K}$ es mas chico que en el sistema K para el mismo evento. Esto se denomina dilatación del tiempo.

3.3.2. Contracción de las distancias

Otro problema interesante en el cual se producen dos mediciones al mismo tiempo en un sistema $\bar{K}$ ($\overline{\Delta x}, \overline{\Delta t} = 0$) en la misma dirección del movimiento ($\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$). En este sistema K las dos mediciones se producen en tiempos diferentes, pero las dos mediciones se relacionan como

$$\begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\Delta x} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto en el sistema $\bar{K}$ medimos la distancia

$$\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

Esta no es la forma mas adecuada de probar la contracción de las distancias en los sistemas en movimiento.

3.3.3. Efecto doppler relativista

Problema: Si la ecuación de onda es invariante, entonces la fase de una onda plana debe de ser invariante. Por lo tanto podemos escribir los componentes del vector de onda $\boldsymbol{k} = \{\omega/c, k_1, k_2, k_3\}$ en la base estándar, con lo cual tenemos que

$$\left\langle \vec{\boldsymbol{k}} \mid \vec{\boldsymbol{dx}} \right\rangle = \bar{\boldsymbol{k}}^T \, \boldsymbol{\eta} \, \overline{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{k}^T \, \boldsymbol{\eta} \, \mathbf{dx}$$

y por lo tanto los componentes del vector de onda, representado por $\boldsymbol{k}$, se transforma como los componentes de un vector en este espacio de 4 dimensiones.

3.4. Descomposición de POLT

Es posible probar que toda POLT se puede escribir en forma única como el producto de una rotación $L(R)$ y una transformación "Boost" $L(v)$, con

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{v})\mathbf{L}(\mathbf{R}) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{v_i}{c} = \dfrac{L^i{}_0}{L^1{}_0} \\ \\ R^i{}_j = L^i{}_k - \dfrac{1}{1 + L^0{}_0} L^1{}_0 L^0{}_j \end{cases}$$

Probar esto, implica demostrar que

- $v < c$ usando las propiedades de una transformación de Lorentz.
- La relación de v/c permite la formulación de $\mathbf{L}(\mathbf{v})$ en término de algunos componentes de $\mathbf{L}$.
- $\mathbf{L}(\mathbf{R}) = \mathbf{L}(-\mathbf{v})\mathbf{L}$ es una rotación con la definición del punto anterior permite establecer los componentes de $\mathbf{R}$
- Probar que la descomposición es única

El orden de la descomposición no es demasiado relevante, ya que $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{R})\mathbf{L}(\mathbf{v}_1)$ también pertenece a POLT con la misma relación anterior, pero $\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v}_1$.

Este grupo de POLT es un **algebra de Lie** que contiene a $SO(3)$ que depende de seis parámetros, tres ángulos y tres velocidades y por lo tanto requiere de seis generadores. Los tres generadores correspondientes a los tres ángulos de rotación los denominaremos como

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para definir los generadores de los **Boost** podemos definir la función **rapidity**

$$f(v) = e^{-\lambda(v)}$$

Con esta definición tenemos que el boost en x es

$$\left.\begin{array}{l} \tanh\lambda = \dfrac{|v|}{c} \\ \\ e^{\lambda} = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \end{array}\right. \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda & 0 & 0 \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el generador de la transformación lo podemos escribir como

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la transformación la podemos escribir finalmente como

$$L = \exp(-\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\mathbf{J})\exp(-\lambda\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\mathbf{K})$$

Una forma de probar esta expresión es componiendo un número n de transformaciones infinitesimales.

Cuales son las relaciones de conmutación?

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] &= \epsilon_{i,j,k}\mathbf{J}_k \\ [\mathbf{J}_i, \mathbf{K}_j] &= [\mathbf{K}_i, \mathbf{J}_j] = \epsilon_{i,j,k}\mathbf{K}_k \\ [\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] &= -\epsilon_{i,j,k}\mathbf{K}_k \end{aligned}$$

3.5. Adición de velocidades

Supongamos que tenemos un cuerpo que se mueve con velocidad u' en el sistema de coordenadas $\bar{\mathbf{K}}$. ¿ Cuál es la velocidad u en el sistema de referencia $\mathbf{K}$? Hay dos formas de ver este resultado. Uno es tomar variaciones en el tiempo en los respectivos sistemas de referencia

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x^0 = \gamma\overline{\Delta x}^{\,0} + \beta\gamma\overline{\Delta x}^{\,1} \\ \\ \Delta x^1 = \gamma\overline{\Delta x}^{\,1} + \beta\gamma\overline{\Delta x}^{\,0} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{u}{c} = \frac{\Delta x^1}{\Delta x^0} = \frac{\bar{u}/c + \beta}{1 + \beta\bar{u}/c}$$

la otra es componer dos “Boost”

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\bar{u}\hat{\boldsymbol{e}}_1)\mathbf{L}(v\hat{\boldsymbol{e}}_1) = \exp(-\lambda_1\mathbf{K}_1)\exp(-\lambda_2\mathbf{K}_1) = \exp(-(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{K}_1)$$

$$\rightarrow \frac{u}{c} = \frac{\Delta x^1}{\Delta x^0} = \frac{\bar{u}/c + \beta}{1 + \beta \bar{u}/c}$$

Transformaciones en direcciones más generales requieren más álgebra, pero son trabajables. Claramente si las dos velocidades son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz nos da la transformación galileana

$$u = \bar{u} + v + O(\bar{u}v/c^2)$$

3.6. Precesión de Thomas

Supongamos que hacemos dos "Boost.$^{\text{en}}$ direcciones perpendiculares. Esta composición también pertenece al grupo de POLT y por lo tanto también se puede escribir como una rotación mas un "Boost":

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{L}(v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2)\mathbf{L}(v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_3 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el valor de u se puede encontrar del teorema descrito arriba.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_i}{c} \rightarrow \left\{\dfrac{\beta_1}{\gamma_2}, \beta_2, 0\right\} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{\beta_1\beta_2(\gamma_1\gamma_2 - 1)}{\beta_1^2\gamma_1 + \beta_2^2\gamma_2} \end{array}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{L}(-u)\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o también se puede obtener de las relaciones del teorema para POLT. Para pequeñas velocidades tenemos $\tan\theta = -\beta_1\beta_2/2$. Es interesante darse cuenta que dos "Boost.$^{\text{en}}$ direcciones diferentes dan origen a una rotación. Esto se denomina precesión de Thomas y se genera de la no-conmutación de los generadores de los "Boost". Supongamos que a tiempo t tenemos un sistema con velocidad $\mathbf{v}$. Luego a tiempo $t + dt$ observaremos $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Asumamos que a tiempo t hay un sistema inercial moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$ instantáneamente pegado al cuerpo. Luego a tiempo $t+dt$ hay otro sistema inercial moviéndose con velocidad $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ instantáneamente pegado al cuerpo. Si el cuerpo tiene una dirección definida, como el *spin*, entonces esta dirección se verá precesar con una frecuencia angular (para pequeñas velocidades como)

$$\sin\Delta\theta \sim \Delta\theta = -\frac{\beta\Delta\beta}{2}\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{2c^2}$$

Por lo tanto una distribucion de carga se ve "como" rotando la pasar a cierta velocidad

4. Formulación abstracta de vectores, tensores y formas

Podemos mirar esto como un problema de álgebra diferencial abstracta. Ya definimos el vector

$$\boldsymbol{d\vec{x}}$$

En un sistema de coordenadas K, podemos describir el vector

$$\boldsymbol{d\vec{x}} = dx^\mu \boldsymbol{\hat{e}_\mu}$$

en termino de sus componentes dx^μ y la base $\boldsymbol{\hat{e}_\mu}$ del sistema de coordenadas de K. Si queremos mirar este vector en otro sistema de coordenadas $\bar{K}$, tendremos

$$\boldsymbol{d\vec{x}} = d\bar{x}^\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\mu}$$

Notemos que el vector es el mismo en todos los sistemas de coordenadas, solo sus componentes cambian. Si $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ son vectores, y α y β son números, entonces $\alpha\vec{\boldsymbol{A}} + \beta\vec{\boldsymbol{B}}$ también es vector, y tiene componentes

$$\alpha\vec{\boldsymbol{A}} + \beta\vec{\boldsymbol{B}} = (\alpha A^\mu + \beta B^\mu)\, \boldsymbol{\hat{e}_\mu}$$

4.1. Transformaciones y Bases para vectores

Si ahora queremos mirar la transformación de los componentes de un vector en el **espacio tangente** podemos definir la transformación como

$$\bar{A}^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu$$

donde μ corresponde a la fila, y ν a la columna. También existe la transformación inversa

$$A^\mu = (L^{-1})^\mu{}_\nu \bar{A}^\nu$$

que determinaremos mas adelante. Ahora definimos la sumatoria de Einstein solo cuando tenemos índices repetidos arriba y abajo, a lo que llamaremos una **contracción**. Vemos como se transforman las bases,

$$\begin{aligned} A^\mu \boldsymbol{\hat{e}_\mu} &= \bar{A}^\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\mu} \\ A^\mu \boldsymbol{\hat{e}_\mu} &= L^\mu{}_\nu A^\nu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\mu} \\ A^\mu \boldsymbol{\hat{e}_\mu} &= A^\mu L^\nu{}_\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\nu} \end{aligned}$$

y por lo tanto las bases se transforman como

$$\boxed{\boldsymbol{\hat{e}_\mu} = L^\nu{}_\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\nu}}$$

diferentes a los vectores. Notemos que esta transformación corresponde a la transpuesta. Utilizando la inversa podemos escribir

$$\begin{aligned} A^\mu \boldsymbol{\hat{e}_\mu} &= \bar{A}^\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\mu} \\ \bar{A}^\nu (L^{-1})^\mu{}_\nu \boldsymbol{\hat{e}_\mu} &= \bar{A}^\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\mu} \\ \bar{A}^\mu (L^{-1})^\nu{}_\mu \boldsymbol{\hat{e}_\nu} &= \bar{A}^\mu \boldsymbol{\hat{\bar{e}}_\mu} \end{aligned}$$

y por lo tanto las bases se transforman como

$$\boxed{\hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\mu}} = (L^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}}$$

Esto es completamente consistente con

$$\bar{A}^{\mu}\hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\mu}} = A^{\nu}\left[(L^{-1})^{\gamma}{}_{\mu}L^{\mu}{}_{\nu}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\gamma}} = A^{\nu}\delta^{\gamma}{}_{\nu}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\gamma}} = A^{\nu}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}$$

4.2. Tensores

Notemos el producto escalar que definimos arriba, vemos que es consistente con

$$\left\langle \vec{\boldsymbol{A}}|\vec{\boldsymbol{B}}\right\rangle = A^{\mu}A^{\nu}\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}}|\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}\right\rangle = A^{\mu}A^{\nu}g_{\mu.\nu}$$

donde $g_{\mu.\nu}$ son los componentes de la métrica. Este producto es **invariante de sistemas de coordenadas**, ya que el producto escalar lo es.

Notemos que esta propiedad nos permite definir el **tensor de la métrica g** como una función de dos vectores que produce un numero

$$\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}) = \left\langle \vec{\boldsymbol{A}}|\vec{\boldsymbol{B}}\right\rangle$$

Este objeto tiene la propiedad que

$$\mathbf{g}(\alpha\vec{\boldsymbol{A}} + \beta\vec{\boldsymbol{B}}, \vec{\boldsymbol{C}}) = \alpha\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{C}}) + \beta\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{B}}, \vec{\boldsymbol{C}})$$

Notemos entonces que **un tensor $\binom{0}{2}$ es una regla que produce un numero a partir de dos vectores independiente del sistema de coordenadas**. Notemos que no hemos hecho ninguna referencia a los componentes de estos objetos. De esta forma podemos definir tensores del tipo $\binom{0}{n}$ como una función de n vectores, lineal en sus argumentos, que produce un numero.

4.3. uno-formas o tensores $\binom{0}{1}$

De particular interés, son los tensores $\binom{0}{1}$, denominados **uno-formas $\tilde{\boldsymbol{p}}$**. Dado que es lineal en sus argumentos

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(\vec{\boldsymbol{A}}) = A^{\mu}\tilde{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}}) = A^{\mu}p_{\mu}$$

donde p_{μ} son los componentes de $\tilde{\boldsymbol{p}}$ en el sistema K. Notemos que aquí vemos la definición de una **contracción** $A^{\mu}p_{\mu}$ entre un vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ y una uno-forma $\tilde{\boldsymbol{p}}$, sin referencia a otros tensores. Los componentes de las uno-formas se transforman

$$p_{\mu} = \tilde{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}}) = \tilde{\boldsymbol{p}}(L^{\nu}{}_{\mu}\hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\nu}}) = L^{\nu}{}_{\mu}\bar{p}_{\nu}$$

o usando el inverso

$$\bar{p}_{\nu} = (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu}\, p_{\mu}$$

por lo tanto los componentes de las uno formas se transforman como los vectores bases, garantizando la invariancia de la contracción.

Podemos definir una base de uno-formas como

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = p_\mu \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}}$$

tal que

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}) = \delta^\mu{}_\nu$$

Viendo lo anterior es mas o menos intuitivo que las bases de uno-formas se transforman como vectores. Miremos

$$\begin{aligned} \bar{p}_\mu \bar{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\boldsymbol{\mu}} &= p_\mu \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}} \\ \bar{p}_\mu \bar{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{p}_\nu L^\nu{}_\mu \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}} \\ \bar{p}_\mu \bar{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{p}_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\nu}} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\bar{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\boldsymbol{\mu}} = L^\mu{}_\nu \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\nu}}$$

Problema: Tomemos la derivada de una función escalar $\Psi(x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$ donde τ es el **tiempo propio (proper time)** definido por

$$c^2 d\tau^2 = ds^2$$

La derivada es

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}$$

Dado que τ es un invariante, tenemos que los componentes

$$\left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \right]$$

forman el vector $\vec{\boldsymbol{U}}$ (que estudiaremos en detalle mas adelante). Por lo tanto los componentes

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}$$

describen la uno-forma $\tilde{\boldsymbol{d}}\Psi$. Para estar seguro, veamos si se transforman como la base de vectores. Notemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} = L^\nu{}_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^\nu}$$

Notemos que para la relatividad especial en la base estándar ahora podemos definir la uno-forma

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{d}} \to \left[\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla}\right]}$$

Para el caso general, ahora utilizaremos la notación

$$\Psi, \mu = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}$$

con lo cual obtenemos

$$x^\mu{}_{,\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

Podemos ahora mostrar que

$$\tilde{\boldsymbol{d}} x^\mu = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu$$

porque

$$\tilde{\boldsymbol{d}} x^\mu(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}) = \delta^\mu{}_\nu$$

Por lo tanto

$$\tilde{\boldsymbol{d}} f = f_{,\mu}\, \tilde{\boldsymbol{d}} x^\mu$$

4.4. Subir y bajar índices

En particular la métrica se puede utilizar para construir uno-formas con

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{A}},\ )$$

tal que

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}) = \left\langle \vec{\boldsymbol{A}} | \vec{\boldsymbol{B}} \right\rangle$$

Notemos que los componentes de $\tilde{\boldsymbol{A}}$ son

$$A_\mu = \tilde{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}}) = g(\vec{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}}) = A^\nu\ g(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}}) = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Definamos el inverso

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha{}_\mu$$

donde hemos asumido que el determinante es diferente a cero. Con esto podemos ver que

$$\boxed{V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \qquad\qquad V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu}$$

por lo tanto **g** se puede utilizar para bajar índices, osea convertir vectores en uno-formas, y el inverso con componentes $g^{\mu\nu}$ se puede utilizar para construir vectores a partir de uno-formas. Notemos que esto aplica **solo cuando hay una sumatoria implícita.**

Por eso que tiene sentido las definiciones anteriores que

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{d}} \rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla}\right]}$$

y en general

$$\boxed{d^\mu = g^{\mu\nu} d_\nu}$$

Para el caso de la relatividad especial, con la métrica η, podemos ver que

$$d^\mu = \eta^{\mu\nu} d_\nu \qquad \rightarrow \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla}\right]$$

como habiamos sugerido anteriormente.

Ahora podemos definir los tensores $\binom{M}{N}$, como funciones lineales en sus argumentos que mapean M uno-formas y N vectores a un numero real (nuevamente esto implica que es independiente del sistema de referencia).

4.5. Bases para tensores

Ahora podemos encontrar una base $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mu\nu}$ para todos los tensores $\binom{0}{2}$ tal que

$$\mathbf{f} = f_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu\nu}} = f_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\nu}}$$

donde $\otimes$ es el producto tensorial. Para dos vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$, tenemos

$$\mathbf{f}(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}) = f_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}} (A^\alpha \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}}) \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\nu}} (B^\beta \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\beta}}) = f_{\mu\nu} A^\alpha B^\beta \delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta = f_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$$

La transformación de los componentes de tensores entre sistemas de referencia es ahora estándar de definir. Notemos que en un nuevo sistema de referencia tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{\mu\nu} &= \mathbf{f}\left(\hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\nu}}\right) \\
&= f_{\alpha\beta}\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\alpha}} \left((L^{-1})^\gamma{}_\mu \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\gamma}} \right) \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\beta}} \left((L^{-1})^\xi{}_\nu \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\xi}} \right) \\
&= f_{\alpha\beta}\, (L^{-1})^\gamma{}_\mu (L^{-1})^\xi{}_\nu \delta^\alpha{}_\gamma \delta^\beta{}_\xi \\
&= f_{\alpha\beta} (L^{-1})^\alpha{}_\mu (L^{-1})^\beta{}_\nu
\end{aligned}$$

Finalmente, hay un producto tensorial que es importante tomar en cuenta, y es el producto tensorial antisim'etrico de dos formas

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{B}} - \tilde{\boldsymbol{B}} \otimes \tilde{\boldsymbol{A}}$$

Requiere de dos vectores para producir un numero real.

4.6. Formulación tensorial de la transformaciones de Lorenz

En general tenemos una medida de distancia dada por

$$ds^2 = dx^\mu \; g_{\mu\nu} \; dx^\nu$$

con los componentes $dx^\mu \rightarrow (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ del vector $d\vec{x}$. El producto escalar entre dos vectores es entonces

$$\left\langle \; \vec{\boldsymbol{A}} \mid \vec{\boldsymbol{B}} \; \right\rangle = A^\mu \; g_{\mu\nu} \; B^\nu \; .$$

Es importante notar que la convención de Einstein de sumatoria implícita solo la definimos cuando el índice repetido esta arriba y abajo respectivamente. Podemos definir la inversa como

$$\delta^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}$$

Tenemos la transformación afina

$$\overline{dx}^{\;\mu} = L^\mu{}_\nu dx^\nu$$

donde $L^\mu{}_\nu$ depende en general de las coordenadas. Notemos que aquí hay una sumatoria de Einstein implícita para ν. Por lo tanto todo objeto que se transforma de esta manera se le denomina **vector**. Los componentes de la **1-forma** asociada es entonces

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu$$

en la base estándar. Si queremos que la definición de distancia se mantenga invariante

$$\overline{dx}^{\;\mu} \eta_{\mu\nu} \overline{dx}^{\;\nu} = L^\mu{}_\alpha dx^\alpha g_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta dx^\beta = dx^\alpha \left(L^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta \right) dx^\beta$$

por lo tanto necesitamos que las transformaciones de Lorenz satisfagan

$$\boxed{L^\mu{}_\alpha \; g_{\mu\nu} \; L^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}}$$

que es equivalente a la definición matricial que teníamos anteriormente. Notemos que la sumatoria es sobre μ y ν. El inverso queda definido como

$$\boxed{\left(L^{-1}\right)^\gamma{}_\mu = g^{\gamma\beta} \; L^\nu{}_\beta \; g_{\nu\mu}}$$

con una sumatoria implícita en β y ν, tal que

$$\left(g_{\nu\mu}L^{\nu}{}_{\beta}g^{\gamma\beta}\right)\ L^{\mu}{}_{\alpha} = \left(L^{\mu}{}_{\alpha}\ g_{\mu\nu}L^{\nu}{}_{\beta}\right)\ g^{\gamma\beta} = g_{\alpha\beta}\ g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}{}_{\alpha}$$

ya que g es un tensor simétrico. Con estas definiciones reproducimos nuestros resultados anteriores que $g^{\mu\nu}$ sube un índice y que $g_{\mu\nu}$ baja un índice. Esto funciona para tensores de cualquier orden.

Los componentes de la uno-forma de primeras derivadas se define como

$$d_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

y por lo tanto los componentes del vector son

$$d^{\mu} = g^{\mu\nu}d_{\nu}$$

Por lo tanto la ecuación de onda

$$d_{\mu}d^{\mu} = 0$$

es también invariante en este formalismo. Antes de proseguir veamos porque las derivadas se definen al contrario de una primera intuición. Usando la ley de la cadena tenemos que las derivadas transforman como

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\nu}} = L^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\nu}}$$

Tratemos de invertir esta relación. Si partimos de la relación

$$d_{\mu} = L^{\nu}{}_{\mu}\bar{d}_{\nu}$$

podemos ahora construir la transformación del vector

$$d^{\alpha} = g^{\alpha\mu}d_{\mu} = \left(g^{\alpha\mu}L^{\nu}{}_{\mu}g_{\nu\beta}\right)\bar{d}^{\beta} = (L^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}\bar{d}^{\beta}$$

y por lo tanto

$$\bar{d}^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\ d^{\nu}$$

Vimos arriba que un tensor se transforma como

$$\bar{f}_{\mu\nu} = (L^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}\ (L^{-1})^{\beta}{}_{\nu}\ f_{\alpha\beta}$$

Organizando los componentes en $(L^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$ con la fila μ y la columna ν, vemos que esta precisamente corresponde a una transformación matricial de los componentes (cuando los arreglamos en la matriz $f_{\mu\nu} \rightarrow \mathbf{f}$)

$$\boxed{\bar{\mathbf{f}} = (\mathbf{L}^{-1})^{T}\mathbf{f}(\mathbf{L}^{-1})}$$

Hay que se cuidadoso, ya que tenemos la matriz inversa. Ahora si queremos mirar el tensor con los componentes

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\beta} g^{\alpha\nu} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{F} = \mathbf{g}^{-1}\ \mathbf{f}\ \mathbf{g}^{-1}$$

vemos que sus componentes se transforman como

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{F}} &= \mathbf{g}^{-1}\ (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{f}(\mathbf{L}^{-1})\ \mathbf{g}^{-1} \\
&= \mathbf{g}^{-1}\ \left(\mathbf{g}^{-1}\ \mathbf{L}^T\ \mathbf{g}\right)^T \mathbf{f}\ \left(\mathbf{g}^{-1}\ \mathbf{L}^T\ \mathbf{g}\right)\ \mathbf{g}^{-1} \\
&= \mathbf{L}\ \mathbf{g}^{-1}\ \mathbf{f}\ \mathbf{g}^{-1}\ \mathbf{L}^T \\
&= \mathbf{L}\ \mathbf{F}\ \mathbf{L}^T
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{g}^{-1}\ \mathbf{L}^T\ \mathbf{g}$ y $\mathbf{g}^T = \mathbf{g}$, ya que $\mathbf{g}$ es un tensor simétrico.

4.7. Caso particular: métrica de Minkowsky

En este caso la medida de distancia esta dada por

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 = dx^\mu\ \eta_{\mu\nu}\ dx^\nu$$

con los componentes $dx^\mu \rightarrow (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ del vector $d\vec{x}$ en la base estándar. El producto escalar entre dos vectores es entonces

$$\left\langle\ \vec{\boldsymbol{A}}\ |\ \vec{\boldsymbol{B}}\ \right\rangle = A^\mu\ \eta_{\mu\nu}\ B^\nu$$

con la definición

$$\eta_{\nu\mu} = \eta^{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lo que define la **métrica de Minkowsky**. Es importante notar que la convención de Einstein de sumatoria implícita solo la definimos cuando el índice repetido esta arriba y abajo respectivamente. Para este caso particular tenemos

$$\delta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}$$

Si asumimos que $L^\mu{}_\nu$ no depende de las coordenadas, tenemos la transformación afina que define globalmente la transformación de coordenadas

$$\bar{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \qquad \rightarrow \qquad \overline{dx}^{\ \mu} = L^\mu{}_\nu dx^\nu$$

Notemos que aquí hay una sumatoria de Einstein implícita para ν. Por lo tanto todo objeto que se transforma de esta manera se le denomina **vector**. Los componentes de la **1-forma** asociada es entonces

$$dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu \qquad \rightarrow \qquad (dx^0, -d\mathbf{r})$$

en la base estándar. Si queremos que la definición de distancia se mantenga invariante

$$\overline{dx}^{\ \mu}\eta_{\mu\nu}\overline{dx}^{\ \nu} = L^\mu{}_\alpha dx^\alpha \eta_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta dx^\beta = dx^\alpha \left(L^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta\right) dx^\beta$$

por lo tanto necesitamos que las transformaciones de Lorenz satisfagan

$$\boxed{L^{\mu}{}_{\alpha}\, \eta_{\mu\nu}\, L^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}}$$

que es equivalente a la definición matricial que teníamos anteriormente. Notemos que la sumatoria es sobre μ y ν. El inverso queda definido como

$$\boxed{(L^{-1})^{\gamma}{}_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\, L^{\nu}{}_{\beta}\, \eta^{\beta\gamma}}$$

con una sumatoria implícita en β y ν, tal que

$$L^{\mu}{}_{\alpha} \left(\eta_{\mu\nu} L^{\nu}{}_{\beta} \eta^{\beta\gamma}\right) = \delta^{\gamma}{}_{\alpha}$$

Con estas definiciones reproducimos nuestros resultados anteriores que $\eta^{\mu\nu}$ sube un índice y que $\eta_{\mu\nu}$ baja un índice. Esto funciona para tensores de cualquier orden.

En esta métrica con la base estándar ya vimos que los componentes de la uno forma de primeras derivadas se define como

$$\partial_{\mu} \to \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla}\right)$$

y los componentes del vector asociado es entonces

$$\partial^{\mu} \to \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla}\right)$$

Por lo tanto la ecuación de onda es

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

Antes de proseguir veamos porque las derivadas se definen al contrario de una primera intuición. Usando la ley de la cadena tenemos que las derivadas transforman como

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\nu}} = L^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\nu}}$$

Tratemos de invertir esta relación. Si partimos de la relación

$$\partial_{\mu} = L^{\nu}{}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu}$$

podemos ahora construir la transformación del vector

$$\partial^{\alpha} = \eta^{\alpha\mu}\partial_{\mu} = \left(\eta^{\alpha\mu} L^{\nu}{}_{\mu} \eta_{\nu\beta}\right) \bar{\partial}^{\beta} = (L^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} \bar{\partial}^{\beta}$$

y por lo tanto

$$\bar{\partial}^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, \partial^{\nu}$$

5. Dinámica

Definimos que los componentes de un **4-vector** se transforman como

$$\overline{dx}^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}$$

La posición de una partícula se transforma como un 4-vector y por lo tanto es un 4-vector. Es muy útil parametrizar las trayectorias en este espacio 4-D con un parámetro τ que es invariante

$$c^2 d\tau^2 = dx^{\mu} \eta_{\mu\nu} dx^{\nu} \qquad \rightarrow \qquad d\tau^2 = dt^2 \left(1 - v^2\right) = \frac{dt^2}{\gamma^2}$$

Por lo tanto, τ representa el tiempo medido en el sistema inercial en el que la partícula está momentáneamente en reposo $(ct, 0, 0, 0)$. Este parámetro invariante se denomina "proper time". Aquí suponemos que existen un número continuo de sistemas de referencia inerciales que se mueven momentáneamente con la partícula en reposo. Por ejemplo, la trayectoria se parametrizaría entonces como $x^{\mu}(\tau)$. Ya que el **proper time** es invariante podemos definir un 4-vector de velocidad de esta trayectoria

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \rightarrow (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

Partamos por la siguiente observación. Supongamos que tenemos un cuerpo que se mueve con velocidad v en el sistema **K**. El siguiente vector

$$U^{\mu} \rightarrow (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

se transforma como 4-vector. En particular vemos que si calculamos

$$\bar{U}^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}(v) U^{\nu} \rightarrow (c, 0, 0, 0)$$

Además

$$U^{\nu} U_{\nu} = c^2$$

lo que implica que L transforma algo con velocidad $\mathbf{v}$ a algo con velocidad $\mathbf{0}$, en este sistema de referencia $\bar{K}$ el cuerpo no se mueve. O sea que $L(\mathbf{v})$ transforma al sistema en que el cuerpo está momentáneamente con $\bar{\boldsymbol{v}} = 0$, el sistema de referencia en reposo momentáneo con el cuerpo. Nuestra transformación se define entre sistemas de referencia inercial, por lo tanto suponemos que existe un número continuo de sistemas de referencia inerciales que se mueven momentáneamente con la partícula en reposo. Como vimos anteriormente la norma de este vector es un invariante $U^{\nu} U_{\nu} = c^2$ y tiene el mismo valor en los dos sistemas de referencia, como debería ser.

5.1. Transformación de fuerzas

En forma trivial podemos definir el 4-vector de momento como

$$P^{\mu} \rightarrow (\gamma m c, \gamma m \mathbf{v})$$

Ya que la masa m es invariante. En el límite $\mathbf{v} \to 0$ tenemos

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0}(\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (mc, m\mathbf{v}) + O(\beta^2)$$

Es fácil darse cuenta que el momento definido de las leyes de Newton $m\mathbf{v}$, el cual se conserva en el sistema K, puede que no se conserve en el sistema $\bar{K}$. Necesitamos escribir las ecuaciones de Newton en forma invariante siguiendo el postulado del principio de relatividad (las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de onda, ya es invariante) con las siguientes reglas

- la ecuación debe de ser invariante escrita en término de 4-vectores
- en el límite $\mathbf{v} \to 0$, debemos recobrar la ecuación de Newton en su forma no relativista.

Una ecuación de movimiento que tiene forma invariante, que los dos lados de la ecuación se transforman de la misma forma, se denominan ecuación co-variante.

En el sistema K tenemos

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu$$

donde $\mathcal{F}$ es un 4-vector también. Esta definición es razonable, ya que la parte espacial del 4-vector de momento en el límite $\mathbf{v} \to 0$ converge al momento no-relativista. Usamos la segunda regla para transformar al sistema de referencia donde la partícula está instantáneamente en reposo. En este sistema tenemos

$$\frac{d\bar{P}^\mu}{d\tau} = m\left(\frac{d}{d\bar{t}}c, \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}\right) = m(0, \ddot{x}) = (0, \mathbf{F})$$

ya que la partícula está en reposo (instantáneamente) con $\mathbf{F}$ como la fuerza de Newton en su forma no relativista. Siendo que los componentes de la fuerza $\mathcal{F}^\mu$ se transforma como un 4-vector tenemos (usando $\mathbf{L}(-\mathbf{v})$)

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}) \\ \\ \mathbf{F} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{F}) \\ \\ \mathbf{F} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{F})\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

donde $\beta = \mathbf{v}/c$. Así, la fuerza $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3)$ es la fuerza de Newton $(0, \mathbf{F})$ con un "Boots"desde el sistema de referencia momentáneamente en reposo con la partícula.

Rápidamente nos damos cuenta de la dificultad de incluir campos electromagnéticos en esta descripción, la parte espacial para una partícula sería

$$\frac{dm\gamma\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\,,$$

ya que

$$\frac{1}{q}\boldsymbol{\mathcal{F}} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \frac{\gamma_o^2}{1+\gamma_o}\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v}_o \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})\mathbf{v}_o \\ \\ \gamma_o \frac{1}{c}(\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v}_o \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \end{array}\right)$$

por lo tanto si queremos que las ecuaciones la fuerza de Lorentz sea invariante vamos a tener que transformar también los campos.

5.2. La paradoja de los gemelos

Supongamos que tenemos dos gemelos. Mandamos a uno a la estrella mas cercana en un cohete que acelera la mitad del camino con $a = g$ y desacelera la segunda mitad del camino con $a = -g$. Lo mismo sucede de vuelta de la estrella. ¿Que edad tienen los gemelos al encontrarse?

En el sistema $\mathbf{K}$ las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= \frac{U^0(\tau)}{c}g & \rightarrow & \qquad \ddot{x}(\tau) = \dot{x}^0(\tau)\frac{g}{c} \\ \frac{dU^0}{d\tau} &= \frac{U(\tau)}{c}g & \rightarrow & \qquad \ddot{x}^0(\tau) = \dot{x}(\tau)\frac{g}{c} \end{aligned}$$

Podemos normalizar el tiempo $\tau \rightarrow \tau g/c$, las distancias $x \rightarrow xc^2/g$ y las velocidades $v \rightarrow \beta = v/c$. La solucion general es

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x(0) + [\gamma(0)\,(\cosh(\tau) - 1) + \beta(0)\sinh(\tau)] \\ t(\tau) &= t(0) + [\beta(0)\,(\cosh(\tau) - 1) + \gamma()\sinh(\tau)] \\ \beta(\tau) &= \left[\frac{\beta(0)\cosh(\tau) + \gamma(0)\sinh(\tau)}{\gamma(0)\cosh\tau + \beta(0)\sinh(\tau)}\right] \\ \gamma(\tau) &= \gamma(0)\cosh(\tau) + \beta(0)\sinh(\tau) \end{aligned}$$

En el primer cuarto de la trayectoria, $\tau = 0 \rightarrow \tau_1$ tenemos

$$x(0) = 0 \qquad t(0) = 0 \qquad \gamma(0) = 1 \qquad \beta(0) = 0$$

y tenemos que encontrar la edad de gemelo viajero τ_1 donde $x(\tau_1) = L$ es la mitad de la distancia a la estrella. Obtenemos

$$e^{\tau_1} = 1 + L + \sqrt{L(2+L)}$$

Con esta expresion podemos evaluar la edad del gemelo de la tierra

$$t(\tau_1) = \sqrt{L(2+L)}$$

Notemos que el limite clásico es $t \approx \sqrt{2L}$ para L pequeño. Las otras variables son

$$\beta(\tau_1) = \frac{\sqrt{L(2+L)}}{1+L} \qquad\qquad \gamma(\tau_1) = 1 + L = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(\tau_1)^2}}$$

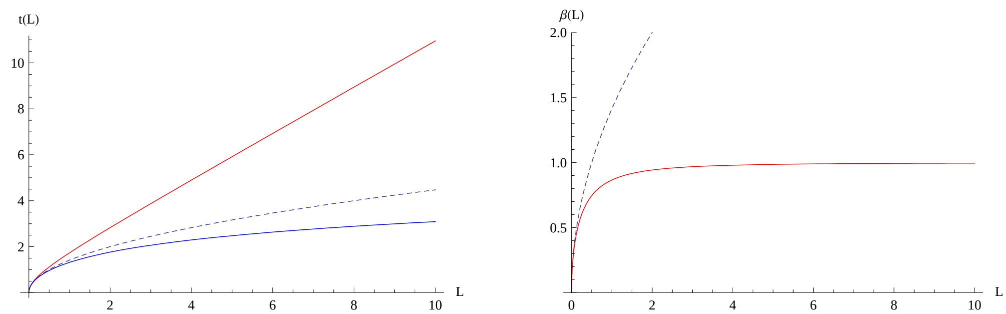


Figura 1: (a) La edad como funcion de la distancia recorrida L por una viajero clasico (punteada), el gemelo de la tierra (azul) y el gemelo viajero (rojo). (b) La velocidad de viajero con respecto a la tierra.

Pregunta: Cuanta masa (escriba la ecuación en el sistema del centro de momentum) se consumiría si nuestros motores convierten masa en energía con 100 % de eficiencia. Esta energía se utiliza para impulsar la nave. Compare con lo que se consumiría si el sistema no fuera relativistico.

5.3. Dinámica de una partícula

Si tomamos la transformación

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}) \\ \\ \mathbf{F} + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \tag{1}$$

vemos que para el caso de una fuerza en la dirección de la velocidad tenemos (por ejemplo un problema en una dimensión) la parte espacial nos da

$$m\frac{dm\gamma\mathbf{v}}{d\tau} = \gamma\mathbf{F}$$

y por lo tanto tiene sentido que la ecuación de movimiento para una partícula bajo la fuerza de Lorenz sea en el límite relativista

$$\frac{dm\gamma\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\,.$$

Este resultado no depende de si $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{F}$, ya que aplica para el caso de una transformación general, ya que precisamente el segundo termino $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$.

En el caso de una fuerza que se deriva de un potencial, podemos escribir

$$\frac{dm\gamma\mathbf{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi\,, \tag{2}$$

aun cuando técnicamente, esto debería funcionar **solo** para problemas en una dimensión (fuerzas donde $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{F}$). **La expresión correcta para re-escribir en forma relativista una fuerza clásica no-relativista debería ser Eq.1**.

Desde un punto de vista Lagrangiano vemos que podemos recuperar la ecuación para una partícula libre a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange si usamos

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}$$

De hecho si aceptamos el Lagrangiano

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - \Phi$$

y aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

aun cuando no estemos de acuerdo que esta expresión es correcta.

De esta formulación es trivial encontrar la formulación canónica y el Hamiltoniano. Hay tres cosas importantes de considerar:

- Primero, la energía cinética no aparece en el Lagrangiano. Es importante recordar que necesitamos un escalar para poder transformar el Lagrangiano a un sistema de variables generalizadas donde podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

- Segundo, la formulación es estrictamente no covariante ya que el tiempo aparece con un carácter especial. La idea es formular este sistema desde un punto de vista covariante en el que el tiempo y el espacio adquieren la misma relevancia.

- Tercero, este Lagrangiano no tiene ninguna propiedad de transformación especifica con respecto a las transformaciones de Lorentz. El principio de Hamilton debe de ser, en forma fundamental, covariante lo que implica que la integral de acción debe de ser un escalar invariante. Esto además implica que las derivadas deben de ser con respecto a un parámetro invariante. En nuestro caso usaremos τ "proper time".

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x^\mu, \dot{x}^\mu)d\tau \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

Para el caso de una partícula libre, podemos escribir

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}$$

Notemos que si re-escribimos la acción en termino de τ

$$\int L dt = \int (\gamma L) d\tau$$

vemos que

$$(\gamma L) = -mc^2 \qquad \rightarrow \qquad (\gamma L) \rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$$

Por lo tanto si

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L} = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \\ \\ p^\mu = m \dot{x}^\mu \end{array}\right\}$$

podemos construir el Hamiltoniano para una partícula libre como

$$\mathcal{H} = \frac{p^\mu p_\mu}{2m} \, ,$$

Para el caso de un potencial demos construir un Lagrangiano que de la ecuación de movimiento

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = K^u$$

para el caso de la fuerza de Lorenz, una forma relativamente trivial de escribir el Lagrangiano en forma covariante es usando formas covariantes, productos escalares de 4-vectores.

$$\left.\begin{array}{c} L = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \dfrac{q}{c} \dot{x}^\mu A_\mu \\ \\ A^\mu = (\Phi, A) \end{array}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\left(m \dot{x}_v + \frac{q}{c} A_v\right) = \frac{q}{c} \dot{x}^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^v}$$

El resultado de este análisis es la ecuación de movimiento en un campo electromagnético. De estas ecuaciones podemos derivar el momento canónico y su relación a la energía cinética

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = P_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \qquad \rightarrow \qquad T^2 = \left(p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu\right)^2 + m^2 c^4$$

y por lo tanto podemos construir

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{H} = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \dfrac{q}{c} \dot{A}^\mu x_\mu \\ \\ p^\mu = m \dot{x}^\mu + \dfrac{q}{c} A^\mu \end{array}\right\} \rightarrow \mathcal{H} = \frac{\left(p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu\right)}{2m}$$

con

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d\mathcal{H}}{dp^\mu}$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{d\mathcal{H}}{dx^\mu}$$

Este es el caso del Lagrangiano para una partícula. Cuando ponemos varias que se afectan entre si, se vuelve un problema complicado ya que entonces es difícil definir un “proper time” τ para todas las partículas. Este problema de definir una formulación Lagrangiana, principio de Hamilton, para varias partículas resulta muy complicado. Hay forma de manejar esto desde el punto de vista de los campos en una descripción cuántica de la dinámica.

5.4. Dinámica de varias partículas

Hay un gran problema al describir más de una partícula en este formalismo ya que no queda claro cual es el tiempo propio a usar. Al usar varias partículas el tiempo propio no es un parámetro apropiado para la descripción Lagrangiana. Este problema se resuelve en la mecánica cuántica al pasar a una teoría de campo donde el parámetro de los campos es el dx^4, el cual sí es un invariante de la dinámica.

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\tau \to \delta \int L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \ldots) dx^4$$

Pensemos en el Hamiltoniano

$$H = \sqrt{(P-A)^\mu (P-A)_\mu + m^2}$$

que ecuaciones da.

5.5. Energía y momento

Si tomamos la transformación

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \\ \\ \mathbf{F} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

vemos que para todo caso el componente temporal de esta ecuación es

$$m \frac{dm\gamma c^2}{d\tau} = \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

lo cual ya sugiere que $\epsilon = m\gamma c^2$ tiene algo que ver con la energía de la partícula. Tomemos la ecuación

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu$$

con la transformación de $\mathbf{F}$ a $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Vemos que para pequeñas velocidades tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &\simeq \mathbf{F} \\ \frac{d\epsilon}{dt} &\simeq \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

Hemos usado nuevamente el continuo de sistemas inerciales para expresar $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$. En analogía con el caso Newtoniano, vemos que podemos asociar el componente P^0 con la energía de una partícula ϵ,

$$\begin{aligned} \epsilon = \gamma mc^2 \quad &\rightarrow \quad P^\mu \rightarrow \left(\frac{\epsilon}{c}, \gamma \mathbf{p}\right) \\ P^\mu P_\mu = m^2c^2 \quad &\rightarrow \quad \epsilon^2 = \mathbf{p}^2c^2 + (mc^2)^2 \end{aligned}$$

ya que la norma de un 4-vector es invariante. Si expandimos esta forma de la energía para pequeñas velocidades tenemos

$$\epsilon = \gamma mc^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4)$$

Por lo tanto definimos mc^2 como la energía de un cuerpo en reposo. Hay dos temas fundamentales en esto:

- Otro tema interesante es que en el límite $m \rightarrow 0$ las partículas también transportan momentum y energía $P^\nu \rightarrow (pc, \mathbf{p})$, se mueven con velocidad $v = c$, pero no tienen un sistema de referencia inercial momentáneamente en reposo con ellas.

- Es muy interesante que la masa y la energía son intercambiables. En una colisión completamente inelastica dos partículas con energía inicial ϵ quedan en reposo después de chocar, lo que implica que la energía cinética fue convertida en un aumento de la masa inercial. La energía que debemos gastar en devolverles la energía cinética inicial a las partículas es

$$\left.\begin{array}{c} M = 2m + \Delta M \\ 2\epsilon = Mc^2 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta E = 2(T - mc^2) = \Delta M c^2$$

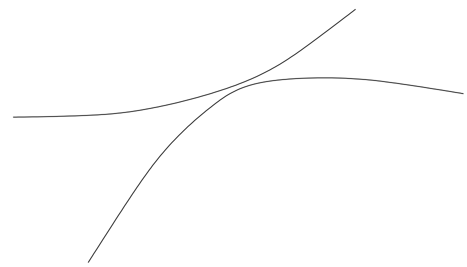
Esta es la famosa relación de Einstein.

5.6. Colisiones

En una colisión donde hay creación de otras partículas tenemos que mantenerla totalidad de la energía, cinética e inercial, en cuenta. En una colisión sabemos que el momento y la energía se conservan, por lo tanto el 4-vector también se conserva. El centro de momento (COM ya que masa no es algo que se conserva en relatividad) se define como el sistema de referencia donde la suma de todos los momentos (parte espacial de (P^1, P^2, P^3)) es cero. El laboratorio K y el COM $\bar{K}$ se conectan con una transformación de Lorentz. Para resolver problemas de colisiones, tenemos dos alternativas.

1. Usar escalares. como $P^\mu P_\mu$, que tienen el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales.

2. Resolver el problema en el COM y transformar los 4-vectores al laboratorio $\mathbf{K}$ usando un “Boost”.



Usaremos el primer método. Supongamos que tenemos una partícula de masa m_1 que choca con una partícula de masa m_2 en reposo. Relacionemos los ángulos de escatering (θ_1, θ_2) en el laboratorio con el ángulo de escatering en el COM (ϕ).

Para calcular el ángulo de escatering tenemos que conservar el momento y la energía, esto implica conservar el 4-vector de momento en todos los sistemas de referencia. Es conveniente multiplicar el 4-vector de momento por c y calcular todas las variables en término de energía. Convertir todas las masas a energía, mc^2 y las velocidades de los momentos a β, así la velocidad de la luz desaparece de nuestro problema. Usaremos mayúsculas para describir los componentes de 4 vectores $\mathbf{P} = (P^0, P^1, P^2, P^3)$ y minúsculas para describir los componentes de 3 vectores $\mathbf{p} = (P^1, P^2, P^3)$. Ahora, $\mathbf{P}$ representa un vector de 4-momento en el laboratorio y $\bar{P}$ el mismo vector en el COM. Por lo tanto tenemos los siguientes invariantes

$$\begin{aligned} r &= (\mathbf{P}_{1,o} + \mathbf{P}_{2,o})^2 &&= (\mathbf{P}_{1,f} + \mathbf{P}_{2,f})^2 \\ &= (\bar{\boldsymbol{P}}_{1,o} + \bar{\boldsymbol{P}}_{2,o})^2 &&= (\bar{\boldsymbol{P}}_{1,f} + \bar{\boldsymbol{P}}_{2,f})^2 \\ s &= (\mathbf{P}_{1,o} - \mathbf{P}_{1,f})^2 &&= (\mathbf{P}_{2,o} - \mathbf{P}_{2,f})^2 \\ &= (\bar{\boldsymbol{P}}_{1,o} - \bar{\boldsymbol{P}}_{1,f})^2 &&= (\bar{\boldsymbol{P}}_{2,o} - \bar{\boldsymbol{P}}_{2,f})^2 \end{aligned}$$

Estos invariantes relacionan $\mathbf{P}$ y $\bar{\boldsymbol{P}}$ en los dos sistemas de referencia y también la conservación del 4-momento.

En el laboratorio

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,o} &= \left(\sqrt{m_1^2 + p_o^2}, \mathbf{p}_o\right) &&\rightarrow \quad \mathbf{P}_{1,f} = \left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2}, \mathbf{p}_1\right) \\ \mathbf{P}_{2,o} &= (m_2, 0, 0, 0) &&\rightarrow \quad \mathbf{P}_{2,f} = \left(\sqrt{m_2^2 + p_2^2}, \mathbf{p}_2\right) \end{aligned}$$

La conservación de energía en este sistema de referencia es

$$m_2 + \sqrt{m_1^2 + p_o^2} = \sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_2^2}$$

En el COM

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{1,o} = \left(\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_o^2}, \bar{\boldsymbol{p}}_o\right) \quad \rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{P}}_{1,f} = \left(\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_f^2}, \bar{\boldsymbol{p}}_f\right)$$
$$\bar{\boldsymbol{P}}_{2,o} = \left(\sqrt{m_2^2 + \bar{p}_o^2}, -\bar{\boldsymbol{p}}_o\right) \quad \rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{P}}_{2,f} = \left(\sqrt{m_2^2 + \bar{p}_f^2}, -\bar{\boldsymbol{p}}_f\right)$$

La conservación de energía en este sistema de referencia es

$$\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_o^2} + \sqrt{m_2^2 + \bar{p}_o^2} = \sqrt{m_1^2 + \bar{p}_f^2} + \sqrt{m_2^2 + \bar{p}_f^2}$$

Notemos que podemos transformar entre estos dos sistemas de referencia. Asumamos que $\mathbf{p}_o = p_o \hat{\boldsymbol{x}}_1$. Debemos encontrar la transformación de Lorenz

$$\bar{\boldsymbol{P}}_1 + \bar{\boldsymbol{P}}_2 = L(v\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}})(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$$

que fuerza

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1 + \bar{\boldsymbol{p}}_2 = \{0, 0, 0\}$$

con lo cual podemos resolver

$$v = \frac{p_o}{m_2 + \sqrt{m_1^2 + p_o^2}}$$

Ahora queremos calcular los factores r y s de la colisión, para lo cual notamos que

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1^\mu P_{2,\mu} = m_1^2 + m_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
r &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\sqrt{m_1^2 + p_o^2} \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{m_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + p_2^2} - 2p_1p_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \\
s &= 2m_1^2 - 2\sqrt{m_1^2 + p_o^2}\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + 2p_op_1\cos(\theta_1) \\
&= 2m_2^2 - 2m_2\sqrt{m_2^2 + p_2^2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
r &= m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_o^2}\sqrt{m_2^2 + \bar{p}_o^2} + 2\bar{p}_o^2 \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_f^2}\sqrt{m_2^2 + \bar{p}_f^2} + 2\bar{p}_f^2 \\
s &= 2m_1^2 - 2\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_o^2}\sqrt{m_1^2 + \bar{p}_f^2} + 2\bar{p}_o\bar{p}_f\cos(\bar{\theta}_1) \\
&= 2m_2^2 - 2\sqrt{m_2^2 + \bar{p}_o^2}\sqrt{m_2^2 + \bar{p}_f^2} + 2\bar{p}_o\bar{p}_f\cos(\bar{\theta}_2)
\end{aligned}$$

Asumamos que $m_1 = m_2 = m$, y normalicemos todos los momentos a m. Notemos que en el CEM, tenemos

$$\bar{p}_o = \bar{p}_f = m\sqrt{-1 + \sqrt{1 + p_o^2}}$$

Por la misma razón que en mecánica clásica no se puede resolver completamente una colisión entre partículas puntuales sin información extra sobre la interacción.

6. Electromagnetismo

La parte espacial de la parte de Lorentz es

$$
\begin{aligned}
m\gamma\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} &= \gamma e\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) \\
m\gamma\frac{d(\gamma c)}{dt} &= \gamma\frac{e}{c}\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

la segunda relación se puede obtener multiplicando la primera por v. La parte izquierda de esta relación se puede escribir con 4-vector y por lo tanto es invariante en todos los sistemas de referencia. La parte de la derecha es mas difícil como vimos arriba. Esto implica que los campos también deben transformarse en una transformación de coordenadas. Si definimos el tensor electromagnético,

$$
F^{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}
$$

podemos definir la ecuación de movimiento en forma **covariante** como

$$
\frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{mc}F^{\mu\nu}P_{\nu}
$$

Es importante notar que es necesario definir los campos electromagnéticos como un tensor, no como un vector, ya que estos también se transforman en una transformación de Lorentz. Note que la última expresión es una contracción y por lo tanto es invariante en todos los sistemas inerciales. Esto implica que los campos eléctricos y magnéticos se transforman entre si *(ver Jackson 1974)*. Notemos que este tensor lo podemos escribir en forma invariante como

$$
\mathbf{F} = F_{\mu,\nu}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{2}F_{\mu,\nu}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\mu}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{\nu}}
$$

ya que es antisimetrico. Los componentes de del tensor se transforman como vimos anteriormente

$$
\boxed{\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\;\mathbf{F}\;\mathbf{L}^{T}}
$$

Notemos que esto tiene sentido ya que en forma matricial

$$
\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{q}{mc}\;\mathbf{F}\;\eta\;\mathbf{U}
$$

y dado que $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{L}\;\mathbf{U}$ y $\mathbf{L}^{T}\;\boldsymbol{\eta}\;\mathbf{L} = \boldsymbol{\eta}$, vemos que

$$
\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{d\tau} = \frac{q}{mc}\;\mathbf{L}\;\mathbf{F}\;\mathbf{L}^{T}\;\boldsymbol{\eta}\;\mathbf{L}\;\mathbf{U} = \frac{q}{mc}\;\bar{\mathbf{F}}\;\boldsymbol{\eta}\;\bar{\mathbf{U}}\,.
$$

Esto solo tiene sentido porque $\mathbf{L}$ es constante. Con esta transformación podemos resolver problemas complejos, transformando a un sistema de referencia donde la formulación resulte fácil, por ejemplo, al sistema de referencia donde la partícula está en reposo. Una transformación general a un sistema de referencia $\bar{\mathbf{K}}$ moviéndose con velocidad v con respecto al sistema $\mathbf{K}$, transforma los campos como

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \bar{\boldsymbol{E}} & = & \gamma(\mathbf{E}+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) - \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) \\ \bar{\boldsymbol{B}} & = & \gamma(\mathbf{B}-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}) - \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) \end{array}}$$

Esta transformación transforma solo los campos, además es necesario transformar la dependencia explícita de las variables entre los dos sistemas de coordenadas. O sea

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{L}(\mathbf{v}_o)\mathbf{x} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{L}(-\mathbf{v}_o)\bar{\boldsymbol{x}}$$

Los campos son entonces

$$\begin{array}{rcl} \bar{\boldsymbol{E}}(\bar{\boldsymbol{x}}) & = & \gamma_o(\mathbf{E}[\mathbf{x}]+\boldsymbol{\beta}_o\times\mathbf{B}[\mathbf{x}]) - \dfrac{\gamma_o^2}{\gamma_o+1}\boldsymbol{\beta}_o(\boldsymbol{\beta}_o\cdot\mathbf{E}[\mathbf{x}]) \\ & = & \gamma_o(\mathbf{E}[\mathbf{x}=\mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}]+\boldsymbol{\beta}_o\times\mathbf{B}[\mathbf{x}=\mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}]) - \dfrac{\gamma_o^2}{\gamma_o+1}\boldsymbol{\beta}_o(\boldsymbol{\beta}_o\cdot\mathbf{E}[\mathbf{x}=\mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}]) \\ \bar{\boldsymbol{B}}(\bar{\boldsymbol{x}}) & = & \gamma_o(\mathbf{B}[\mathbf{x}]+\boldsymbol{\beta}_o\times\mathbf{E}[\mathbf{x}]) - \dfrac{\gamma_o^2}{\gamma_o+1}\boldsymbol{\beta}_o(\boldsymbol{\beta}_o\cdot\mathbf{B}[\mathbf{x}]) \\ & = & \gamma_o(\mathbf{B}[\mathbf{x}=\mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}]+\beta_o\times\mathbf{E}[\mathbf{x}=\mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}]) - \dfrac{\gamma_o^2}{\gamma_o+1}\beta_o(\beta_o\cdot\mathbf{B}[\mathbf{x}=\mathbf{L}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}]) \end{array}$$

La transformación inversa se obtiene de $\mathbf{v}\rightarrow-\mathbf{v}$, y para pequeñas velocidades tenemos

$$\begin{array}{c} \bar{\boldsymbol{E}} \simeq (\mathbf{E}+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) \\ \bar{\boldsymbol{B}} \simeq (\mathbf{B}-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}) \end{array}$$

Ejemplo: Calcular los campos producidos por una partícula en movimiento con velocidad uniforme $\mathbf{v}_o$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$.

En el sistema en reposo de la partícula con espacio-tiempo $(c\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ tenemos

$$\bar{E} = -\frac{q}{\bar{r}^3}\{\bar{x},\bar{y},\bar{z}\} \qquad \bar{B}=0$$

Mientras que en el sistema del laboratorio con espacio tiempo (ct,x,y,z) la partícula se mueve con velocidad $v=v_o\hat{x}$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = L(v_o\hat{x})\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_o\gamma_o & 0 & 0 \\ -\beta_o\gamma_o & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\gamma_o - \beta_o\gamma_o x \\ -ct\beta_o\gamma_o + \gamma_o x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \gamma_o^2(x - v_o t)^2 + y^2 + z^2$$

con los campos transformados como

$$\mathbf{E} = \gamma_o \bar{\boldsymbol{E}} - \frac{\gamma_o^2}{\gamma_o + 1}\hat{\boldsymbol{x}}\beta_o^2 \bar{E}_x = \{\bar{E}_x, \gamma_o \bar{E}_y, \gamma_o \bar{E}_z\}$$

$$\mathbf{B} = \gamma_o \boldsymbol{\beta}_o \hat{\boldsymbol{x}} \times \bar{\boldsymbol{E}} = \gamma_o \beta_o \{0, -\bar{E}_z, \bar{E}_x\}$$

por lo tanto, los campos en término de las variables del laboratorio están dados por

$$\mathbf{E} = \{\bar{E}_x, \gamma_o \bar{E}_y, \gamma_o \bar{E}_z\} = \frac{q\gamma_o}{(\gamma_o^2(x - v_o t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\{x - v_o t, y, z\}$$

$$\mathbf{B} = \gamma_o \beta_o \{0, -\bar{E}_z, \bar{E}_x\} = \frac{q\gamma_o\beta_o}{(\gamma_o^2(x - v_o t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\{0, -z.y\}$$

Los campos se puede escribir en forma mas estandard como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{q(1 - \beta_o^2)}{R^2(1 - \beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}}\hat{\mathbf{R}} \\
\mathbf{B} &= \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$, y $\cos\theta = \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{R}}$. Vemos que el campo eléctrico es en la dirección radial instantánea, como si no hubiera retardo.

Ejemplo: Supongamos que tenemos un campo eléctrico $\mathbf{E}$ que es perpendicular a un campo magnético $\mathbf{B}$, ambos constantes en el tiempo y espacio. Que condiciones deben satisfacer estos campos para producir una ganancia ilimitada de energía en las partículas cargadas?

Primero encontraremos un sistema de referencia donde los campos son paralelos. Existe una multitud de sistemas en los cuales $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$ son paralelos. Utilizaremos el sistema que simplifica la transformación de los campos. Buscaremos una solución

$$\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}} = 0$$

con

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} &= \gamma\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\
\bar{\mathbf{B}} &= \gamma\left(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})
\end{aligned}$$

Dado que tenemos la restricción, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, y también

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{B}}$$

podemos ver que $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ o $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$.

Esta claro que podemos simplificar si asumimos que

$$\boldsymbol{\beta} = \alpha\, \mathbf{E} \times \mathbf{B} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = 0\,,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \gamma\,(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) &&= \gamma\,(\mathbf{E}(1 - \alpha B^2) + \alpha(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}) \\ \bar{\mathbf{B}} &= \gamma\,(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) &&= \gamma\,(\mathbf{B}(1 - \alpha E^2) + \alpha(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\mathbf{E}) \end{aligned}$$

Para el caso particular de $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \gamma\,(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) &&= \gamma\mathbf{E}(1 - \alpha B^2) \\ \bar{\mathbf{B}} &= \gamma\,(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) &&= \gamma\mathbf{B}(1 - \alpha E^2) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{0} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \left[1 - \alpha B^2\right] \left[1 - \alpha E^2\right]$$

con lo cual tenemos dos soluciones

$$\alpha_1 = \frac{1}{E^2} \qquad\qquad \alpha_2 = \frac{1}{B^2}\,.$$

Por lo tanto si $B > E$, dado que $\beta \leq 1$, tenemos que

$$\alpha = \frac{1}{B^2} \qquad \rightarrow \qquad \left[\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\beta} &=& \dfrac{E}{B}\hat{\mathbf{e}}_\perp \\ \\ \gamma &=& \dfrac{|B|}{\sqrt{B^2 - E^2}} \end{array}\right.$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}}\sqrt{B^2 - E^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto no hay ganancia de energía.

Mientras que si $E > B$ tenemos

$$\alpha = \frac{1}{E^2} \qquad \rightarrow \qquad \left[\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\beta} &=& \dfrac{B}{E}\hat{\mathbf{e}}_\perp \\ \\ \gamma &=& \dfrac{|E|}{\sqrt{E^2 - B^2}} \end{array}\right.$$

con

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{E}}\sqrt{E^2 - B^2} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos ganancia de energía.

Otra posibilidad, es mirar las ecuaciones de movimiento. Si normalizamos el tiempo propio con la girofrecuencia $\Omega = eB/mc$ y los campos con $\alpha = E/B$, podemos escribir

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos buscar soluciones del tipo $\mathbf{U}_o Exp[\lambda t]$, con lo cual tenemos que calcular los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ de arriba. La ecuación a resolver es

$$\lambda\left[\lambda^2 - (\alpha^2 - 1)\right] = 0$$

con lo cual vemos que

$$\lambda_0 = 0 \qquad\qquad \lambda_\pm = \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Si $\alpha > 1$, lo que implica que $E > B$, tenemos soluciones reales, y por lo tanto la energía puede aumentar ilimitadamente. En el caso contrario, no es así. Los vectores propios son

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_\pm = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mp\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solución completa

$$\mathbf{U}(\tau) = \sum_n^3 a_n \mathbf{V}_n e^{\lambda_n \tau} = \mathbf{V}\ e^{\mathbf{\Lambda}\tau}\ \mathbf{a}$$

se puede construir con estos vectores y valores propios, donde construimos la matriz $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_+, \mathbf{V}_-]$, la lista de coeficientes $\mathbf{a} = [a_0, a_+, a_-]$, y la matriz $\mathbf{\Lambda}$ diagonal con lo valores propios. Usando las condiciones iniciales

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{V}\ \mathbf{a}$$

vemos que

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1}\ \mathbf{U}(0)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{V}\ e^{\mathbf{\Lambda}\tau}\ \mathbf{V}^{-1}\ \mathbf{U}(0)$$

Esto es lo mismo que obtendríamos exponenciando la matriz $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{U}(\tau) = e^{(\mathbf{A}\tau)}\mathbf{U}(0)$$

Efecto Doppler: Una onda plana electromagnética de frecuencia $\bar{\omega}$, viaja en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ a través del vacío en el sistema $\bar{K}$. Los campos son

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{E}_0 \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})\hat{\mathbf{y}} \qquad\qquad \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \bar{B}_0 \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})\hat{\mathbf{z}}$$

Para satisfacer las ecuaciones de Maxwell en el vacío necesitamos que $\bar{k} = \bar{\omega}/c$ y $\bar{B}_0 = \bar{E}_0$. El sistema $\bar{K}$ se mueve a una velocidad $v\hat{\boldsymbol{x}}$ con respecto a nuestro sistema K. La transformación de los campos es por lo tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \bar{E}_0\gamma(1+\beta)\cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})\hat{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{B} &= \bar{E}_0\gamma(1+\beta)\cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Tenemos que transformar las coordenadas

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = L(v\hat{x}) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma t - \beta\gamma x \\ -c\beta\gamma t + \gamma x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t} = kx - \omega t = \gamma\left(\bar{k} - \beta\frac{\bar{\omega}}{c}\right)x - \gamma\left(\bar{\omega} - \beta\bar{k}c\right)t$$

En este caso tememos

$$\boxed{\omega = \gamma\,(1-\beta)\,\bar{\omega} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\bar{\omega}}$$

que representa el efecto Doppler. Por lo tanto si un emisor se aleja de nosotros este implica que la frecuencia disminuye y vemos un **corrimiento al rojo** mientras que si se acerca vemos un **corrimiento al azul**. Es interesante notar que la mayoría de las estrellas se alejan de nuestro sistema solar, lo cual es un argumento para la **teoría del Big-Bang**. Además

$$\boxed{k = \gamma\,(1-\beta)\,\bar{k} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\bar{k}}$$

que es equivalente a

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\bar{\lambda}$$

Por lo tanto la velocidad de la luz queda invariante

$$\bar{c} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{\omega}{k} = c$$

Notemos que en limite $\beta \to 0$ la

$$\lambda \to \infty \qquad\qquad \omega \to 0$$

En termino de la intensidad de la radiacion

$$\frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{x}}} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

esta diverge cuando $\beta \to \infty$.

Problema Derivar el efecto Doppler cuando el ángulo entre $\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\beta} = \beta \cos\theta$.

$$\bar{\omega} = \gamma(1 - \beta\cos\theta)\,\omega$$

Que implicancias tiene el ángulo θ?

6.1. Descripción de las ecuaciones de Maxwell

Definamos los 4-vectores

$$J^\alpha \to (c\rho, J) \qquad\qquad A^\alpha \to (\Phi, A)$$

La continuidad se puede expresar como

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

El 4-Tensor de segundo rango se puede reescribir como

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

o en forma tensorial como

$$F = F_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{d}} x^\mu \otimes \tilde{\boldsymbol{d}} x^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{d}} x^\mu \wedge \tilde{\boldsymbol{d}} x^\nu$$

mostrando explícitamente la antisimetria del tensor. Con esta descripción, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta}$$

Supongamos que utilizamos el Gauge de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

entonces vemos que esta ecuación es la ecuación de onda

$$\boxed{\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu}$$

Utilicemos la notación

$$A_{\alpha,\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \qquad A_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \qquad A_{,\beta} = \frac{\partial A}{\partial x^\beta}$$

Podemos tratar de definir el Lagrangiano de los campos como

$$\int L(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\lambda) dx^\mu \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial A_{\beta,\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial A_\beta} = 0$$

donde es factible definir en tensor de stress-energía

$$\frac{dL}{dx^\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} A_{\alpha,\mu} + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx^\nu} \left[\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu} - L\, \delta_\mu{}^\nu \right] = -\frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

y si L no depende de x^u, entonces definimos

$$T_\mu{}^\nu = \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu} - L\, \delta_\mu{}^\nu \qquad \rightarrow \qquad T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0$$

En el caso de electromagnetismo, en su formulación de la relatividad especial, podemos escribir la forma invariante, integrado sobre dx^4,

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\pi} \partial^\beta F_{\beta\alpha} = -\frac{1}{c} J_\alpha$$

que dan las ecuaciones de arriba.

Notemos que las ecuaciones homogéneas de Maxwell se puede expresar como

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$$

Para el caso de materiales, el tensor $F(E, B) \rightarrow G(D, H)$. Es muy instructivo mostrar que las ecuaciones de Maxwell se puede expresar en formulación geométrica como

$$\nabla F = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot F = \frac{4\pi}{c} J$$

La **ley de Ohm** en el sistema en reposo con el fluido se puede escribir como

$$J = \sigma E$$

La cual podemos escribir en **forma covariante** como

$$\boxed{J^\mu - \frac{1}{c}^2 (J^\nu U_\nu) U^\mu = \frac{\sigma}{c} F^{\mu\nu} U_\nu}$$

7. La métrica de Riemann g

Notemos que todo el análisis que hemos realizado hasta ahora funciona perfectamente para un espacio donde la métrica g depende del espacio-tiempo. La única diferencia esta en que hemos usado un sistema de coordenadas que tienen una base constante en el espacio-tiempo, y por lo tanto

$$\frac{d}{dx_i}\hat{\boldsymbol{e}}_j = 0$$

Ahora veremos que pasa cuando este no es el caso.

7.1. Derivadas covariantes

Notemos que es muy importante darse cuenta que las leyes de la física están escritas en termino de derivadas de campos, por lo tanto se hace necesario escribirlas en una forma que sea invariante en todos los sistemas de coordenadas. Esto implica escribir las leyes físicas en términos de tensores y sus derivadas.

Por ejemplo, un vector cualquiera en un sistema coordenado tiene componentes $\vec{V} \to \{\vec{V}^0, \vec{V}^1, \vec{V}^2, \vec{V}^3\}$, y su derivada es

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{;\mu} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{V}}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(V^\nu \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}) = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}} + V^\nu \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\mu}} + V^\nu \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\, \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

que define los símbolos de Chistoffel y la **derivada covariante**. La derivada covariante es la forma de incluir la curvatura en las leyes físicas cuando estas están descritas por vectores. Notemos que la última expresión tiene sentido porque los $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}$ forman una base. Con un poco de trabajo es posible demostrar:

$$\Gamma^i_{jk} = g^{im}\sum_i \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j}\right] = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right)$$

Note que los símbolos de Chistoffel

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\, \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}}}$$

se calculan de una vez para una métrica dada.

Problema: construya los símbolos de Christoffel para bases polares (esto es aun un espacio plano):

Vamos a representar una trayectoria en el sistema cartesiano de coordenadas polares. Definimos

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

lo que define la transformación

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

Definamos el inverso

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{1}{r}\sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{\Lambda\Omega} = \mathbf{1}$.

Dada una transformación

$$\mathbf{dx} = \mathbf{\Lambda}\overline{\mathbf{dx}}$$

podemos relacionar

$$ds^2 = \mathbf{dx}^T\mathbf{g}\mathbf{dx} = \overline{\mathbf{dx}}^T \left[\mathbf{\Lambda}^T\ \mathbf{g}\ \mathbf{\Lambda}\right] \overline{\mathbf{dx}}$$

y por lo tanto en esta base polar tenemos la métrica

$$\bar{\mathbf{g}} \to \mathbf{\Lambda}^T\ \mathbf{g}\ \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Las bases se transforman como

$$\hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}$$

diferentes a los vectores, podemos encontrar

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} &= \Lambda^1{}_1\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}} + \Lambda^2{}_1\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}} &&= \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} &= \Lambda^1{}_2\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}} + \Lambda^2{}_2\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}} &&= -r\sin\theta\hat{x} + r\cos\theta\hat{y} \end{aligned}$$

Notemos que la nueva métrica se puede calcular a partir de

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\nu}}) = \hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\mu}}^T\ \mathbf{g}\ \hat{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{\nu}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Las derivas de las bases se pueden evaluar como

$$\begin{aligned} \partial_r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} &= 0 \\ \partial_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} &= \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}/r \\ \partial_r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}/r \\ \partial_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} &= -r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

Un vector general en este sistema de coordenadas es (V^r, V^θ), y su derivada es

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\boldsymbol{V}}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(V^i \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(V^r \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + V^\theta \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \frac{\partial V^r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial V^\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + V^r \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r}
\end{aligned}
$$

y de la misma manera para la derivada θ. Los símbolos de Chistoffel son:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma^r{}_{rr} = 0 & \Gamma^\theta{}_{rr} = 0 \\
\Gamma^r{}_{r\theta} = 0 & \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^r{}_{\theta r} = 0 & \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r & \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0
\end{array}
$$

También, podemos construir bases para las uno-formas. En la base estándar tenemos

$$
\tilde{\boldsymbol{d}}x = \{1, 0\} \qquad \tilde{\boldsymbol{d}}y = \{0, 1\}
$$

mientras que los componentes de las uno-formas se transforman como

$$
\bar{p}_\mu = \Omega^\nu{}_\mu p_\nu
$$

Por lo tanto en la base polar podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{d}}r = \Omega^1{}_1 \tilde{\boldsymbol{d}}x + \Omega^2{}_1 \tilde{\boldsymbol{d}}y &= \cos\theta \tilde{\boldsymbol{d}}x + \sin\theta \tilde{\boldsymbol{d}}y \\
\tilde{\boldsymbol{d}}\theta = \Omega^1{}_2 \tilde{\boldsymbol{d}}x + \Omega^2{}_2 \tilde{\boldsymbol{d}}y &= -\frac{1}{r}\sin\theta \tilde{\boldsymbol{d}}x + \frac{1}{r}\cos\theta \tilde{\boldsymbol{d}}y
\end{aligned}
$$

Dado que la uno-forma tiene componentes

$$
d_\mu \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}
$$

podemos calcular el vector

$$
d^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu}\, d_\nu \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}
$$

donde hemos usado el inverso de $\mathbf{g}$.

Problema: Demostrar que los simbolos de Chistoffel para el caso polar se pueden derivar de la metrica con la expresion escrita arriba.

Notemos que las **derivadas covariantes** se pueden escribir como

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}}_{\;;\mu} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{V}}}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + V^\alpha \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}}$$

por lo tanto podemos definir

$$\boxed{V^\nu{}_{;\mu} = V^\nu{}_{,\mu} + V^\alpha \; \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}}$$

con lo cual encontramos

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}}_{\;;\mu} = V^\nu{}_{;\mu} \; \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}}$$

lo cual es un resultado importantísimo, ya que dice que en el nuevo sistema de referencia, donde las bases no son constantes, esta expresión permite tratar los componentes como si fueran invariantes.

Nota: uno de los postulados de la relatividad general es que siempre existe una base, al menos localmente, donde la métrica es constante e igual a la de Minkowsky. Esto implica que en esta base $\bar{K}$, tenemos

$$V^\nu{}_{\;;\mu} = \bar{V}^\nu{}_{\;,\mu}$$

Vemos inmediatamente como se puede transformar una ley física descrita en el sistema de Minkowsky local, para que funcione en el sistema de coordenadas general, con o sin curvatura.

Notemos que podemos definir el tensor $\binom{1}{1}$, denominado la derivada covariante $\nabla \vec{\boldsymbol{V}}$ del vector $\vec{\mathbf{V}}$, que mapea el vector $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\nu}}$ en el vector $\vec{\boldsymbol{V}}_{;\mu}$, y tiene componentes

$$\left(\nabla \vec{\boldsymbol{V}}\right)^\nu{}_\mu = \left(\nabla_\mu \vec{\boldsymbol{V}}\right)^\nu = V^\nu{}_{;\mu}$$

Notemos que en una base tipo Minkowsky (aveces denominada cartesiana donde la métrica es constante), tenemos que los componentes de este tensor son $V^\mu{}_{,\nu}$. Asimismo, para el caso de un escalar, vemos que la definición de la derivada covariante es

$$\nabla \Phi = \tilde{\boldsymbol{d}} \Phi$$

ya que un escalar no depende de la base.

Notemos que podemos definir la divergencia haciendo una contracción, la cual es independiente del sistema de coordenadas

$$V^\mu{}_{;\mu}$$

Por ejemplo, en coordenadas polares tenemos la divergencia

$$\begin{aligned} V^\mu{}_{;\mu} &= V^r{}_{,r} + V^\theta{}_{,\theta} + V^r\left[\Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{r\theta}\right] + V^\theta\left[\Gamma^r{}_{\theta r} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\right] \\ &= V^r{}_{,r} + V^\theta{}_{,\theta} + V^r\left[\frac{1}{r}\right] \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rV^r)}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial\theta} \end{aligned}$$

Esta es la formula que estamos acostumbrado, excepto por el hecho que en nuestra definición el vector de la base $\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\theta}}$ no es unitario en la forma que estamos acostumbrado. En libros de calculo, es costumbre forzar a que las bases sean unitarias, con lo cual la divergencia quedaría

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(rV^r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V^\theta}{\partial\theta}$$

Nosotros mantendremos la notación que hemos estado usando aquí.

Ahora queremos construir el Laplaciano de un escalar. Usando $\vec{\mathbf{d}}\Phi = \mathbf{g}^{-1}\,\tilde{\mathbf{d}}\Phi$, podemos escribir en forma invariante, usando la derivada covariante,

$$\nabla\cdot(\vec{\mathbf{d}}\Phi) = \left(\left(\vec{\mathbf{d}}\Phi\right)^\mu\right)_{;\mu} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

la cual es igual a

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

como debería ser.

Que pasa con las derivadas de uno-formas. Calculemos la derivada del escalar $\Phi = p_\mu V^\mu$,

$$\begin{aligned} \nabla_\beta\Phi = \Phi_{,\beta} &= \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\beta}V^\mu + p_\mu\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\beta}V^\mu + p_\mu V^\mu{}_{;\beta} - p_\mu V^\mu\Gamma^\mu{}_{\mu\beta} \\ &= \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^\beta} - p_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)V^\mu + (p_\mu V^\mu{}_{;\beta}) \end{aligned}$$

por lo tanto dada la ley de la cadena para las derivadas, podemos definir $(\nabla_\beta\tilde{\boldsymbol{p}})_\alpha = (\nabla\tilde{\boldsymbol{p}})_{\alpha\beta} = p_{\alpha;\beta}$, donde

$$\boxed{p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}}$$

y así tenemos

$$\nabla_\beta (p_\alpha V^\alpha) = p_{\alpha;\beta} V^\alpha + p_\alpha V^\alpha{}_{;\beta}$$

De la misma forma podemos demostrar que

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \\
\nabla_\beta T^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu}_{,\beta} + T^{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + T^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \\
\nabla_\beta T^\mu{}_\nu &= T^\mu{}_{\nu,\beta} + T^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - T^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}
\end{aligned}$$

con lo cual podemos escribir las ecuación de Maxwell en cualquier base, partiendo de su representación en el sistema local de Minkowsky, como

$$\partial_\mu F^{\mu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \qquad \to \qquad \nabla_\mu \bar{F}^{\mu,\nu} = \frac{4\pi}{c} \bar{J}^\nu$$

donde $\bar{J}^\nu$ y $\bar{F}^{\mu,\nu}$ representan los componentes del vector de corriente y el tensor electromagnético en el sistema descrito por la métrica $\mathbf{g}$. Notemos que escribir es ahora simple en el nuevo sistema $\bar{J}^\nu$ y $\bar{F}^{\mu,\nu}$.

Problema: Calcular las ecuaciones de Maxwell en Polares.

Problema: Calcular las ecuaciones de Maxwell en Esfericas y Cilindricas.

7.2. Posibles axiomas para la física en el espacio curvo

1. El espacio–tiempo es un sistema múltiple de 4-D con una métrica.

2. La métrica es medible por *rods* y relojes.

3. La métrica se puede poner en la forma de Lorentz η localmente por una opción particular de coordenadas. Esto significa que el espacio es localmente plano y que la ecuación de movimiento puede ser escrito como antes en notación de tensores, pero con la posibilidad de una métrica curva.

4. Partículas en caída libre siguen (time-like) geodésicas.

5. Cualquier ley física que se pueda expresar en notación tensorial en relatividad especial tiene exactamente la misma forma en un sistema inercial local. En general este sistema de referencia no es global. Para describir la física en forma global, tenemos que cambiar solamente todas las derivadas en derivadas covariantes para hacer las ecuaciones del movimiento válidas en todos los sistemas coordenados

Por ejemplo, podemos notar que todos los términos se transforman en forma apropiada bajo una transformación de coordenadas, lo que implica que seria bueno mapear las ecuaciones de Newton en estos términos. Partimos en un sistema Cartesiano y una ley de fuerza como función de x y derivadas con respecto a x. Luego transformamos a un sistema curvo para escribir la ley general. La misma idea aplica a las ecuaciones de Maxwell, pero reformuladas en termino de derivadas covariantes.

Finalmente, ponemos como referencia la ecuación dinámica para la métrica

$$G^{\alpha\beta} + \lambda g^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$$

con

$$G^{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$$

como el tensor de Einstein. Además

1. λ es la constante cosmológica que incluye energías en el background.
2. $T^{\alpha\beta} = (P + \rho)\, U^{\alpha} U^{\beta} + p g^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{EM}$ (para un fluido perfecto) corresponde al tensor energía-stress
3. $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu}$ es el tensor de curvatura Riemanniana
4. $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ es el escalar de Ricci

8. Formulación Lagrangiana

-partículas
-campos

9. Termodinámica y fluidos

-fluidos perfectos
-termodinámica