

Capítulo 5: Radiación y Antenas

En este capítulo discutiremos soluciones de las ecuaciones de Maxwell.

Índice

1. Ecuación de onda	3
1.1. Ecuación de onda escalar en 1D para el espacio infinito	3
1.2. Función de Green en coordenadas cartesianas para el espacio infinito	3
1.2.1. Solución en el espacio $\mathbf{x} - \omega$	4
1.2.2. Solución en el espacio $\mathbf{k} - \omega$	5
1.3. Campos producidos por una partícula	6
1.4. Caso: velocidad constante	8
1.5. Caso: radiación para una partícula acelerada	10
1.5.1. Caso $\beta \neq 0$ con $\beta \ll 1$	11
1.5.2. Movimiento colineal	11
1.5.3. Movimiento colineal relativista	13
1.5.4. Movimiento circular	14
2. Vector de Hertz: otra formulación	15
2.1. El caso de materiales	15
3. Ecuación de onda: campo lejano	17
4. Ecuación de onda escalar: oscilaciones harmónicas	22
4.1. Función de Green en coordenadas cartesianas para el espacio infinito	23
4.2. Función de Green en coordenadas esféricas para el espacio infinito	23
5. Ecuación de onda vectorial: oscilaciones harmónicas	24
5.1. En coordenadas esféricas	25
5.2. Fuente Localizada	29
6. Ecuación de onda escalar: campo lejano para oscilaciones harmónicas	32
6.1. Fuente localizada	33
6.2. Zonas lejanas	35
6.2.1. Primer termino $n = 0$	36
6.2.2. Segundo termino $n = 1$	39
7. Escatering para $k_o d \ll 1$	39
7.1. Colección de escateres	41
7.2. Escatering de Raleigh	41
8. Teoría de difracción escalar $k_o d \gg 1$	44
9. Teoría de difracción vectorial $k_o d \gg 1$	47
9.1. Que pasa en el limite $k_o d \sim 1$	49

1. Ecuación de onda

Si utilizamos el Gauge de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, tenemos que resolver 4 ecuaciones de onda

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Separando los potenciales, podemos escribir

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

1.1. Ecuación de onda escalar en 1D para el espacio infinito

Si trabajamos este problema en coordenadas cartesianas, vemos que en realidad necesitamos resolver el problema de onda escalar. Si expandimos el Laplaciano vectorial $\nabla^2 \mathbf{A}$ en otro sistema de coordenadas, el problema se torna un poco mas difícil y es un problema de ecuación de onda vectorial que veremos mas adelante.

Por lo tanto, comencemos con el problema de la ecuación de ondas escalar en una dimensión. Y en particular veamos el caso sin fuente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi(x, 0) = f(x) \qquad \psi_t(x, 0) = g(x)$$

Que tiene solución en el espacio infinito de la forma

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

Que implica que se generan dos ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda.

1.2. Función de Green en coordenadas cartesianas para el espacio infinito

Para el problema general en el que estamos interesados, necesitamos resolver la ecuación de ondas en varias dimensiones con una fuente arbitraria

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(x, t)$$

Necesitamos construir la función de Green para la ecuación de onda escalar en la base natural

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} G = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \delta(t - \bar{t})$$

tal que

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) d\bar{x}^3 d\bar{t}$$

1.2.1. Solución en el espacio $\mathbf{x} - \omega$

Usamos el método de la transformada de Fourier para resolver esta ecuación, donde

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \bar{f}(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

con las relaciones de completitud

$$\delta(t - \bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\bar{t})} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\bar{t}-t)} d\omega$$

En el caso de los problemas con condiciones iniciales, puede resultar más útil usar una transformación de Laplace.

Para el caso de la función de Green podemos escribir

$$G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\mathbf{x}, \omega, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) e^{-i\omega t} d\omega$$

con lo que obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 \bar{G} + k_o^2 \bar{G}) e^{-i\omega t} d\omega = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \delta(t - \bar{t})$$

donde $k_o = \omega/c$. Ahora aplicamos el proyector

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$$

lo que nos permite encontrar

$$\nabla^2 \bar{G} + k_o^2 \bar{G} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) e^{i\omega \bar{t}}$$

Definamos

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \omega, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \sqrt{2\pi} \bar{\bar{G}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) e^{i\omega \bar{t}}$$

Esta nueva función satisface

$$\nabla^2 \bar{\bar{G}} + k^2 \bar{\bar{G}} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad \rightarrow \quad \bar{\bar{G}} = A \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|} + B \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}$$

cuya solución converge cuando $k|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| \rightarrow 0$ (solución electrostática), lo que implica $A + B = 1$, e incluye la función delta. Las dos soluciones implican dos condiciones de borde diferentes en el tiempo, i.e., (a) función de Green retardada o causal con ondas de propagación hacia el infinito y (b), función de Green avanzada o no causal con ondas de propagación desde el infinito. Generalmente tomamos la solución

$$\bar{\bar{G}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}$$

Ahora debemos de volver a la forma $G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$

$$G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|} e^{-i\omega(t-\bar{t})} d\omega = \frac{\delta \left[\bar{t} - \left(t - \frac{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}{c} \right) \right]}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}$$

Vemos que si hubiéramos mantenido las dos soluciones, tendríamos soluciones de retardo o avance dependiendo de la función de Green. En general, estamos interesados en la función retardada que garantiza causalidad, donde la solución general

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})]_{ret}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|} d\bar{x}^3$$

con la definición de retardo

$$\bar{t}(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}) = t - \frac{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}{c}$$

que garantiza que la fuente no contribuya antes que se vuelva activa. Esta ultima ecuación puede tener varias soluciones, dependiendo del problema.

1.2.2. Solución en el espacio $\mathbf{k} - \omega$

Como estamos interesados en el espacio infinito, hacemos una expansión de la función de Green en funciones propias de la ecuación de onda sin bordes.

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\bar{G}}(k, \omega, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\omega d^3 k \\ \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \delta(t - \bar{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})} e^{-i\omega(t - \bar{t})} d\omega d^3 k \end{aligned}$$

Incluimos un término disipativo,

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \delta(t - \bar{t})$$

con $\varepsilon > 0$, que da la flecha en el tiempo que discutimos antes. Esto es equivalente a la disipación en el péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_o^2 \sin \theta = 0$$

Con esta expansión, obtenemos

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\varepsilon\right) \bar{G} = -\frac{4\pi}{(2\pi)^2} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{x}})} e^{i\omega\bar{t}}$$

Primero hacemos la integración en $dk^3 = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \omega, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{i\omega\bar{t}}}{(2\pi)^{3/2}} \int dk^3 \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\varepsilon}$$

con $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = k|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| \cos \theta$

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{x}, \omega, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{i\omega\bar{t}}}{i|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} \int_0^\infty k dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|} - e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{(k + (\omega/c) + ci\varepsilon)(k - (\omega/c) - ci\varepsilon)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{i\omega\bar{t}}}{i|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} \int_{-\infty}^\infty k dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{(k + (\omega/c) + ci\varepsilon)(k - (\omega/c) - ci\varepsilon)} \end{aligned}$$

Esta integral es hecha por una continuación analítica del integrando al plano complejo, y seleccionando los contornos apropiados. Un integrando requiere acercarse en el plano superior, y el otro en el inferior. Recordemos que los contornos deben ser en el sentido de las agujas del reloj. La integral es par, así que puede ser extendida a menos infinito, entonces

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \omega, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\omega\bar{t}} \frac{2\pi e^{ik_o|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}$$

Desarrollamos la integral en el espacio ω para obtener

$$\bar{G}(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t-\bar{t})} e^{ik_o|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|} = \frac{\delta\left(\bar{t} - t + \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}$$

Y obtenemos el mismo resultado anterior, pero sin ningún argumento de causalidad, etc.

1.3. Campos producidos por una partícula

Para el movimiento general de cargas, usaremos transformaciones de campos en una forma covariante cuando estudiemos relatividad, pero por ahora podemos usar esta expresión para el caso de una particular

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$$

para lo que podemos escribir la solución inmediatamente como

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e \int \frac{\delta\left(\bar{t} - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|} d\bar{t}$$

Para integrar esta ecuación debemos hacer un cambio de variables

$$\begin{aligned} \tau &= \bar{t} - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|}{c} \\ d\tau &= d\bar{t} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{d}{d\bar{t}} |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|\right) = d\bar{t} \left[1 - \left(\boldsymbol{\beta}(\bar{t}) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|}\right)\right] \end{aligned} \quad (1)$$

de esto, obtenemos, usando

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{x} - \mathbf{r}(t) \\ \boldsymbol{\beta}(t) &= \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \\ K(t) &= R(t) - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{1}{K} \right]_{ret} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{K} \right]_{ret} \end{aligned}$$

evaluado (con el paréntesis cuadrado) en el tiempo retardado $\bar{t}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ que se resuelve de

$$\bar{t} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|}{c}$$

Esto significa que para un tiempo t y una posición x dada, tenemos que resolver esta ecuación, con lo que obtenemos $\bar{t}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$.

Los campos pueden ser calculados de la manera usual, para obtener

$$\mathbf{E} = e \left[\frac{1}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} \right]_{ret} + \frac{e}{c} \left[\frac{1}{R} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times ((\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} \right]_{ret}$$

y el campo magnético es

$$\mathbf{B} = \left[\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E} \right]_{reta}$$

Notemos que el campo está evaluado en la posición retardada $\mathbf{r}(\bar{t})$, donde la partícula estaba al momento en que la onda fue emitida. Además, los campos radiados ($\sim R^{-1}$) se producen cuando aceleramos cargas. Para una trayectoria dada, podemos calcular los campos inducidos por la carga en movimiento en el espacio y el tiempo. Una forma de calcular esto es graficarlo en Mathematica y ver su evolución.

Definamos la función

$$f(\mathbf{x}, t, \bar{t}) = c(\bar{t} - t) + |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})| = c(\bar{t} - t) + \sqrt{x^2 + r(\bar{t})^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}(\bar{t})}$$

para la cual tenemos que encontrar sus ceros \bar{t}_i . Si buscamos las soluciones causales, entonces la señal parti3 antes de ser recibida, esto es $\bar{t} \leq t$. Adem3s, $f(\bar{x}, t, t) > 0$. Notemos que si $\beta < 1$ esta funci3n tiende a $\pm\infty$ para $\bar{t} \rightarrow \pm\infty$, por lo tanto hay un cero por lo menos. Calculemos la derivada de esta ecuaci3n con respecto a \bar{t} ,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} = 1 + \frac{(\mathbf{r}(\bar{t}) - \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|} \cdot \boldsymbol{\beta}(\bar{t})$$

Por lo tanto

- Si $\beta < 1$ entonces esta derivada es positiva, y existe una soluci3n causal $\bar{t} \leq t$ y se utiliza las expresiones de arriba para los campos
- si $\beta > 1$ pueden existir mas de una soluci3n para alg3n x, t . Estas soluciones hay que tomarlas en cuenta y sumar los campos producidas por ellas

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{E}[\bar{t}_i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t]$$

ya que al hacer la transformaci3n $c\tau = c(t - \bar{t}) + |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|$ hay que considerar todos los ceros que se obtienen de evaluar la funci3n delta.

En particular, podemos calcular la energ3a radiada como

$$\frac{dP}{d\Omega} = (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{x}}) x^2 \quad \rightarrow \quad P_{tot} = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$$

lejos de la fuente.

1.4. Caso: velocidad constante

En este caso tenemos

$$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\beta}_o t$$

donde hemos normalizado el tiempo y el espacio apropiadamente. Buscando soluciones f3sicas escribimos

$$\bar{t}^2(1 - \beta_o)^2 + \bar{t}(2\boldsymbol{\beta}_o \cdot \mathbf{x} - 2t) + (t^2 - x^2) = 0$$

que tiene soluci3n

$$\bar{t} = \frac{(t - \boldsymbol{\beta}_o \cdot \mathbf{x}) \pm \sqrt{(\boldsymbol{\beta}_o \cdot \mathbf{x} - t)^2 - (t^2 - x^2)(1 - \beta_o^2)}}{(1 - \beta_o^2)}$$

Para el caso particular de $\beta_o < 1$ tenemos una solución física $t > \bar{t}$, que esta dada por

$$\bar{t} = \frac{(t - \beta_o \cdot \mathbf{x}) - \sqrt{(\beta_o \cdot \mathbf{x} - t)^2 - (t^2 - x^2)(1 - \beta_o^2)}}{(1 - \beta_o^2)}$$

donde el campo electromagnético esta dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e\hat{\mathbf{n}}(t)(1 - \beta^2)}{R^2|1 - \beta^2 \sin^2 \theta|^{3/2}}$$

donde en este caso muy particular $\mathbf{n}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t)$, osea el campo apunta en todo el espacio a la dirección instantánea en tiempo t , y no en \bar{t} . Esto es como si no hubiera retardo, pero es consistente con la teoría de la relatividad. Esto solo se da para el caso particular de una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Los patrones de radiación se ven en la Fig. 1 para diferentes velocidades donde podemos observar este efecto particular. Este resultado ya lo calculamos en relatividad.

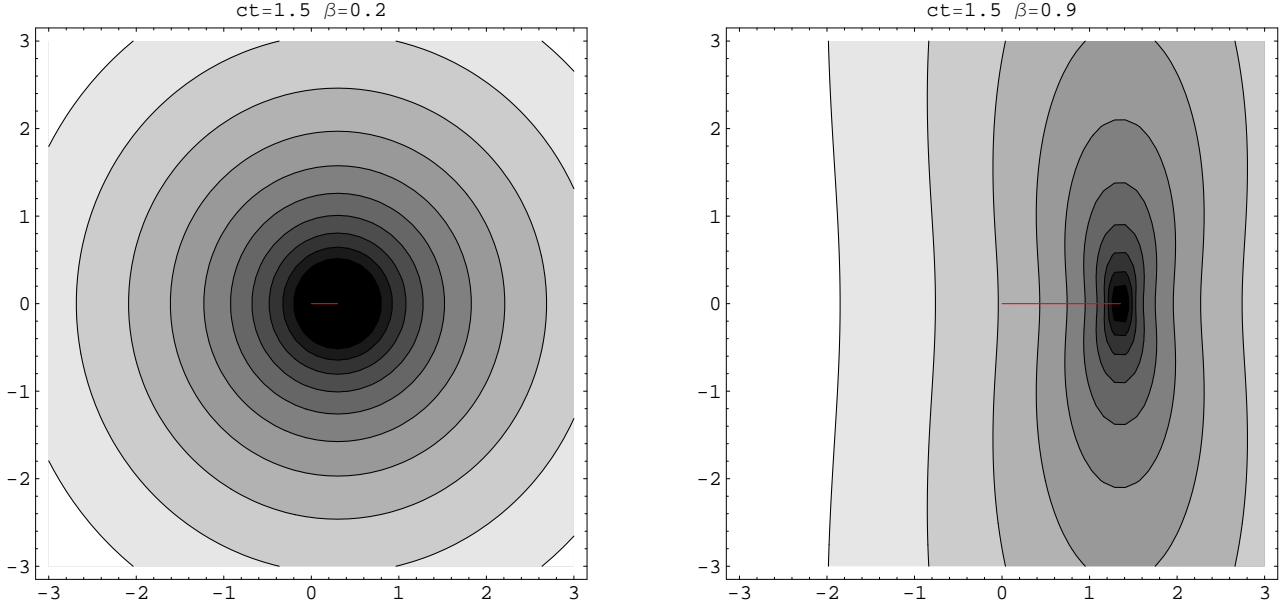


Figura 1: E^2 en $z = 1$ para (a) $\beta = 0,2$ (b) $\beta = 0,9$. Las unidades son en $c = 1$. la linea roja es la trayectoria de la partícula.

Para el caso particular de $\beta_o > 1$ podemos tener dos soluciones físicas $t > \bar{t}$

$$\bar{t} = \frac{(t - \beta_o \cdot \mathbf{x}) \pm \sqrt{(\beta_o \cdot \mathbf{x} - t)^2 - (t^2 - x^2)(1 - \beta_o^2)}}{(1 - \beta_o^2)}$$

como es el caso en la Fig. 2a. Estas dos soluciones hay que tomarlas en cuenta y sumar los campos producidas por ellas

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{E}[\bar{t}_i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t]$$

Los patrones de radiación se ven en la Fig. 2b, mostrando el patrón esperado. Este patrón se denomina patrón de Cherenkov, y se utiliza por ejemplo para medir un flujo de neutrinos.

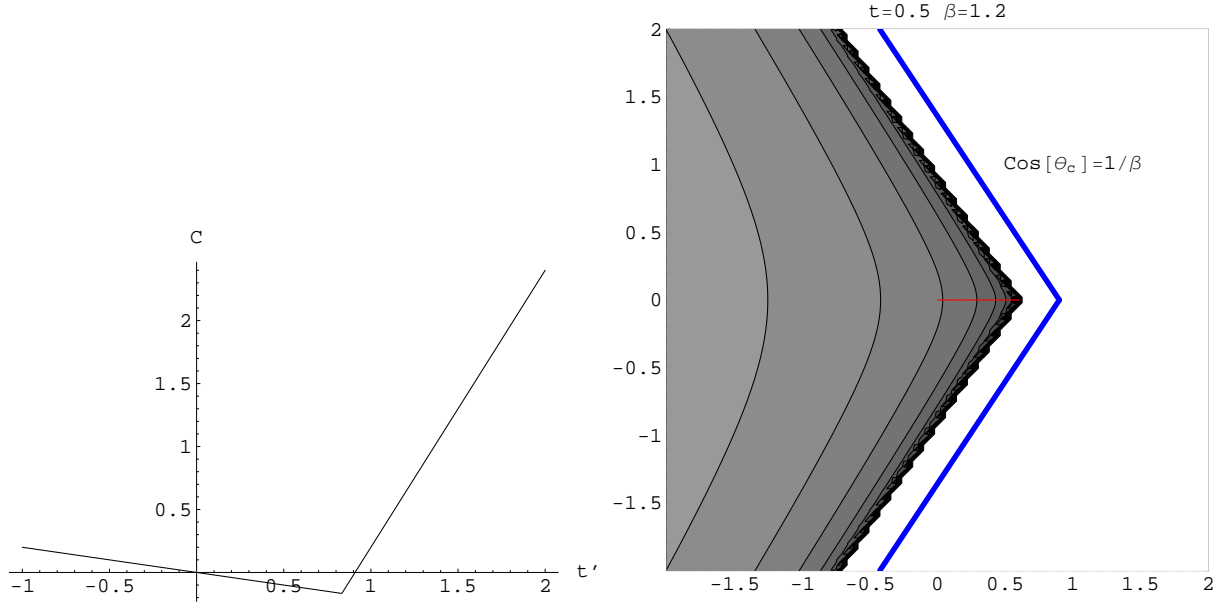


Figura 2: (a) La diferencia $\bar{t} - t + |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|$ en $x = 1$ y $z = 0$ para $\beta = 1,2$. (b) Patrón de radiación de Cherenkov, dado por E^2 . La linea roja corresponde a la trayectoria de la partícula.

1.5. Caso: radiación para una partícula acelerada

En este caso tenemos

$$[\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}}]_{ret} = \frac{e^2}{4\pi c} \left[\frac{1}{R^2} \left| \frac{\hat{\mathbf{R}} \times ((\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} \right|^2 \right]_{ret}$$

Notemos que esta formula solo funciona mientras $v \ll c$, osea para situaciones como movimiento acotado.

Notemos que si medimos la radiación producida por una carga entre t_1 y t_2 (la radiación fue emitida entre \bar{t}_1 y \bar{t}_2 respectivamente), mediríamos

$$[R^2]_{ret} \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}}]_{ret} dt = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}} \frac{dt}{d\bar{t}} d\bar{t}$$

Entonces la potencia radiada por ángulo solido es

$$\frac{dP(\bar{t})}{d\Omega} = R^2(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \frac{dt}{d\bar{t}} = R^2(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}})(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})$$

y por lo tanto

$$\frac{dP(\bar{t})}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\left| \hat{\mathbf{R}} \times \left((\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2}{|1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}|^5}$$

Es importante notar que en principio $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{r}[\bar{t}(t, \mathbf{x})]$ esta cambiando de dirección, y nosotros hemos calculado $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}}$. Si queremos hacerlo con respecto a una dirección fija en el espacio, tendríamos que calcular

$$[\mathbf{S}]_{ret} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

1.5.1. Caso $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$ con $\beta \ll 1$

En este caso $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}} \approx 1$, y por lo tanto

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c} \left[\frac{1}{R} \hat{\mathbf{R}} \times \left(\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right]_{ret}$$

El vector de Poynting es

$$[\mathbf{S}]_{ret} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_{ret} = \frac{c}{4\pi} \left[|E|^2 \hat{\mathbf{R}} \right]_{ret}$$

Notemos que para velocidades pequeñas comparadas con c , muy lejos de la fuente tenemos,

$$\mathbf{R} \sim \mathbf{r}$$

y por lo tanto la potencia radiada por ángulo solido es

$$\frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \hat{\mathbf{R}} \times \left(\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|_{ret}^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{v}|_{ret}^2 \sin^2 \theta$$

Donde θ es el ángulo con respecto a la dirección de propagación. Por lo tanto

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{v}|_{ret}^2$$

Que es la famosa **formula de Larmor** que se utiliza en astrofísica. Notemos que esta formula solo funciona mientras $v \ll c$, osea para situaciones como movimiento acotado.

1.5.2. Movimiento colineal

El caso particular de una carga en movimiento con su velocidad y aceleración (constante) paralela es

$$\frac{dP(\bar{t})}{d\Omega} = \frac{e^2 |\dot{v}|^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{|1 - \beta \cos \theta|^5}$$

con lo que obtenemos

$$P(\bar{t}) = \frac{2e^2|\dot{v}|^2}{3c^3} \frac{1}{(\beta^2 - 1)^3}$$

En la Fig. 3a se muestra este patrón de radiación para diferentes velocidades. POr supuesto, este patrón aplica mientras $|v| < c$, ya que entonces tendríamos que incluir una segunda solución, como en el caso de Cherenkov.

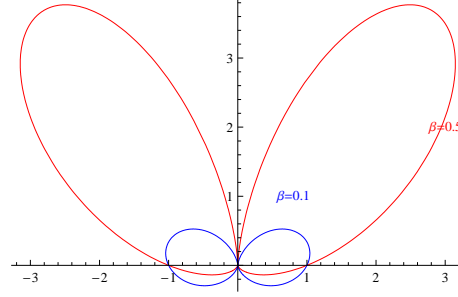


Figura 3: (a) Patrón de radiación para situación colineal.

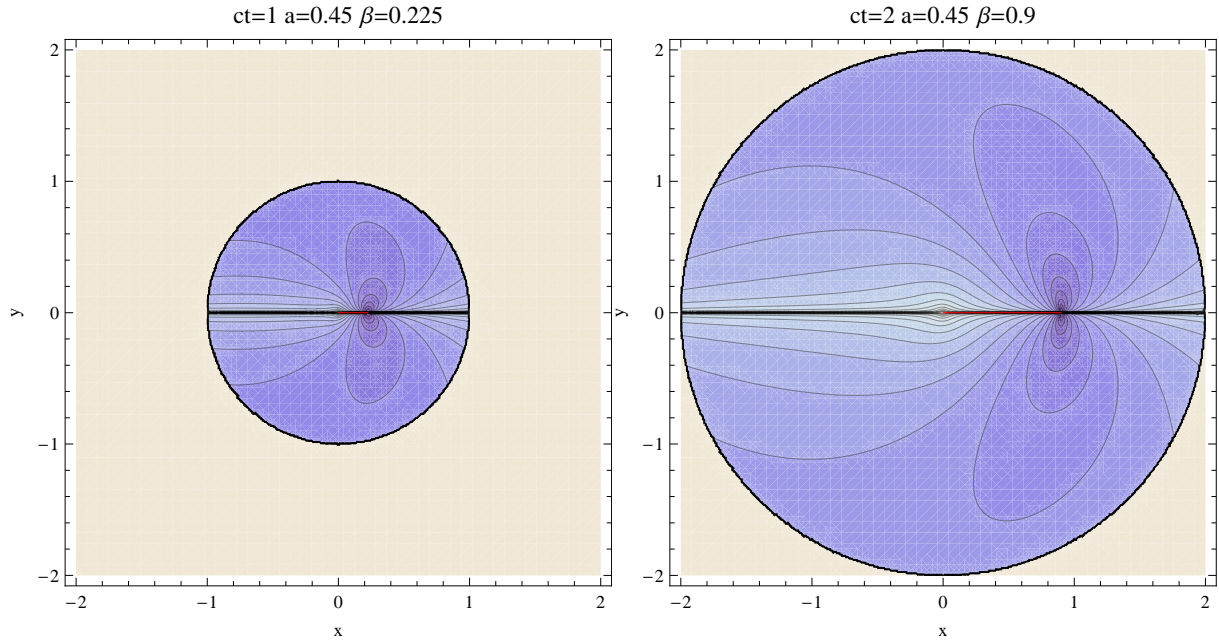


Figura 4: E^2 con $z = y$ $\dot{\beta} = 0,45$ en (b) $ct = 1$, (c) $ct = 2$.

Quizás mas interesante aun es la situación

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\beta}t^2\hat{\mathbf{x}} & t > 0 \end{cases}$$

En la Fig. 3b-c se muestra el patrón de radiación

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2$$

para \mathbf{r} fijo.

para $z = 0$, y con $\mathbf{r} = (x, y, z)$ desde el origen. Vemos claramente la propagación hacia fuera de la onda.

1.5.3. Movimiento colineal relativista

En este caso asumiremos, como lo hicimos en el problema de Gemelos, que la partícula acelera en forma constante en su sistema de referencia. Por lo tanto tenemos que resolver

$$\begin{aligned}\ddot{x}^0 &= \frac{a}{c} \dot{x}^1 \\ \ddot{x}^1 &= \frac{a}{c} \dot{x}^0\end{aligned}$$

con la condiciones inicial

$$x^0(0) = x^1(0) = \dot{x}^1(0) = 0 \quad \dot{x}^0 = 0$$

Luego de invertir la ecuación $ct = x^0(\tau)$ por $\tau(t)$, we can write

$$x(t) = \frac{1}{a_o} \left[\sqrt{1 + a_o^2 t^2} - 1 \right] \quad \beta(t) = \frac{t}{\sqrt{1 + a_o^2 t^2}} \quad \dot{\beta}(t) = a_o \frac{1}{(1 + a_o^2 t^2)^{3/2}}$$

donde hemos normalized a unidades-luz ($t \rightarrow ct$, $x \rightarrow x/c$, $\dot{\beta} \rightarrow \dot{\beta}$) con $a_o = a/c^2$. Asumiremos que la partícula está en reposo para $t < 0$. Vemos que a medida que el tiempo aumenta, la velocidad tiende a $v \rightarrow c$.

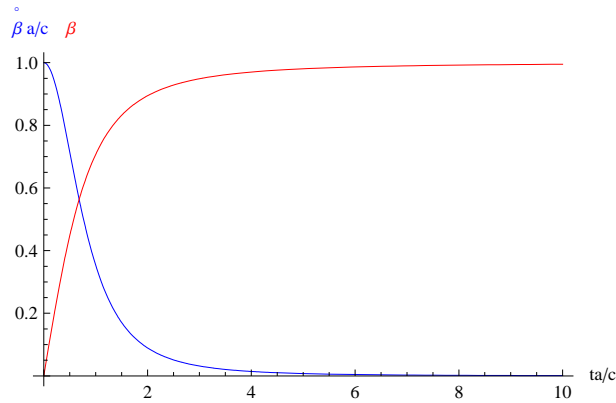


Figura 5: Velocidad de la partícula

los campos radiados se muestra en la Fig. 6 para dos tiempos de interés.

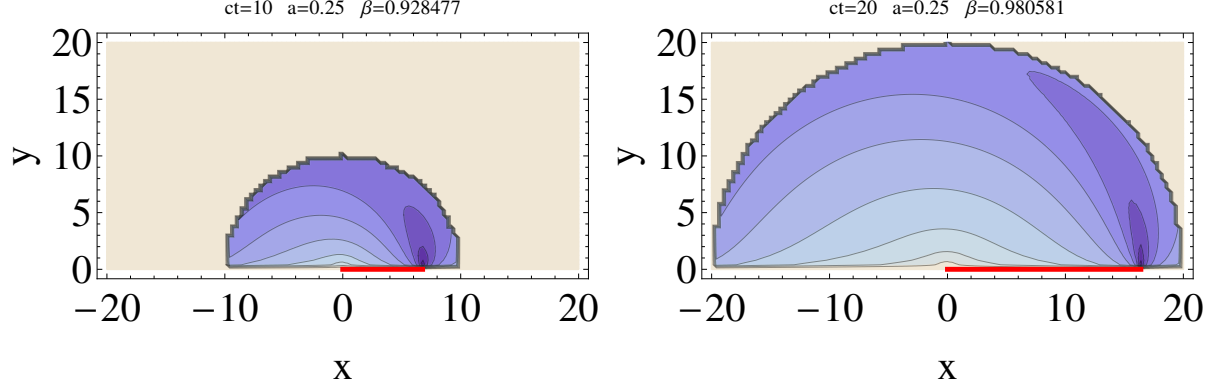


Figura 6: E^2 con $z = 0$ y $\dot{\beta} = 0,25$ en (b) $ct = 10$, (c) $ct = 20$.

1.5.4. Movimiento circular

El caso particular de una carga en movimiento en un círculo, tenemos la velocidad y la aceleración perpendicular

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= r_o [\cos \omega t, \sin \omega t, 0] = -r_o \hat{\mathbf{r}} \\ \boldsymbol{\beta}(t) &= r_o \omega [-\sin \omega t, \cos \omega t, 0] = \beta_o \hat{\mathbf{t}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) &= -\omega^2 r_o [\cos \omega t, \sin \omega t, 0] = -\omega^2 r_o \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Si el radio es suficientemente pequeño, tiene sentido promediar en t . Por lo tanto

$$\frac{dP(\bar{t})}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^4 r_o^2}{4\pi c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times ((\hat{\mathbf{R}} - \beta_o \hat{\mathbf{t}}) \times \hat{\mathbf{r}})|^2}{|1 - \beta_o \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{R}}|^5} dt$$

Este patrón de radiación se muestra en la Fig. 7a.

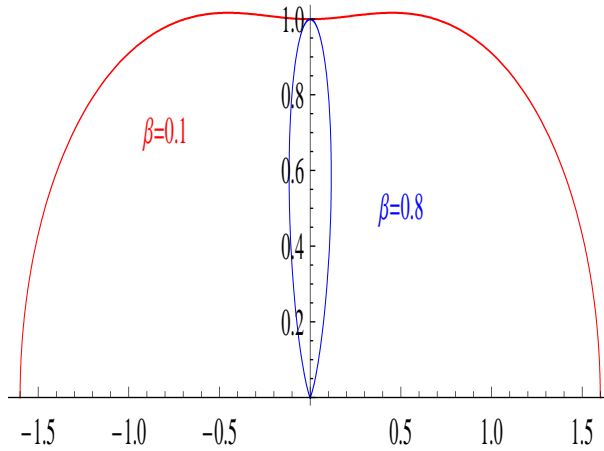


Figura 7: (a) Patrón de radiación para movimiento circular, promediado en el tiempo para $\hat{\mathbf{R}} \sim \hat{\mathbf{r}}$.

En la Fig. 8a-d se muestra el patrón de radiación

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2$$

en las dos fases de rotación y en los diferentes planos. Aquí no hemos hecho ninguna aproximación. Vemos una espiral propagándose hacia el infinito. Es posible construir el patrón de radiación

$$G(\theta, \phi) = \frac{c}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi/\omega} dt \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

A veces es posible ver el tipo de radiación que obtenemos por el espectro de la radiación. Para esto podemos estimar

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-i\omega t} \mathbf{S}(t)$$

2. Vector de Hertz: otra formulación

En el espacio vacío podemos definir un potencial de Hertz

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \\ \rho &= -(\nabla \cdot \mathbf{Q}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi &= -(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{Q}$$

y los campos son entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \left[\nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \right] \\ \mathbf{E} &= (\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}) - 4\pi \mathbf{Q} \end{aligned}$$

que pueden ser resueltos en el espacio de Fourier (tiempo y espacio) cuando $\rho = 0$, ya que \mathbf{J} y \mathbf{Q} se pueden relacionar.

2.1. El caso de materiales

En la presencia de una material

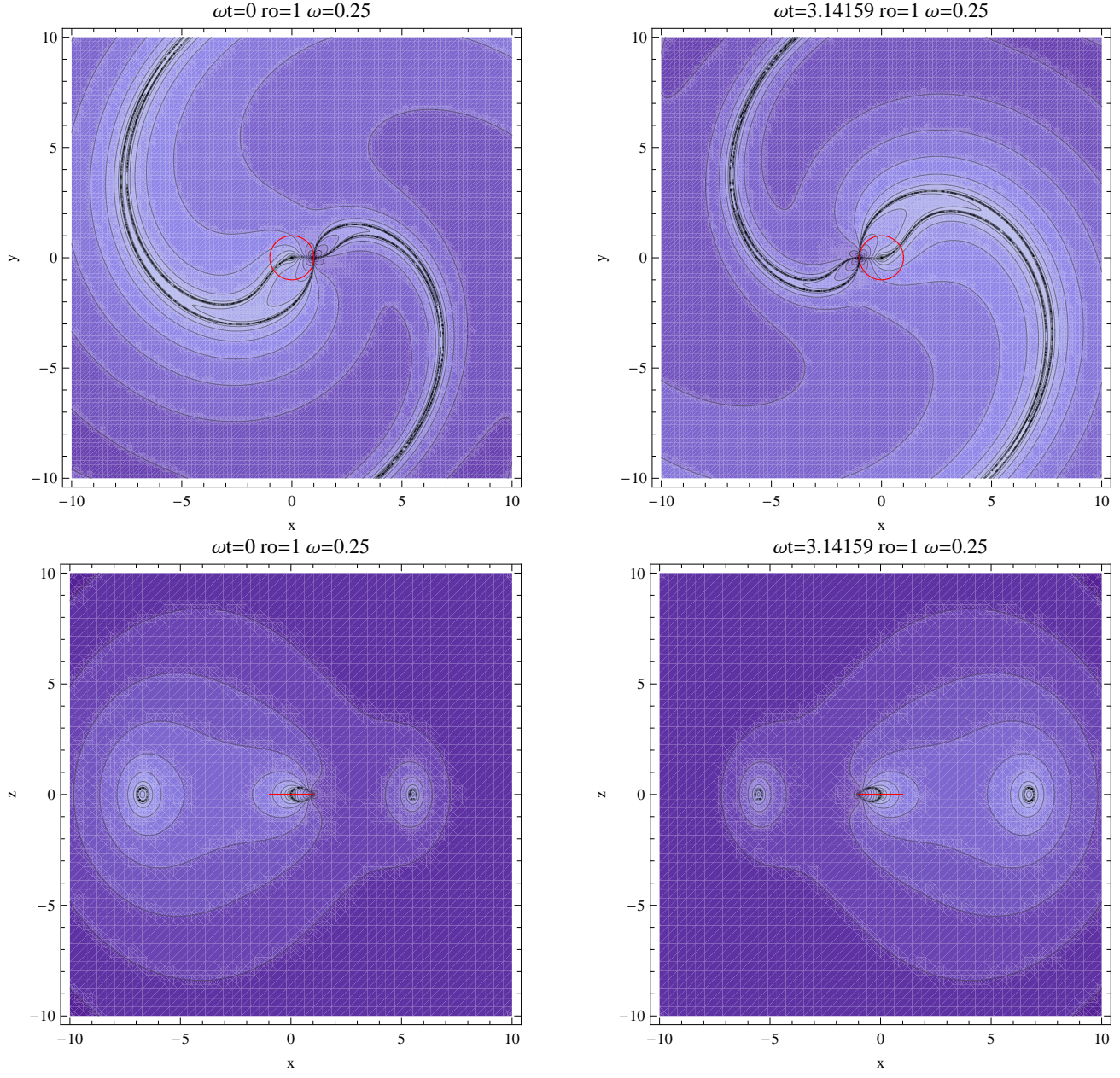


Figura 8: Patr3n de radiaci3n para movimiento circular en el plano $x - y$ para (a) $\omega t = 0$ y (b) $\omega t = \pi$; y en el plano $x - z$ para (c) $\omega t = 0$ y (d) $\omega t = \pi$

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{E} - 4\pi\mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\end{aligned}$$

tenemos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c(\nabla \times \mathbf{M}) \\ \rho &= -(\nabla \cdot \mathbf{Q}) - (\nabla \cdot \mathbf{P}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \psi &= -(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e) \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{\Pi}_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} &= -4\pi(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ \nabla^2 \mathbf{\Pi}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} &= -4\pi\mathbf{M}\end{aligned}$$

los campos son

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \left(\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} \right) + (\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_m) \\ \mathbf{E} &= (\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e) - \left(\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} \right) - 4\pi(\mathbf{Q} + \mathbf{P})\end{aligned}$$

3. Ecuación de onda: campo lejano

Sabemos que en general tenemos la solución completa para Ψ y \mathbf{A} ,

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{\rho\left(\bar{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} d\bar{x}^3 \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}\left(\bar{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} d\bar{x}^3\end{aligned}$$

usando el Gauge de Lorenz, en el espacio-tiempo, para una distribución localizada en carga y corriente.

En muchas situaciones donde tenemos una distribución localizada de carga, es factible calcular la aproximación de campo lejano haciendo

$$|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| \approx r$$

y por lo tanto tenemos

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \int \rho\left(\bar{\mathbf{x}}, t - \frac{r}{c}\right) d\bar{x}^3$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{J}\left(\bar{\mathbf{x}}, t - \frac{r}{c}\right) d\bar{x}^3$$

Hay que ser cuidadoso cuando hacemos esta expansión, en especial cuando hay variaciones temporales importantes y tenemos efectos de propagación dentro de la distribución de carga (generalmente efectos relativistas). Esto lo discutiremos abajo.

Cuando tenemos cargas microscópicas moviéndose, podemos escribir

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t))$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_n q_n \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t))$$

con lo cual podemos escribir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \sum_n q_n$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{cr} \sum_n q_n \mathbf{v}_n(t - r/c)$$

Si la carga total del sistema es cero y definimos el dipolo eléctrico como

$$\mathbf{p}(t) = \sum_n q_n \mathbf{r}_n(t),$$

entonces obtenemos

$$\psi(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$$

Podemos escribir los campos como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c) \times \hat{\mathbf{r}} + O(1/r^2)$$

y

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)$$

Notemos que

$$\mathbf{B} = -\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}$$

con lo que podemos calcular

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}) = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q}{c^2 r} \right)^2 [|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \hat{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \ddot{\mathbf{p}}]_{t=r/c}$$

y por lo tanto

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q}{c^2 r} \right)^2 [|\ddot{\mathbf{p}}|^2 - (\ddot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2]$$

Vemos un resultado que va a ser importante mas adelante. La potencia radiada va como

$$P \sim \omega^4 \sim k^4$$

la frecuencia del sistema.

Problema: Tomemos unas partículas de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético uniforme B_o . Demuestre que la trayectoria es

$$\mathbf{r}(t) = \left[\frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos(\Omega t + \phi), \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t + \phi), z_o + v_{\parallel} t \right]$$

donde v_{\perp} es la velocidad inicial perpendicular al campo, v_{\parallel} es la velocidad inicial paralela al campo, ϕ es la fase inicial de la partícula, y $\Omega = eB_o/mc$. Asumiendo que $\beta \ll 1$, encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si tenemos N de estas partículas, con la misma masa y carga, encuentre $dP/d\Omega$. Asuma que tenemos una distribución termal definida por una temperatura T_{\perp} y T_{\parallel} con respecto al campo magnético, tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_n m v_{\perp}^2 &= T_{\perp} \\ \frac{1}{2} \sum_n m v_{\parallel}^2 &= T_{\parallel} \end{aligned}$$

Para estas partículas tenemos

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t)) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_n q_n \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t))$$

donde

$$\mathbf{r}_n(t) = \left[\frac{v_{n,\perp}}{\Omega} \cos(\Omega t + \delta_n), \frac{v_{n,\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t + \delta_n), z_{n,o} + v_{n,\parallel} t \right]$$

$$\mathbf{v}_n(t) = [-v_{n,\perp} \sin(\Omega t + \delta_n), v_{\perp,n} \cos(\Omega t + \delta_n), v_{n,\parallel}]$$

$$\mathbf{a}_n(t) = [-v_{n,\perp} \Omega \cos(\Omega t + \delta_n), -v_{\perp,n} \Omega \sin(\Omega t + \delta_n), 0]$$

con $\Omega = eB_o/mc$. En la aproximación de campo lejano $|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| = r$ tenemos

$$\Psi = \frac{1}{r} \sum_n q_n$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r} \sum_n q_n \mathbf{v}_n(t - r/c)$$

Por lo tanto los campos lejanos son

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{cr} \sum_n q_n \mathbf{a}_n(t - r/c)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{cr} \sum_n q_n \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}_n(t - r/c)$$

Notemos que hemos asumido que $\Psi = 0$, que implica que existe un background de particulas de carga $-q_n$ para neutralizar $\sum_n q_n$, tal que podemos usar

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

De lo contrario tendríamos un potencial escalar, y por lo tanto habria que usar

$$\mathbf{E} = \frac{q}{cr} \hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} - \beta) \times \dot{\beta}]$$

para el campo radiado lejano. En ambos casos el campo magnetico es

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}.$$

El vector de Poynting es

$$r^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} = r^2 \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi c} \sum_n \sum_m q_n q_m (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_m - (\mathbf{a}_n \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{a}_m \cdot \hat{\mathbf{r}}))$$

Notemos que si δ_n esta distribuido uniformemente entre $[0, 2\pi]$, entonces podemos definir

$$\phi_n = \delta_n = 2\pi \frac{n}{N} \quad d\phi_n = 2\pi \frac{\Delta n}{N}$$

con lo cual

$$\sum_n \sum_m \cos[\Omega t + \delta_n] \cos[\Omega t + \delta_m] \Delta n \Delta m = \frac{N^2}{(2\pi)^2} \int d\phi_1 \int d\phi_2 \cos[\Omega t + \phi_1] \cos[\Omega t + \phi_2] = \frac{N^2}{4\pi}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m \cos[\Omega t + \delta_n] \cos[\Omega t + \delta_m] &= \int d\phi_1 \int d\phi_2 \cos[\Omega t + \delta_n] \cos[\Omega t + \delta_m] = \frac{N^2}{4\pi} \\ \sum_n \sum_m \cos[\Omega t + \delta_n] \sin[\Omega t + \delta_m] &= \int d\phi_1 \int d\phi_2 \cos[\Omega t + \delta_n] \sin[\Omega t + \delta_m] = 0 \\ \sum_n \sum_m \sin[\Omega t + \delta_n] \sin[\Omega t + \delta_m] &= \int d\phi_1 \int d\phi_2 \sin[\Omega t + \delta_n] \sin[\Omega t + \delta_m] = \frac{N^2}{4\pi} \end{aligned}$$

Con lo cual vemos que es un proceso coherente. Usando las expresiones de arriba podemos escribir

$$r^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{N^2 q^2 (v_\perp \Omega)^2}{16\pi^2 c} (3 + \cos 2\theta)$$

Con la definición $T_\perp = m v_\perp^2 / 2$, podemos finalmente escribir

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \Omega^2 N^2 T_\perp}{8\pi^2 m c} (3 + \cos 2\theta) \quad P = \frac{q^2 \Omega^2 T_\perp}{\pi m c}$$

Problema Cual es el patron de radiacion de una sola partícula? Si usamos esta expresion y promediamos durante la duracion del movimiento ciclotronico $\Delta t = 2\pi/\Omega$ obtenemos la misma expresion anterior?

En este caso tenemos el mismo caso anterior

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = r^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} = r^2 \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{q^2}{4\pi c} (|a|^2 - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2)$$

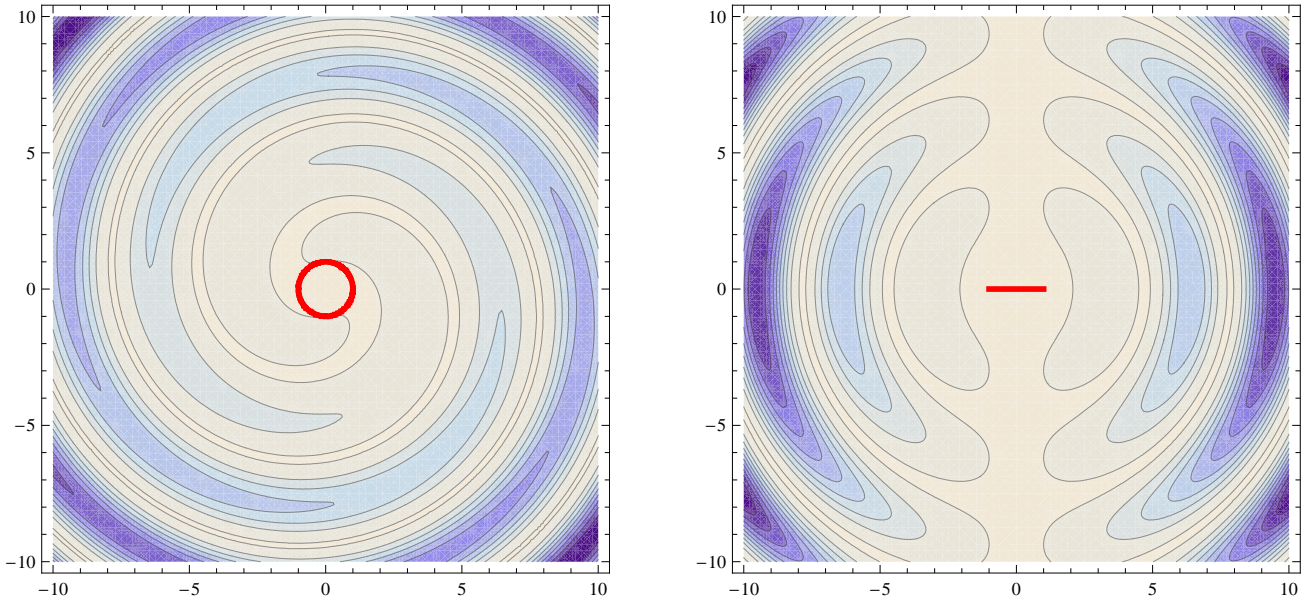


Figura 9: Patrón de radiación para movimiento circular de una partícula en el plano (a) $x - y$ y (b) $x - z$ para $\omega t = 0$.

El campo radiado se puede ver en la Fig. 9a-b. El patron de radiacion promediado en el tiempo

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial \Omega} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial P}{\partial \Omega} dy = \frac{q^2 \Omega^2}{8\pi m c} T_\perp (3 + \cos 2\theta) \quad P = \frac{q^2 \Omega^2 T_\perp}{\pi m c}$$

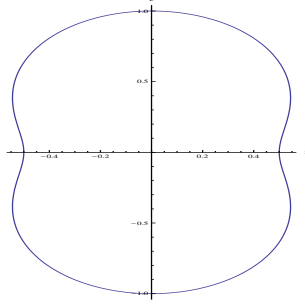


Figura 10: Patron promediado en el tiempo.

4. Ecuación de onda escalar: oscilaciones armónicas

Podemos construir un teorema de Green para soluciones armónicas. Para este caso definimos

$$\nabla^2 G + k_o^2 G = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

con $k_o = \omega/c$. Vemos que el teorema de green para la electrostática funciona perfectamente y

$$\Phi_\omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\bar{\mathbf{x}}) G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}}^3 + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial n_{\bar{\mathbf{x}}}} \Phi(\bar{\mathbf{x}}) - \Phi(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial n_{\bar{\mathbf{x}}}} G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right) dS_{\bar{\mathbf{x}}}$$

Las condiciones de borde de Dirichlet se usan cuando Φ está definido en el borde, y las condiciones borde de Neumann cuando $\partial\Phi/\partial n$ está definido en el borde.

Nuevamente tenemos dos condiciones naturales

- especificar el potencial en el borde, $\Phi(\mathbf{x})|_{\partial\Omega}$
- especificar la carga en el borde, $\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega}$

Vemos inmediatamente que especificar los dos tipos de condiciones seria redundante, y generaría soluciones no reales. Esto significa que dada un tipo de condición de borde para Φ , tenemos que hacer cero una de las integrales de superficie de arriba, y para eso utilizamos la flexibilidad de G .

En el caso de las condiciones de borde de Dirichlet, forzamos $G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = 0$ para $\bar{\mathbf{x}}$ en el borde, lo cual es equivalente a encontrar la carga en la superficie

$$\Phi_\omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\bar{\mathbf{x}}) G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}}^3 - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \Phi(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial n_{\bar{\mathbf{x}}}} G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) dS_{\bar{\mathbf{x}}}$$

En el caso de las condiciones borde de Neumann, también se pueden definir.

Notemos también que esta función de green también funciona para los campos eléctricos y magnéticos. Esto se usará mas adelante.

4.1. Función de Green en coordenadas cartesianas para el espacio infinito

Es bastante trivial darse cuenta que la función de green en coordenadas cartesianas es

$$G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{e^{ik_o|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}$$

Ahora enfrentaremos otros sistemas de coordenadas.

4.2. Función de Green en coordenadas esféricas para el espacio infinito

Supongamos que ahora expandamos la ecuación de onda en termino de una expansión de Fourier en el tiempo para obtener

$$\nabla^2 \Psi + k_o^2 \Psi = 0$$

Si ahora expandimos esta ecuación en coordenadas esféricas como

$$\Psi = \sum_{\ell, m} \frac{u(r)}{\sqrt{r}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

obtenemos la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k_o^2 - \frac{\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right] u = 0$$

Esta ecuación define las funciones de Bessel esféricas

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x) \\ n_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+1/2}(x) \end{aligned}$$

De la misma forma podemos definir las funciones de

$$\begin{aligned} h_\ell^{(1)}(x) &= j_\ell(x) + in_\ell(x) & r \rightarrow \infty & (-i)^{\ell+1} \frac{1}{x} e^{ix} \\ h_\ell^{(2)}(x) &= j_\ell(x) - in_\ell(x) & r \rightarrow \infty & (-i)^{\ell+1} \frac{1}{x} e^{-ix} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de arriba es

$$\Psi = \sum_{\ell, m} (A_{\ell, m} j_{\ell}(k_o r) + B_{\ell, m} n_{\ell}(k_o r)) Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

Ahora podemos construir la función de green para el caso general, expandiendo

$$G = \sum_{\ell, m} g_{\ell, m}(r, r') Y_{\ell, m}(\theta, \phi) Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi')$$

que tiene una solución

$$g(r, r') = A j_{\ell}(k_o r_{<}) h_{\ell}^{(1)}(k_o r_{>})$$

que tiene soluciones que se propagan hacia el infinito. Evaluando la discontinuidad para valores grandes, podemos encontrar que

$$G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{e^{ik_o |\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} = ik_o \sum_{\ell, m} 4\pi j_{\ell}(k_o r_{<}) h_{\ell}^{(1)}(k_o r_{>}) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) Y_{\ell, m}^*(\bar{\theta}, \bar{\phi})$$

Esta expansión sera útil mas adelante cuando veamos problemas de radiación.

5. Ecuación de onda vectorial: oscilaciones harmónicas

Supongamos que tenemos que resolver la ecuación de Maxwell (para una variación harmónica en el tiempo)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - i\frac{\omega}{c}\mathbf{D} \end{aligned}$$

lo que da origen a una ecuación de onda vectorial. Para el caso en que no tenemos fuentes (o materiales homogéneos), la ecuación para el campo eléctrico es

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \sqrt{\mu\epsilon} k_o^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{B} = -\frac{i}{k_o} \nabla \times \mathbf{E}$$

y para el campo magnético es

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \sqrt{\mu\epsilon} k_o^2 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{E} = \frac{i}{k_o \mu \epsilon} \nabla \times \mathbf{B}$$

donde $k_o = \omega/c$. Definamos $k = k_o \sqrt{\mu\epsilon}$.

Notemos que si Ψ es una solución de la ecuación escalar, $\nabla \Psi$ es una solución de la ecuación de onda vectorial, ya que

$$\nabla^2 (\nabla \Psi) = \nabla (\nabla^2 \Psi)$$

Definamos el operador

$$\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$$

Notemos que

$$\mathbf{L}\psi = -i(\mathbf{r} \times \nabla\Psi) = i\nabla \times (\mathbf{r}\psi)$$

por lo tanto la divergencia de este vector es nulo. Además

$$\nabla^2 \mathbf{L}\psi = i\nabla^2(\nabla \times (\mathbf{r}\Psi)) = i\nabla \times \nabla^2(\mathbf{r}\psi)$$

y usando

$$\nabla^2(\mathbf{r}\psi) = 2\nabla\Psi + \mathbf{r}\nabla^2\Psi$$

podemos demostrar que

$$\nabla^2 \mathbf{L}\psi + k^2 \mathbf{L}\Psi = 0$$

Por lo tanto $\mathbf{L}\psi$ satisface la ecuación de onda vectorial. En principio podríamos esperar que la solución (transversal eléctrico)

$$\mathbf{E} = \mathbf{L}\Psi$$

es correcta, pero esta no esta completa. Esto se debe a que en principio \mathbf{B} también se puede escribir de esta forma, y por lo tanto la solución debería ser también

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}$$

Por lo tanto la solución completa es

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a\mathbf{L}\Psi_E + \frac{i}{k}b\nabla \times (\mathbf{L}\Psi_B) \\ \mathbf{B} &= b\mathbf{L}\Psi_B - \frac{i}{k_o\mu\epsilon}a\nabla \times (\mathbf{L}\Psi_E) \end{aligned}$$

Notemos también que precisamente el operador $\nabla \times \nabla \times$ vuelve a dar algo proporcional $\mathbf{L}\Psi$. Por lo tanto es una solución completa.

5.1. En coordenadas esféricas

Para el caso de coordenadas esféricas este operador es

$$\mathbf{L}\Psi = i\nabla \times (\mathbf{r}\psi) = \frac{i}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ r\Psi & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

o en pocas palabras

$$L\Psi = i \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\phi} \right]$$

Mientras que

$$\nabla \times L\Psi = \frac{i}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} & -r \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

o en pocas palabras

$$\nabla \times \mathbf{L}\Psi = \frac{i}{r} \left[L^2 \Psi \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r \partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r \partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right]$$

con la definición

$$L^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right]$$

Notemos que este operador L no tiene componente radial, por lo tanto

$$L[f(r)g(\theta, \phi)] = f(r)Lg(\theta, \phi)$$

y en partícula podemos demostrar que

$$L^2 Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

Por lo tanto podemos escribir la solución general como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{\ell, m} \left[a_{\ell, m} f_{\ell}(kr) \mathbf{X}_{\ell, m} + \frac{i}{k} b_{\ell, m} \nabla \times (g_{\ell}(kr) \mathbf{X}_{\ell, m}) \right] \\ \mathbf{B} &= \sum_{\ell, m} \left[b_{\ell, m} g_{\ell}(kr) \mathbf{X}_{\ell, m} - \frac{i}{k_o} a_{\ell, m} \nabla \times (f_{\ell}(kr) \mathbf{X}_{\ell, m}) \right] \end{aligned}$$

donde $a_{\ell, m}$ representa la cantidad de campo eléctrico multipolar y $b_{\ell, m}$ representa la cantidad de campo magnético multipolar. Es interesante notar el termino $\ell = 0$ no existe. Hemos definido el campo

$$\mathbf{X}_{\ell, m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \mathbf{L} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

que nos permite establecer

$$\int \mathbf{X}_{\bar{\ell}, \bar{m}}^* \cdot \mathbf{X}_{\ell, m} d\Omega = \delta_{\bar{\ell}, \ell} \delta_{\bar{m}, m}$$

Para este caso particular podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\ell, m}(\theta, \phi) &= \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial Y_{\ell, m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \\ \frac{i}{k} \nabla \times [g_{\ell}(kr) \mathbf{X}_{\ell, m}(\theta, \phi)] &= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}(kr)} [\ell(\ell+1) g_{\ell}(kr) Y_{\ell, m} \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{\partial(r g_{\ell}(kr))}{\partial r} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{im}{\sin \theta} \frac{\partial(r g_{\ell}(kr))}{\partial r} Y_{\ell, m} \hat{\boldsymbol{\phi}}] \end{aligned}$$

Notemos que

$$[\mathbf{X}_{\ell, m}(\theta, \phi)] \cdot \left[\frac{i}{k} \nabla \times [g_{\ell}(kr) \mathbf{X}_{\ell, m}(\theta, \phi)] \right] = 0$$

Vemos que en principio podríamos escribir la solución explicita

$$\begin{aligned} a_{\ell, m} f_{\ell}(kr) &= \oint_{r_1} \mathbf{X}_{\ell, m}^* \cdot \mathbf{E} d\Omega \\ b_{\ell, m} g_{\ell}(kr) &= \oint_{r_2} \mathbf{X}_{\ell, m}^* \cdot \mathbf{B} d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

para algún radio r_1 y r_2 .

Problema: Supongamos que tenemos una onda plana que es incidente sobre una esfera conductora. Asumamos que $\mu = \epsilon = 1$. Encontrar los campos de escattering.

Partiendo con

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|} = ik \sum_{\ell, m} 4\pi j_{\ell}(kr_{<}) h_{\ell}^{(1)}(kr_{>}) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) Y_{\ell, m}^*(\bar{\theta}, \bar{\phi})$$

podemos expandir para grandes distancias r , lo que implica que

$$e^{i\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\ell, m} 4\pi i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) Y_{\ell, m}^*(\bar{\theta}, \bar{\phi})$$

donde $\bar{\mathbf{k}}$ tiene componentes k , $\bar{\theta}$ y $\bar{\phi}$. Tomemos una onda que se propaga en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ ($\bar{\theta} = \bar{\phi} = 0$) con un campo en la dirección \mathbf{x} . Esto implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_I &= \mathbf{E}_o \hat{\mathbf{x}} e^{ikr \cos \theta} = E_o e^{ikr \cos \theta} \left(\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \\ \mathbf{B}_I &= E_o \hat{\mathbf{y}} e^{ikr \cos \theta} = E_o e^{ikr \cos \theta} \left(\sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \end{aligned}$$

donde

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Esto implica que podemos escribir la solución general como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_I \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_I$$

donde \mathbf{E}_s y \mathbf{B}_s satisface la expansión de arriba

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= \sum_{\ell,m} \left[a_{\ell,m} h_{\ell}^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{\ell,m} + \frac{i}{k} b_{\ell,m} \nabla \times \left(h_{\ell}^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{\ell,m} \right) \right] \\ \mathbf{B}_s &= \sum_{\ell,m} \left[b_{\ell,m} h_{\ell}^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{\ell,m} - \frac{i}{k_o} a_{\ell,m} \nabla \times \left(h_{\ell}^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{\ell,m} \right) \right] \end{aligned}$$

para tener condiciones de borde de salida en el infinito. Notemos que las condiciones de borde de interés son

$$E_{\theta} = E_{\phi} = 0 \quad B_r = 0$$

sobre la superficie de la esfera. Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} e^{ikr \cos \theta} = -ikr \sin \theta e^{ikr \cos \theta}$$

y que

$$\frac{dP_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta} = -P_{\ell}^1(\cos \theta)$$

Por lo tanto la condición de borde para $B_r(r = a, \theta, \phi)$ es

$$-\frac{1}{ka} E_o \sum_{\ell=1} (2\ell+1) i^{\ell-1} j_{\ell}(ka) P_{\ell}^1(\cos \theta) \sin \phi - \sum_{\ell,m} a_{\ell,m} \frac{\ell(\ell+1)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}(ka)} h_{\ell}^{(1)}(ka) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = 0$$

Inmediatamente vemos que sobreviven los términos $m = \pm 1$, y que

$$a_{\ell,m} = -E_o \frac{i^{\ell-1} (2\ell+1) \sqrt{\ell(\ell+1)}}{\ell(\ell+1)} \frac{j_{\ell}(ka)}{h_{\ell}^{(1)}(ka)} \frac{1}{2i} [\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}] 2\pi C_{\ell,m} \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell}^1(x) dx$$

Ahora podemos evaluar

$$\begin{aligned} 2\pi C_{\ell,1} \int_{-1}^1 P_{\ell}^1(x) P_{\ell}^1(x) dx &= -\sqrt{\frac{\pi}{(2\ell+1)} \frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!}} \\ 2\pi C_{\ell,-1} \int_{-1}^1 P_{\ell}^{-1}(x) P_{\ell}^1(x) dx &= +\sqrt{\frac{\pi}{(2\ell+1)} \frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!}} \end{aligned}$$

Esto implica que

$$a_{\ell,m} = -E_o i^{\ell-1} (2\ell+1) \frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)} \frac{1}{2i} [\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}]$$

Para encontrar $b_{\ell,m}$ podemos utilizar la condición $E_\phi(r=a, \theta, \phi) = 0$. Por lo tanto podemos construir una solución completa al problema.

5.2. Fuente Localizada

Para expandir una fuente localizada, podríamos usar Eq. 2. Pero notemos que

$$\frac{1}{i} \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{i} (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$$

con lo cual podemos encontrar

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \sum_{\ell,m} \frac{ib_{\ell,m}}{k} \mathbf{r} \cdot (\nabla \times [g_\ell(kr) \mathbf{X}_{\ell,m}(\theta, \phi)]) \\ &= - \sum_{\ell,m} \frac{b_{\ell,m}}{k} (L^2 [g_\ell(kr) \mathbf{X}_{\ell,m}(\theta, \phi)]) \\ &= - \sum_{\ell,m} \frac{\ell(\ell+1)b_{\ell,m}}{k} g_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} b_{\ell,m} g_\ell(kr) &= - \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \oint_{r_1} Y_{\ell,m}^* (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) d\Omega \\ a_{\ell,m} g_\ell(kr) &= \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \oint_{r_1} Y_{\ell,m}^* (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\Omega \end{aligned}$$

En el caso de que $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ se pueden generar 3 vectores ortonormales (mirar el Arfken) a partir de $\mathbf{L}\Psi_{\ell,m}$ y $\nabla \times \mathbf{L}\Psi_{\ell,m}$ que se pueden utilizar para expandir cualquier solución.

Para el caso de una fuente localizada las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - i\frac{\omega}{c}\mathbf{E} \end{aligned}$$

y la continuidad

$$\rho = \frac{1}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Primero notemos que lejos de la fuente la expansión de arriba es

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t}}{kr} \sum_{\ell,m} (-i)^{\ell+1} [a_{\ell,m}\mathbf{X}_{\ell,m} + b_{\ell,m}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{\ell,m}] \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que encontrar una expresión para los $a_{\ell,m}$ y $b_{\ell,m}$ o $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ lejos de la fuente. Es conveniente definir el campo

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} + \frac{4\pi i}{\omega}\mathbf{J}$$

con lo que las ecuaciones son ahora

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} &= 0 & \nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} + \frac{4\pi i}{\omega}\nabla \times \mathbf{J} + 4\pi\nabla \times \mathbf{P} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= -i\frac{\omega}{c}\bar{\mathbf{E}} + 4\pi\nabla \times \mathbf{M}\end{aligned}$$

lo que implica ecuaciones de onda

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k_o^2 \bar{\mathbf{E}} &= -4\pi\nabla \times \left[\frac{i}{\omega}\nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P} + ik_o\mathbf{M} \right] \\ \nabla^2 \mathbf{B} + k_o^2 \mathbf{B} &= -4\pi\nabla \times \left[\frac{1}{c}\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} - ik_o\mathbf{P} \right]\end{aligned}$$

En términos de $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{E}}) + k_o^2(\mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{E}}) &= -4\pi i\mathbf{L} \cdot \left[\frac{i}{\omega}\nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P} + ik_o\mathbf{M} \right] \\ \nabla^2 \mathbf{B} + k_o^2 \mathbf{B} &= -4\pi i\mathbf{L} \cdot \left[\frac{1}{c}\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} - ik_o\mathbf{P} \right]\end{aligned}$$

Notemos que fuera de la fuente, $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$. La solución general es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= i \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathbf{L} \cdot \left[\frac{i}{\omega}\nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P} + ik_o\mathbf{M} \right] dy^3 \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &= i \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathbf{L} \cdot \left[\frac{1}{c}\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} - ik_o\mathbf{P} \right] dy^3\end{aligned}$$

Usando la expansión

$$\int d\Omega Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = 4\pi i k h_\ell^{(1)}(kx) j_\ell(ky) Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y)$$

y por lo tanto podemos ver de inmediato que

$$\begin{aligned}a_{\ell,m} &= \frac{4\pi k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \mathbf{L} \cdot \left[\frac{i}{\omega}\nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P} + ik_o\mathbf{M} \right] dx^3 \\ b_{\ell,m} &= -\frac{4\pi k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \mathbf{L} \cdot \left[\frac{1}{c}\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} - ik_o\mathbf{P} \right] dx^3\end{aligned}$$

y con estas expresiones podemos calcular los coeficientes de la expansión multipolar.

6. Ecuación de onda escalar: campo lejano para oscilaciones armónicas

En general tenemos que resolver el siguiente problema escalar

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = -4\pi f$$

con condiciones de borde, lo cual hace la situación un poco complicada, y probablemente requiera una solución numérica.

Para el caso del espacio infinito, tenemos ya calculado la solución usando la función de Green para el espacio infinito

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \delta(t - \bar{t})$$

$$G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_o|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|}}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|} e^{-i\omega(t-\bar{t})} d\omega = \frac{\delta\left(\bar{t} - \left[t - \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}$$

y por lo tanto tenemos la solución

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \iint G(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) d\bar{\mathbf{x}} d\bar{t}$$

Donde $k_o = \omega/c$. Debemos hacer esta integración para J y ρ .

Asumamos que tenemos una fuente localizada J y ρ y estamos interesados en mirar los campos lejos de las fuentes. En este caso tenemos una fuente armónica

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

necesitamos resolver la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_o^2) \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

Para este caso la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{ik_o|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = ik \sum_{\ell} \sum_m j_{\ell}(k_o r_{<}) h_{\ell}^{(1)}(k_o r_{>}) Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Esta expansión es en general complicada, a menos que las fuentes tengan una distribución específica, y por lo tanto converja después de unos pocos términos.

Si estamos interesados en casos generales, es conveniente tratar con la solución general

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y}) e^{ik_o |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3 y \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{k_o} \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3)$$

Notemos que no necesitamos integrar el potencial eléctrico, ya que tenemos la ley de Ampere para campos armónicos.

6.1. Fuente localizada

En ciertas regiones del espacio podemos aproximar la solución para una **fente localizada**. Notemos que la dificultad de integrar la expresión para A es debido a la dificultad de aproximar la fase de

$$e^{ik_o |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

Notemos que

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = x \sqrt{1 + \left| \frac{\mathbf{y}}{x} \right|^2 - 2\hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{x}}$$

Podemos usar

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \right] x^n$$

para $x < 1$. El coeficiente en el paréntesis se muestra en la Fig. 11

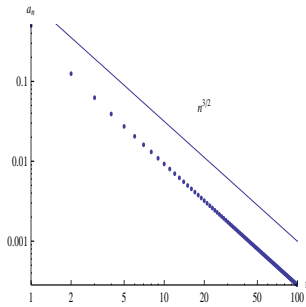


Figura 11: (a) Coeficiente de la aproximación.

Vemos que para $k_o d > 1$, donde d es el tamaño de la fuente, la fase nos puede dar problemas ya que como integramos sobre la fuente localizada la fase puede dar 2π algunas veces, entonces la aproximación debe ser hecha muy cuidadosamente. Usualmente las aproximaciones relevantes son posibles si el tamaño de la fuente d satisface

$$k_o d \leq 1$$

En esta aproximación particular, hay tres regiones de interés:

1. **Zona cercana (estática)** $d < x \ll \lambda$: En este caso podemos utilizar la aproximación

$$e^{ik_o|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \sim 1$$

y la solución es construida por los métodos descritos en capítulos anteriores para campos estáticos con múltiples escalares.

2. **Zona intermedia** $d \ll x \sim \lambda$: En este caso hay que hacer el calculo directamente con los multipolos derivados en este capitulo.

3. **Zona lejana** $d \ll \lambda \ll x$: En este caso podemos aproximar

$$\begin{aligned} k\sqrt{x^2 + y^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} &= kx\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} - 2\hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{x}} \\ &\approx kx\left(1 - \hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{x} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + \dots\right) \\ &\approx kx - k\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + \frac{ky^2}{x} + \dots \end{aligned}$$

y por lo tanto vemos que los dos términos de la derecha son

$$\frac{ky^2}{x} \leq \frac{d}{x}k_od \quad k\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \leq k_od$$

por lo tanto la serie converge rápidamente. En esta aproximación podemos entonces escribir

$$\frac{e^{ik_o|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \sim \frac{e^{ik_o x}}{x} e^{-ik_o\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}$$

y hay que hacer la integral de esta forma.

Problema: Tomemos una fuente de corriente infinitesimal

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = J_o\delta^{(3)}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{L}}$$

El vector potencial es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = J_o\frac{e^{ik_o x}}{cx}\hat{\mathbf{L}}$$

Los campos pueden ser calculados

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= ik_o \frac{J_o}{c} \frac{e^{ik_o x}}{x} \left[(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{L}}) \left(1 - \frac{1}{ik_o x} \right) \right] \\ \mathbf{E} &= ik_o \frac{J_o}{c} \frac{e^{ik_o x}}{x} \left[\left(1 - \frac{1}{ik_o x} + \frac{1}{(ik_o x)^2} \right) \hat{\mathbf{L}} - \left(1 - \frac{3}{ik_o x} + \frac{3}{(ik_o x)^2} \right) (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right]\end{aligned}$$

Vemos que tenemos claramente campos cercanos, intermedios y lejanos.

Problema: Tomemos una distribución de cargas muy cerca del origen. Asumiendo $d \ll \lambda$

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

nos da

$$\mathbf{A} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \frac{e^{ik_o |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}}{c |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \approx -i\omega \mathbf{p} \frac{e^{ik_o x}}{cx}$$

y por lo tanto haciendo una transformada de Fourier inversa tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{cx} \hat{\mathbf{x}} \times \left(\frac{[\dot{\mathbf{p}}]}{x} - \frac{1}{c} [\ddot{\mathbf{p}}] \right) \\ \mathbf{E} &= - \left(-\frac{[\mathbf{p}]}{x^3} - \frac{[\dot{\mathbf{p}}]}{cx^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}]}{c^2 x} \right) + \left[\left(\frac{3[\mathbf{p}]}{x^3} + \frac{3[\dot{\mathbf{p}}]}{cx^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}]}{c^2 x} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}} \right] \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

donde $[]$ es el valor evaluado en el tiempo retardado $\bar{t} = t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\bar{t})|/c$. Notemos que acá esta el resultado de Larmor que encontramos antes.

6.2. Zonas lejanas

En comunicación y en astrofísica es de interés encontrar los campos radiados (zonas lejana). En el capítulo 3 encontramos como hacer el cálculo exacto en cartesianas y en esféricas. Pero si nos reducimos a una fuente pequeña

$$k_o d < 1$$

podemos ir mas allá y calcular en la zona lejana

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_o x}}{cx} \int \mathbf{J}(\mathbf{y}) e^{-ik_o \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} d^3 y = \frac{e^{ik_o x}}{cx} \sum_n \frac{(-ik_o)^n}{n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{y}) (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})^n d^3 y$$

la cual converge rápidamente si $k_o d \ll 1$.

6.2.1. Primer termino $n = 0$

Es interesante notar que el termino monopolar $n = 0$ no contribuye a menos que $\omega \neq 0$, como ya habíamos encontrado es magnetoestática, ya que

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{y}) d^3y = - \int \mathbf{y}(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{y})) d^3y = -i\omega \int \mathbf{y}\rho(\mathbf{y}) d^3y = -i\omega \mathbf{p}$$

El vector potencial es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -ik_o \mathbf{p} \frac{e^{ik_o x}}{x}$$

y los campos

$$\mathbf{B} = \frac{k_o^2 e^{ik_o x}}{x} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \quad \mathbf{E} = \frac{k_o^2 e^{ik_o x}}{x} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}}$$

Notemos que

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}}$$

En la aproximación lejana podemos calcular la potencia radiada

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[x^2 \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] \rightarrow P = \frac{\omega^4}{3c^3} |p|^2$$

Aquí es importante notar el término ω^4 en la potencia radiada.

Problema: Como ejemplo, consideremos una antena alimentada desde su centro. Asumamos que la corriente en la antena es

$$\mathbf{J} = I_o \sin\left(\frac{k_o d}{2} - k_o |z|\right) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{z}}$$

Para esta corriente podemos calcular

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{i\omega} = \pm \frac{ik_o I_o}{\omega} \cos\left(\frac{k_o d}{2} - k_o |z|\right)$$

lo que nos da el dipolo efectivo

$$\mathbf{p} = 4 \frac{I_o \sin^2 \frac{k_o d}{4}}{k^2} \hat{\mathbf{z}}$$

La potencia radiada es entonces

$$P = \frac{16}{3} I_o^2 \sin^2 \frac{k_o d}{4}$$

Esta expresión es sólo aceptable para $k_o d \ll 1$, ya que estamos usando la expresión para A en este limite. También podemos integrar esto exactamente (en la zona lejana con $k_o d < 1$) y nos da

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_o x}}{cx} \int \mathbf{J}(\mathbf{y}) e^{ik_o \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} d^3 y = \hat{\mathbf{z}} \frac{2I_o e^{ik_o x}}{ck_o x} \left[\frac{\cos\left(\frac{k_o d}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_o d}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right]$$

En general es bastante complicado describir la corriente en una antena para diferentes frecuencias, ya que hay que incluir la impedancia del circuito y la impedancia de radiación para diferentes frecuencias. Esto es en general un tema complicado y requiere resolver un problema de condiciones de borde para la corriente a lo largo de un cable conductor. Supongamos que tenemos un alambre con una corriente armónica en $\hat{\mathbf{z}}$, Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{i}{k_o} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + k_o^2 \mathbf{A}]$$

en el Gauge de Coulomb. Por lo tanto tenemos por un lado tenemos

$$E_z(\mathbf{x}) = \frac{i}{k_o} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} + k_o^2 \mathbf{A} \right]$$

lo que implica que sobre la superficie del alambre tenemos

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_o^2 \right] \mathbf{A}(\rho = a, z) = 0$$

Por otro lado

$$A_z = \frac{1}{c} \int_{z_o}^{z_o+L} \mathbf{J}(\mathbf{y}) \frac{e^{ik_o |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dy^3$$

Estas ecuaciones tiene que se resueltas para \mathbf{J} en la superficie del conductor. En general el resultado depende de como es excitada la corriente sobre el conductor (centro, al final, etc.) y la condición de borde de no corriente en los extremos. Esto es en general difícil de resolver.

Problema: Resolver el problema de un cilindro finito (pero largo) conductor forzado por una diferencia de potencial ΔV entre sus extremos

Problema: Primera Aproximación: Potencia radiada para ω variable.

En general el circuito que produce la corriente sobre la antena, tiene una resistencia, una capacitancia y una inductancia por unidad de largo. Además hay que incluir el efecto de la potencia radiada $P(\omega)$ por la antena, a través de su impedancia $Z_A(k_o d)$. Usando los resultados del capitulo 3, vemos que

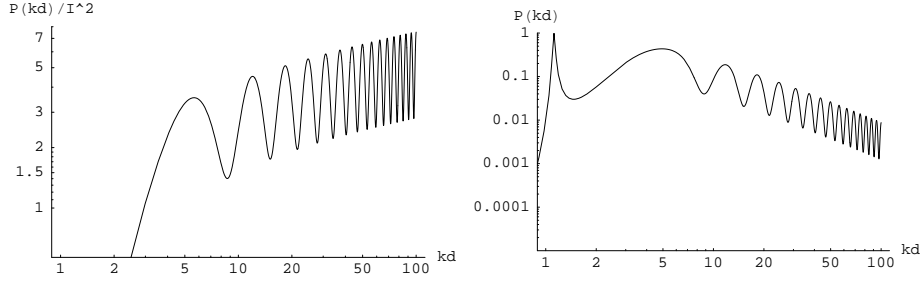


Figura 12: (a) Potencia radiada normalizada $P/|I|^2$ por un dipolo. (b) Potencia radiada por la antena con $R_o = 0,001$, $C_o = 1$ y $L_o = 0,8$.

$$V = RI - ik_o d L_o I + \frac{1}{-ik d C_o} I + Z_A(kd) I = ZI$$

Asumamos que corriente en la antena se puede describir como en el problema anterior aun para $kL > 1$. Por lo tanto

$$\frac{dP(kd)}{d\Omega} = 4|I|^2 \frac{1}{c} \left| \frac{\cos\left(\frac{k_o d}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_o d}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right|^2$$

luego de integrar obtenemos

$$P(k_o d) = \frac{2}{c} |I|^2 g(k_o d)$$

Todo esto debería ser igual, a primera aproximación, a la potencia que fuerza el circuito completo

$$P_o = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} Z |I|^2$$

Por lo tanto podemos estimar la potencia radiada como

$$P(k_o d) = Re [|I|^2 g(k_o d)] = Re \left[\frac{P_o g(k_o d)}{Z(k_o d)} \right]$$

En la Fig. 12b vemos que la potencia radiada por esta antena tiene un máximo cerca de

$$k_o d \sim 1$$

Claro esta que el patrón de corriente sobre la antena no es correcto para $kd > 1$, por lo tanto todo esto hay que evaluarlo con cuidado, y por lo general se hace haciendo expansiones de la ecuación de arriba en funciones propias útiles (Bessel para esta geometría).

6.2.2. Segundo termino $n = 1$

Es interesante notar que si incluimos los términos de primer orden $n = 1$ obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int (\mathbf{x} \times \mathbf{J}) d^3x \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{k_o^2 e^{ik_o x}}{x} [(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m}] \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

donde hemos incluido la magnetización.

7. Escatering para $k_o d \ll 1$

Para el caso general podemos suponer que tenemos campos incidentes (ondas planas) dadas por

$$\mathbf{E}_i = E_o \hat{\mathbf{e}}_i e^{ik_o \hat{\mathbf{x}}_o \cdot \mathbf{x}} \quad \mathbf{B}_i = \hat{\mathbf{x}}_o \times \mathbf{E}_i$$

mientras que los campos radiados por el medio son

$$\mathbf{E}_s = \frac{k_o^2 e^{ik_o x}}{x} [(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m}] \quad \mathbf{B}_s = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_s$$

entonces necesitamos encontrar \mathbf{p} y \mathbf{m} .

La sección eficaz de escatering podemos definirla como la potencia irradiada en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$, normalizada por el flujo incidente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{(\mathbf{E}_s \times \mathbf{B}_s^*) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{(\mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i^*) \cdot \hat{\mathbf{x}}_o}$$

Si estamos interesados en diferenciar diferentes polarizaciones, podemos definir la sección diferencial de escatering polarizada como la potencia irradiada en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ con polarización $\hat{\mathbf{e}}$ normalizada al flujo incidente de la dirección $\hat{\mathbf{x}}_o$ con polarización $\hat{\mathbf{e}}_o$

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega} = r^2 \frac{|\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E}_s^*|^2}{|\hat{\mathbf{e}}_o \cdot \mathbf{E}_i^*|^2}$$

Problema: Tomemos el campo producido por una partícula en un campo electromagnético (una onda plana)

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_o e^{-(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{x} - i\omega t)}$$

Si $kx \ll 1$ entonces podemos calcular

$$\mathbf{p} = q\mathbf{x} = \frac{q^2}{m\omega^2} \mathbf{E}_o e^{-i\omega t}$$

Para una partícula los campos son

$$\mathbf{E} = \frac{k_o^2 e^{ik_o x}}{x} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{B} = \frac{k_o^2 e^{ik_o x}}{x} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}$$

y la potencia radiada puede ser calculada con

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[x^2 \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{8\pi} |E_o|^2 (1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2)$$

Asumiendo un campo incidente con polarización \mathbf{E}_o . La sección eficaz diferencial de escatering es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 (1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{x}}))$$

Dada una dirección de propagación, por ejemplo $\hat{\mathbf{z}}$, este vector de campo puede tener cualquiera de las direcciones de polarización en 2π . Asumiendo una distribución uniforme de polarización, debemos hacer un promedio sobre la polarización incidente. Por lo tanto, si asumimos que tenemos una onda que se propaga en z

$$\mathbf{p} = \left(\frac{q^2}{\omega^2 m} \right) E_o \{\cos \Psi, \sin \Psi, 0\}$$

usando $\hat{\mathbf{x}} = [\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \cos \theta]$ podemos encontrar que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{\hat{\mathbf{e}}_o} &= \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}) \times \hat{\mathbf{x}}] \times [\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \hat{\mathbf{x}} d\Psi \\ &= \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sigma = \frac{2}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2$$

Es interesante notar que

$$\left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2$$

es denominada como la sección eficaz de un electrón.

Problema: Tomemos una pequeña esfera dieléctrica (promediado sobre las polarizaciones). Notemos que si $ka \ll 1$ entonces podemos utilizar el resultado estático

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) a^3 \mathbf{E}_i$$

y por lo tanto podemos encontrar

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k_o^4 a^6 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2 \cos^2 \theta$$

y también

$$\sigma = \frac{2}{3} k_o^4 a^6 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2$$

7.1. Colección de escateres

Si tenemos una colección de escateres, tenemos que incluir su dispersión espacial. Para el caso anterior tenemos

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{\hat{\epsilon}_o} = k_o^4 \frac{1}{|E_o|^2} \sum_{i,j} (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{p}_j \cdot \hat{\mathbf{x}})) e^{ik_o(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}}$$

donde \mathbf{y}_i es la posición del escater i . Esto define el factor

$$F = \sum_{i,j} \langle \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{p}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_j) \rangle_{\hat{\epsilon}_o} e^{ik_o(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}}$$

Esto también tenemos que promediarlo por polarización incidente $\hat{\epsilon}_o$. La distribución espacial de los dipolos es fundamental, y can puede tener efectos profundos en la eficiencia de los radiadores. Si la posición de los radiadores es coherente (en el caso de un fractal), el efecto es del orden $F \sim N^2$, mientras que si la distribución no es coherente, tenemos $F \sim Np^2$.

Problema: Compare el patrón de radiación de un set uniforme y un set fractal de escateres

7.2. Escatering de Raleigh

Podemos generalizar este análisis para estudiar el *escatering* de Raleigh, y podemos ver cómo obtener que el efecto es proporcional a k^4 , preferencialmente para frecuencias altas. Esto es una posible sugerencia del porque el cielo debería ser azul. Podemos utilizar el resultado para una molécula

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega} = k_o^4 \left| a^3 \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2} \right|^2$$

donde $\lambda_1 = 4\pi a^3(\epsilon_1 - 1)$ esta relacionado con el momento dipolar $p_1 = \lambda_1 E$ de una molécula. Al considerar al efecto colectivo de N moléculas donde

$$F \approx Np^2$$

asumiendo no coherencia (random distribution). En esta analogía la constante dieléctrica efectiva es

$$\epsilon - 1 = \frac{N}{V}(\epsilon_1 - 1) = 4\pi\lambda$$

donde λ es la polarización molecular efectiva en el aire, y por lo tanto podemos escribirla en termino del índice de refracción del aire ($\epsilon \approx 1$)

$$n - 1 = \sqrt{\epsilon} - 1 = \sqrt{1 + 4\pi\lambda} - 1 \approx \frac{1}{2}(4\pi\lambda) = \frac{1}{2}(\epsilon - 1)$$

Por lo tanto la sección eficaz de escatering por molécula es

$$\sigma = \frac{8}{27} \left(\frac{V}{N} \right)^2 k^4 |n - 1|^2$$

donde N/V es el numero de moléculas por unidad de volumen. Notemos que n también depende de la frecuencia ω como vimos anteriormente.

Si enviamos un flujo de energía, al atravesar una distancia dz del aire, la intensidad sera atenuada

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{N}{V}\sigma I \quad \rightarrow \quad I(z) = I(0)e^{-\int_0^z \alpha(\tau)d\tau}$$

y por lo tanto la distancia de atenuación es

$$\alpha(z) = \frac{8}{27} \left(\frac{V}{N} \right) k^4 |n - 1|^2$$

Gente ha sugerido que esta dependencia puede ser responsable del color azul de nuestro atmósfera, ya que para frecuencias ω más altas (azul) el *escatering* es más eficiente que para las frecuencias más bajas (rojo). Otra contribución interesante es el escatering preferencial producido por las perturbaciones de densidad en nuestra atmósfera que cambian el índice de refracción. En este caso

$$\frac{\delta\epsilon_i}{3} = \frac{1}{3} \frac{\partial\epsilon_i}{\partial N} \delta N \approx \frac{V}{N} \frac{(\epsilon - 1)}{3} \frac{\delta N/V}{N/V}$$

ya que

$$\epsilon_i - 1 = \frac{\epsilon - 1}{N/V}$$

donde δN es la fluctuación del numero de moléculas (o densidad si normalizamos por V) en un pequeño volumen $V = L^3$ tal que $L \ll \lambda$. Esta estimación solo funciona si $\epsilon \sim 1$. Usando los resultados anteriores

$$\sigma = \frac{8}{27} \left(\frac{V}{N} \right)^2 k^4 |\epsilon - 1|^2 \left\langle \left(\sum_i \frac{\delta N_i / V}{N/V} \right)^2 \right\rangle = \frac{8}{27} \left(\frac{V}{N} \right)^2 k^4 |\epsilon - 1|^2 N k T \beta$$

con la definición

$$\sum_{i,j} \delta N_i \delta N_j = N V N k T \beta$$

y con β como la compresibilidad termal

$$\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Obviamente, todo esto cambia si F tiene términos coherentes (por ejemplo fractales, o turbulencia correlacionada, gravity waves, etc.)

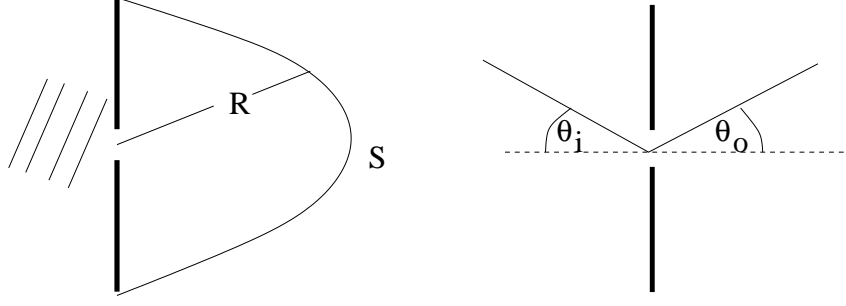


Figura 13: (a) geometría de la pantalla. (b) Fuente y punto de observación.

8. Teoría de difracción escalar $k_o d \gg 1$

En situaciones más generales debemos recurrir a un método para calcular los campos de la radiación que satisfacen

$$(\nabla^2 + k_o^2)\Psi = 0$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = - \oint_S [\Psi \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G - G \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi] dS$$

En general estamos interesados en aperturas, ver Fig. 13 en los cuales tenemos una pantalla y un hoyo en ella. Debemos hacer dos suposiciones:

1. Para calcular G asumiremos que la pantalla es infinita y que los Ψ en el borde es cero.
2. En la abertura usaremos los campos incidentes.

Esta aproximación significa que funciona siempre y cuando $\theta \leq \lambda/d$, o en pocas palabras $k_o d \gg 1$. Esto tiene sentido ya que implica que los bordes de la apertura no afectan en forma considerable lo que sucede en la apertura

Usando la función de Dirichlet-Green

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{ik_o R}}{R} - \frac{e^{ik_o R'}}{R'} \right]$$

donde

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$R' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}$$

Podemos encontrar

$$\Psi_+(\mathbf{x}) = - \oint_S \Psi_- \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

con por ejemplo (ver Fig. 13b)

$$\Psi_- = \Psi_o \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{x}}$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{k}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{e^{ik_o|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \Psi_- \left(1 + \frac{i}{k_o|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_y \\ &\simeq \frac{k_o}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{e^{ik_o|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \Psi_- \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_y + O(1/r) \end{aligned}$$

Hemos asumido que lejos de la pantalla (R tendiendo hacia el infinito) la contribución de S tiende a cero, lo que implica que hay que calcular la integral sólo sobre la apertura. También, r es la distancia desde el punto en la apertura hasta el punto de observación. Usualmente la radiación entrante es perpendicular a la pantalla.

Tomemos una apertura circular de radio a , tenemos

$$k_o |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = k_o \sqrt{|x|^2 + |s|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}} \sim k_o|x| - k_o\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{k_o|s|^2}{2|x|} + \dots$$

con \mathbf{s} como el vector en la apertura, y \mathbf{r} desde el centro de la apertura al punto de observación. Hemos asumido que $r \rightarrow \infty$. Si botamos el tercer término, tenemos la difracción de Fraunhofer

$$r \gg \frac{a^2}{8\lambda}$$

con a como el tamaño de la antena. Si usamos la forma para Ψ_- , tenemos finalmente para el campo lejano

$$\Psi_+ = \frac{k}{2\pi i} \Psi_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} \int_{\sigma} (e^{ik_o(\hat{\mathbf{x}}_o - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{s}} \cos \theta_o) dS^2$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_o$ es el vectores unitario para la fuente

$$\Psi_- = \Psi_o \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{x}_o}$$

En el caso $\theta_o \sim 0$ tenemos que $\hat{\mathbf{x}}_o = \hat{\mathbf{z}}$, que es lo mas común, obtenemos que cerca del eje de la antena el campo radiado es la transformada de Fourier de la apertura de la antena

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{k}{2\pi i} \Psi_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} \int_{\sigma} e^{-ik_o\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{s}} dS^2$$

Para el caso de un apertura circular, por simetría podemos considerar el vector $\hat{\mathbf{x}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ y el vector $\mathbf{s} = \rho(\cos \bar{\phi}, \sin \bar{\phi}, 0)$, y tenemos

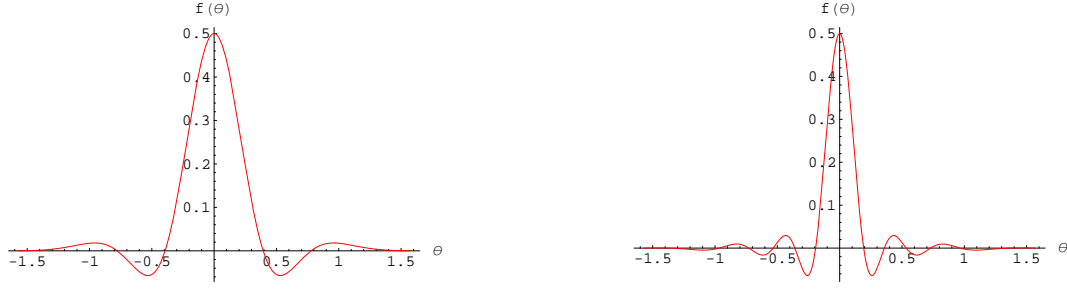


Figura 14: Gráfico de la radiación producido por una apertura circular para (a) $k_o a = 10$ y (b) $k_o a = 20$.

$$\begin{aligned}
 \Psi_+ &= \frac{k_o}{2\pi i} \Psi_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-ik_o \rho \sin \theta \cos \phi} \cos \theta d\bar{\phi} \\
 &= \frac{k}{2\pi i} \Psi_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} \cos \theta \int_0^a \rho d\rho (2\pi J_0(k_o \rho \sin \theta)) \\
 &= -ik_o \Psi_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} a^2 \cos \theta \frac{J_1(k_o a \sin \theta)}{k_o a \sin \theta}
 \end{aligned}$$

Vemos entonces que

$$\Psi_+ = \Psi_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} \Psi_o(k_o a^2) f(\theta) \quad \rightarrow \quad f(\theta) = \cos \theta \frac{J_1(k_o a \sin \theta)}{k_o a \sin \theta}$$

Notemos que en principio podemos usar esta apertura como un telescopio. Para este caso podemos obtener el mismo resultado anterior, pero donde θ ahora es con respecto a la línea definida por el vector $\hat{\mathbf{x}}$. Esto implica que un telescopio tiene la capacidad de resolver objetos separados por una resolución angular $\Delta\theta$ dada por el primer cero $x_1 = 3,83$ de $J_1(x)/x$, esto es

$$\Delta\theta \sim 4 \frac{\lambda}{a}$$

Problema: El problema de simular numéricamente que pasa a una onda al cruzar una y varias aperturas se dejara para la tarea.

Problema: El problema de interferencia entre dos aperturas ahora se puede calcular como un problema de transformada de Fourier.

Para el caso en 2D, podemos asumir que la apertura tiene tamaños $L_y \gg L_x$. La propagación de la onda incidente sería tal que

$$\hat{\mathbf{r}}_o = (x_{o,1}, 0, x_{o,3})$$

Y tomando $\hat{\mathbf{r}} = (x_1, 0, x_3)$, podemos encontrar

$$\Psi_+ = \frac{k}{2\pi i} \Psi_o L_y \cos \theta_o \frac{e^{ik_o|x|}}{|x|} \int_{\sigma} e^{ik_o(\hat{\mathbf{r}}_o - \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{x}} s_x} ds_x$$

Osea, el resultado es el mismo que antes, y requiere hacer una transformación de Fourier de la apertura en una dimensión.

Notemos que si utilizamos

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

la función de Green es

$$G = H_0^{(1)}(k_o \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (z - \bar{z})^2}) - H_0^{(1)}(k_o \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (z + \bar{z})^2})$$

Dado que

$$H^{(1)}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{ikx}$$

vemos que obtenemos soluciones similares.

9. Teoría de difracción vectorial $k_o d \gg 1$

Ahora queremos tener una estimación de los resultados de difracción, pero para los campos vectoriales \mathbf{E} y \mathbf{B} . Supongamos que tenemos una apertura (con un conductor como pantalla) en el plano $z = 0$. El campo se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_1$$

donde \mathbf{E}_o es el campo producido por la fuente y \mathbf{E}_1 por el obstáculo. Notemos que este campo es producido por las corrientes y densidades de carga en la pantalla generadas para satisfacer las condiciones de borde. Si la pantalla es muy delgada, podemos asumir que no hay corriente en $\hat{\mathbf{z}}$, por lo tanto $A_{1,z} = 0$, mientras que $A_{1,x}$, $A_{1,y}$ y Φ son funciones pares en z . Esto implica que

$$E_{1,x}, E_{1,y}, B_{1,z}$$

son pares en z , mientras que

$$E_{1,z}, B_{1,x}, B_{1,y}$$

son impares en z , aunque no necesariamente cero en la pantalla dadas las discontinuidades. Estas discontinuidades determinan que la densidad de carga es la misma a los dos lados de la pantalla (ya que $E_{1,z}$

es impar sobre la pantalla). Lo mismo aplica para la corriente tangencial. Mientras que en la apertura, la continuidad de los campos requiere que $E_{1,z}$, $B_{1,x}$, $B_{1,y}$ sean cero en la apertura. Esto sugiere que

$$E_{1,x}, E_{1,y}, B_{1,z}$$

tiene tienen los valores que existirían en la apertura si la pantalla no estuviera allí (aquí es importante que la apertura sea $d \gg \lambda$). Usando una función de Green de Neumann

$$G_N = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{ik_o R}}{R} + \frac{e^{ik_o \bar{R}}}{\bar{R}} \right]$$

podemos escribir sobre la pantalla

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{screen} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_1) \frac{e^{ik_o R}}{R} dS$$

ya que $A_z = 0$. Esto se podría obtener de la corriente superficial

$$\mathbf{K}_1 = -\frac{c}{4\pi} \mathbf{B}_1 \times \hat{\mathbf{n}}$$

usando

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{screen} G_N \mathbf{K}_1 dS$$

Con lo cual podemos construir el campo magnético como

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{screen} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_1) \frac{e^{ik_o R}}{R} dS$$

En una forma similar podemos construir una solución para el campo eléctrico como

$$\mathbf{E}_1 = \pm \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{screen} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1) \frac{e^{ik_o R}}{R} dS$$

para $\pm z$. Con esta definición, los campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Notemos que $\mathbf{E}_1 \times \hat{\mathbf{n}}$ no es cero en la pantalla, solo el campo total $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$. Tratemos de relacionar este campo, con el campo sobre la apertura. Dividamos

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1,s} + \mathbf{E}_{1,A}$$

Si la pantalla no tuviera una apertura tendríamos campos \mathbf{E}_o y \mathbf{B}_o . Usando las simetrías ya discutidas podemos, podemos sumarle para $z > 0$ los campos

$$\mathbf{E}_1 \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_o \quad \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_o$$

que tiene la simetría apropiada. Ahora podemos definir el campo eléctrico para $z > 0$ como

$$\mathbf{E}_s(z > 0) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{apertura} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \frac{e^{ik_o R}}{R} dS$$

donde \mathbf{E} es el campo total en la pantalla (el resto no contribuye dado que $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ en la pantalla). Para $z < 0$ podemos utilizar

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_s$$

donde E_r es el campo reflejado por una pantalla infinita (los campos incidentes son E_o).

Problema: Para el caso de una onda incidente sobre una apertura circular tenemos

$$\mathbf{E}_o = E_o(\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \alpha - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \alpha)e^{ik_o(\cos \alpha z + \sin \alpha x)}$$

Asumiendo que el campo en la apertura es el campo incidente, podemos escribir

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i)_{z'=0} = E_o \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \alpha e^{ik_o \sin \alpha x'}$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_3$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ik_o|x|}E_o}{2\pi|x|}k_o \times \int_A \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{x}} dS'$$

donde $\hat{\mathbf{k}}_o = \mathbf{x}/|x|$. En esta geometría

$$\mathbf{E}_s = \frac{ie^{ik_o|x|}E_o \cos \alpha}{2\pi|x|}(\mathbf{k}_o \times \hat{\mathbf{e}}_2) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\beta e^{ik_o(\sin \alpha \cos \beta - \sin \theta \cos(\phi - \beta))}$$

Definiendo

$$\xi = \sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \theta \sin \alpha \cos \phi}$$

podemos encontrar

$$\mathbf{E}_s = \frac{ie^{ik_o|x|}a^2 E_o \cos \alpha}{|x|}(\mathbf{k}_o \times \hat{\mathbf{e}}_2) \frac{J_1(k_o a \xi)}{k_o a \xi}$$

Finalmente

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left[\frac{cE_o^2}{8\pi} \pi a^2 \cos \alpha \right] (\cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \theta) \left| \frac{2J_1(k_o a \xi)}{k_o a \xi} \right|^2$$

Este resultado es una mejora consistente a los resultado de escattering escalar.

Notemos que tenemos un resultado similar al anterior. Este resultado solo tiene sentido si $k_o a \gg 1$, sino las condiciones de borde son relevantes.

9.1. Que pasa en el limite $k_o d \sim 1$

Para mas adelante.