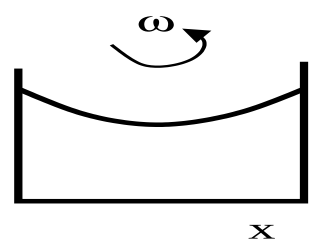
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Electrodinámica: Tarea Nº 1

Profesor: Alejandro Valdivia — Ayudante: Rafael Medina

1. Tenemos un cilindro con agua de radio R rotando con velocidad angular ω. ¿Cuál es la forma precisa que adquiere la superficie al girar si optimizamos el Lagrangiano



$$S = \int \left(\frac{1}{2}\rho v^2 dx^3 - \rho g h dx^3 \right)$$

y la energía

$$S = \int \left[\frac{1}{2}\rho v^2 dx^3 + \rho h g dx^3 \right]$$

dadas las condiciones de borde. Cual tiene sentido? Grafíque.

2. Tome el funcional

$$L = \int \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) - \rho A_o + J \cdot \mathbf{A} \right] dxdydzdt$$

Pruebe que las ecuaciones de Euler-Lagrange dan las ecuaciones de Maxwell's en el vacío para E(x,y,z,t), B(x,y,z,t). Para esto, introduzca los potenciales (A_0,A_1,A_2,A_3) definidos por las ecuaciones

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} A_0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

usando la condición de Lorenz $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}$

3. Una partícula se mueve sin rozamiento desde un punto A a un punto B, ambos en la superficie de la Tierra, a través de un túnel en el interior de la tierra, bajo la acción exclusiva de la gravedad. Determine la ecuación diferencial que determina la forma del túnel si se desea que el tiempo del viaje entre A y B sea mínimo (supóngase que la Tierra es una esfera de densidad uniforme y desprecie su

movimiento de rotación). Demuestre que la solución es una hipocicloide y halle el tiempo que dura el viaje entre A y B.

4. Considere una barra de longitud L, masa por unidad de longitud ρ y sea s la longitud del arco a lo largo de la barra. La energía elástica por unidad de longitud de la barra deformada es

$$\kappa \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2$$

donde y es la deflexión de la barra y κ es una constante elástica. La barra está apoyada de los dos extremos a igual altura y asume una forma $y(s)$ que minimiza la energía total. Encuentre $y(s)$. Note que y está fijo en los extremos, dy/ds no lo está.

5. Considere dos solenoides de inducción mutua M, que llamarémos 1 y 2, conectados a una resistencia R. Suponga que somos capaces de controlar la intensidad de la corriente que circula por el solenoide 1. Escogemos como T al periodo de I_1 y disponemos en cada periodo de una cantidad finita de energía E. Encuentre $I_1 = I_1(t)$ tal que se máximiza la energía transmitida al otro solenoide, asumiendo $I_1(0) = 0$.

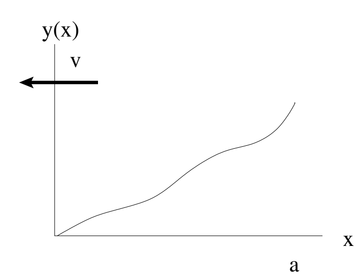
Puede ser útil

$$\varepsilon_{21} = -M\dot{I}_1$$
$$\varepsilon = IR \ ,$$

y

$$P = I\varepsilon \ .$$

6. Queremos determinar la forma del casco de un cohete de volumen V, suponiendo que es una superficie de revolución que minimiza la resistencia al avance en el aire a velocidad v_0 constante. La resistencia al aire es proporcional a la velocidad del cohete y a la superficie del casco. Para ello, suponga que el objeto se mueve en dirección del eje x (en sentido negativo) y que el casco es descrito por una función $y = y(x)$ monotónica con $y(0) = 0$ e $y(a) > 0$, pero libre. Escriba la ecuación de primer orden que tiene que resolver $y(x)$, describa como encontrar las constantes que esto involucra, y evalúe las que pueda.



Forma del casco del cohete.

7. Considere una superficie revolución que se extiende hasta el infinito. La superficie revolución se extende en $x > 0$ y está descrita por alguna función $y(x)$ que para $y(x > L) = R$. Sobre la superficie colisionan partículas con velocidad $v = v\,\hat{x}$ ¿Cuál es la superficie revolución que minimiza la resistencia del aire? Note que solo la región entre $0 < x < L$ ofrece resistencia. Suponga que la superficie es "puntuda".

8. La curva que forma una cuerda al colgar entre dos puntos fijos es tal que minimiza la energía potencial. Para una cuerda de largo L, demuestre que la solución es una catenaria. Ahora, considere un sistema discreto de N partículas de masa m, unidas por cuerdas de largo l. La primera y última partícula se encuentran fijas en $y(\pm a) = 0$. Encuentre la posición de cada una de estas partículas y demuestre que en el límite $N \to \infty$ y $l \to 0$ (talque $Nl \to L$), estas partículas se encuentran sobre la curva que describe una catenaria.

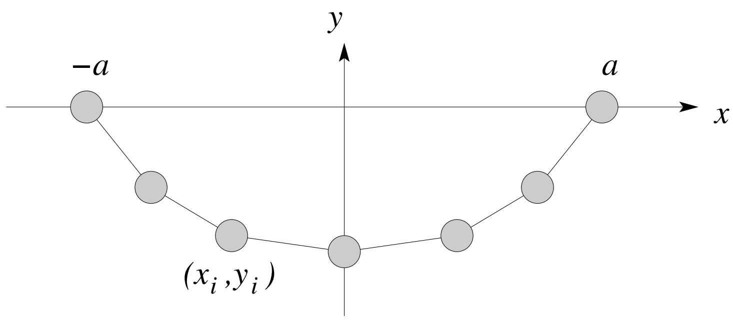
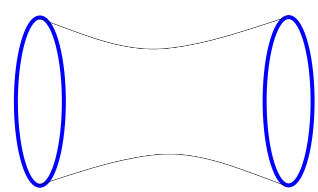


Figura 1: Sistema de N partículas.

9. Considere 2 anillos de radio R separados por una distancia 2ℓ puestos en forma concéntrica. Al sumergir y sacar esta estructura en una tina de agua con jabón, se obtiene una película de jabón que conecta los 2 anillos y que minimiza la superficie de revolución determinada por la curva $y(x)$ entre los 2 anillos. Escriba el Lagrangiano en termino de $y(x)$ y sus derivadas, y encuentre la solución en termino de una constante C de integración que esta determinada por una ecuación transcendental. Grafique ambos lados de la ecuación transcendental como función de C y muestre que dependiendo de ℓ/R se pueden obtener 0, 1, y hasta 2 soluciones diferentes. Que significa que no hayan soluciones? Debería ocurrir para ℓ/R pequeño o grande?



Pelicula de jabon entre 2 anillos de radio R.

Puede ayudar: poner los anillos en $x_\pm = \ell$ y usar la simetría fuertemente para deshacerse de una de las constante de integración.

$$1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$$

10. Tome una cuerda de largo π y demuestre que el semicírculo (entre $x = -1$ y $x = 1$ optimiza el área bajo esta cuerda. Escriba el Lagrangiano correspondiente, y encuentre la ecuación $y(x)$ para el semicírculo. **Ayuda:** Utilice las condiciones de borde y las simetrías para evaluar las constante en cuanto pueda.