Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

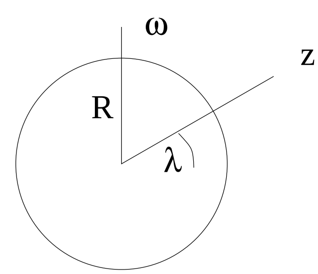
Electrodinámica: Tarea Nº 2

Profesor: Alejandro Valdivia Ayudante: Rafael Medina

1. El péndulo de Foulcault.

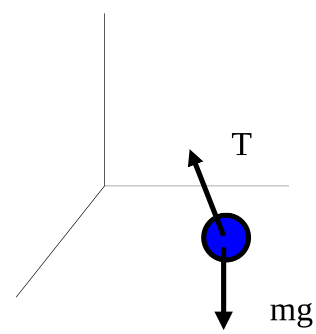
   a) Pruebe la relación en los apuntes con

$$\begin{aligned} A^{-1}(t)\frac{d^2A(t)}{dt^2}\mathbf{r}'(t) &= \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \\ A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}\frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt} &= \omega \times \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt} \\ \omega &= \omega_0 \hat{z}\,. \end{aligned}$$



   b) Este resultado en término de vectores es completamente exacto y completamente independiente de la dirección de ω. ¿Que otros términos aparecen en la segunda derivada en el tiempo si θ es una función arbitraria del tiempo?

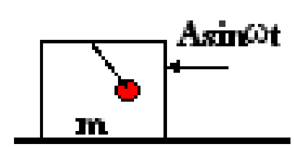
   c) Usemos el sistema de referencia del dibujo sobre la superficie de la tierra. Escriba las ecuaciones de movimiento para el péndulo en coordenadas esféricas.



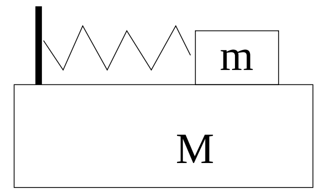
   d) Grafique trayectorias en el plano $\theta - \phi$. ¿Cuál es el parámetro pequeño de expansión? ¿Bajo qué condiciones se pueden hacer estas relaciones? También asumamos un ángulo pequeño. Para pequeñas oscilaciones en θ escriba las ecuaciones de movimiento en este sistema de referencia y resuelva. Demuestre que el plano de oscilacion del pendulo precesa.

   e) Grafique el caso para santiago. ¿Cuánto se demora en hacer la precesión?

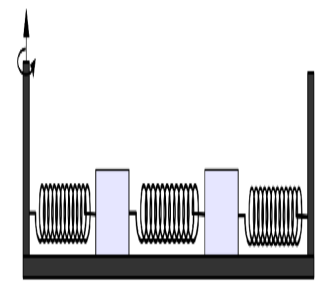
2. Pendulo forzado: Encuentre la ecuación de movimiento del péndulo forzado (con friccion) mostrado en la figura . El forzamiento se puede entender como un movimiento de la caja en la cual está el péndulo, y es de la forma $A \operatorname{sen} \omega t$. Para $\omega = 1, \omega_0 = 1, \beta = 0{,}1, A = 1$, construya el espacio de fase. Existen varios atractores? Si es así, Cuántos hay? Encuentre sus cuentas de atraccion numericamente.



3. Considere un carro de masa M que se mueve libremente y sin fricción sobre un camino. En este carro hay un péndulo de masa m y largo L como se muestra en la Fig. . (a) Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema. (b) Cuales son las constantes de movimiento y que significado tienen? (c) Encuentre un equilibrio y perturbelo. Para pequeñas oscilaciones, encuentre las frecuencias y los modos de oscilación? A que corresponden? Construya una solucion completa cerca de este equilibrio.



4. Considere dos masas m atadas entre ellas por un resorte, que además están atadas a dos paredes a distancia L por otros dos resortes, como se observa en la figura 1. Cada resorte posee constante de restitución k y largo natural $l_0 = 0$. El sistema entero rota con velocidad angular $\Omega^2 = \alpha\omega_r^2$ ($\omega_r^2 = k/m$) en torno al eje $\hat{z}$. Comente sobre que valores de α hacen resonancia y si se puede hacer girar al sistema a esa frecuencia. Encuentre las frecuencias de oscilación y los modos normales.



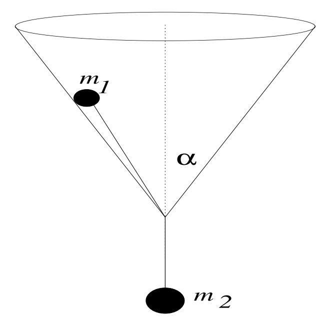
5. Considere dos masas, m_1 y m_2, unidas por una cuerda de largo l, que se disponen de la manera mostrada en la figura . La masa m_2 está restringida a moverse sobre la superficie interior del cono, que tiene ángulo característico α. Si se dejara el sistema solo, sin darle velocidad inicial a las masas, m_1 caería debido a la acción de la gravedad, arrastrando a m_2 con ella.

   a) Encuentre el Lagrangiano del sistema.

   b) Encuentre las ecuaciones de movimiento.

   c) Encuentre situaciones de equilibrio y describa las órbitas correspondientes. Estos equilibrios, ¿son estables o inestables?

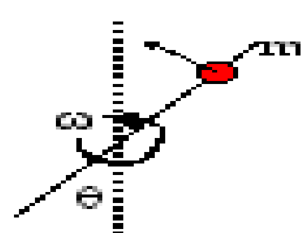
   d) ¿Qué pasa en el límite $\alpha \to \pi/2$?



6. Un anillo se mueve en un alambre recto que rota con respecto a su centro con una frecuencia ω. El eje de rotación y el alambre forman un ángulo θ

   a) Encuentre la ecuación de movimiento del anillo.

   b) ¿Hay alguna condición de equilibro? ¿Es estable o inestable?

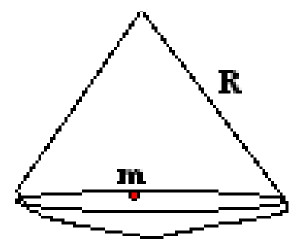


7. Platos y ruletas:

   a) Asumamos que una ruleta esta hecha de un plato que tiene la forma de una sección de una esfera.

      1) Defina variables generalizadas θ, ϕ y encuentre las ecuaciones de movimiento para una masa que se desliza sobre el plato. Normalice y grafique soluciones.

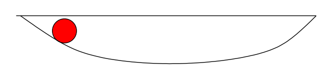
      2) Encuentre una ecuación para θ y encuentre las condiciones de equilibrio. Asuma que las oscilaciones son pequeñas y encuentre la frecuencia de oscilación alrededor de los puntos de equilibrio. En particular, ¿hay equilibrios con $\dot{\phi} \neq 0$? Grafique y demuestre.



   b) Piense en un plato que es una curva circular (sección de un círculo de radio R en 2-D como se muestra en la figura a. Piense en un disco de masa m que rueda sin resbalar sobre esta curva.

      1) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para la masa m.

      2) Encuentre los estados de equilibrio. ¿Cuáles son las frecuencias de pequeñas oscilaciones?



   c) ¿Qué pasa con las fuerzas de restricción si dejamos que este plato-curva sea, además, un péndulo? La fuerzas de fricción, que mantienen rodando al disco de masa m y su reacción sobre el péndulo de masa M, ¿hacen trabajo virtual?

      1) Asuma que las fuerzas de restricción no hacen trabajo virtual y encuentre las ecuaciones de movimiento para la masa m y para el plato de masa M.

      2) Encuentre situaciones de equilibrio y las frecuencias de los modos de pequeñas oscilaciones.

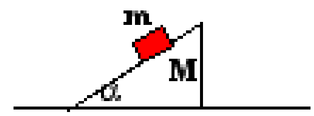
8. Masas y planos inclinados.

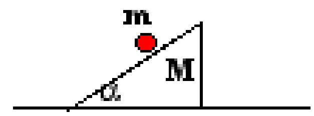
   a) Una masa m se resbala sin fricción sobre un triángulo que también resbala sin fricción sobre una superficie. Trate de resolver este problema por

      1) las ecuaciones de Newton,

      2) el principio de Hamilton y

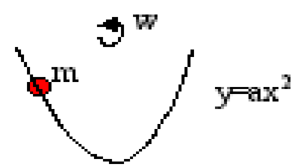
      3) el principio de Hamilton tratando la restricción con el método de multiplicadores de Lagrange. ¿Cuál es la ecuación de movimiento? Encuentre las fuerzas de restricción. ¿Cuál es el trabajo hecho por las fuerzas de restricción?





   b) Una esfera rueda sin resbalar sobre un triángulo que se resbala sin fricción sobre una superficie. Asuma que las fuerzas de restricción no ejercen ningún trabajo y encuentre las ecuaciones de movimiento y las constantes de movimiento.

9. Piense en el problema de un anillo moviéndose sin fricción en un alambre que tiene la forma de una parábola $y = ax^2$ y, además, rota con frecuencia ω alrededor del eje $\hat{z}$. Encuentre las ecuaciones de movimiento, los equilibrios, y los modos de perturbacion con respecto a los equilibros estables y sus frequencias. Se conserva H y E? Son iguales?



   a) Asuma que no hay fricción y encuentre la ecuación de movimiento usando el principio de Hamilton.

   b) Encuentre la ecuación de movimiento usando el principio de Newton.

   c) ¿Cuál es la relación entre estos dos métodos?

   d) ¿Qué cambia si incluimos la fricción en estos dos métodos? ¿Qué pasa con el principio de Hamilton?

   e) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio de este sistema?

10. Considere una cuña triangular de ángulo α fija al suelo. Sobre ella caen rodando sin resvalar dos cilindros distintos atados a través de una cuerda de largo l (vea la Figura 1). Ambos tienen masa m y radio R. Use el principio de Hamilton para encontrar las ecuaciones de movimiento para los cilindros y la tensión de la cuerda.