

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Electrodinámica: Tarea N° 3

Profesor: Alejandro Valdivia

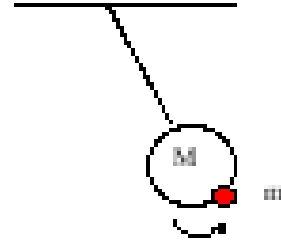
Ayudante: Rafael Medina

1. En dinámica relativista, el Hamiltoniano de una partícula que se mueve en una dimensión, en presencia de un campo externo, es

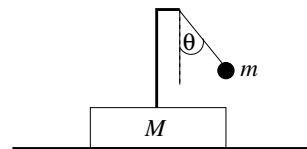
$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V(r),$$

donde p es su momento, m la masa en reposo, c la velocidad de la luz y V el potencial externo.

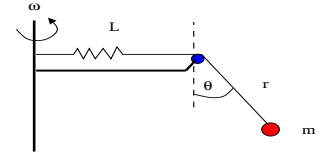
2. Tomemos un anillo de masa M que además es un péndulo. En este anillo hay una masa m que puede resbalar libremente (sin fricción) a lo largo del anillo como se muestra en la Fig. 1



- a) Encuentre el Lagrangiano del sistema.
- b) Encuentre las ecuaciones de movimiento
- c) Encuentre los estados estacionarios.
- d) Cuales son las frecuencia de pequeñas oscilaciones y los modos del sistema para los estados estables?
3. Tomemos 2 masas m puntuales conectados por 3 resortes de tamaño en equilibrio x_o . El sistema esta entre dos paredes separadas por una distancia L . Encuentre el punto de equilibrio y los modos de oscilación. Hay alguna diferencia entre $L > 3x_o$ y $L < 3x_o$
4. Tomemos un péndulo de masa m y largo R sobre un carro de masa M que se puede desplazar en una dimensión sobre la superficie como muestra la Figura. Encuentre las ecuaciones de movimiento. ¿Qué constantes de movimiento hay? ¿Son la energía y el Hamiltoniano constantes de movimiento? ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía? Describa el movimiento cerca del punto de equilibrio estable. ¿A qué corresponden los modos? Construya la solución completa cerca del punto de equilibrio. Vea si su solución tiene sentido en límite $M \gg m$.

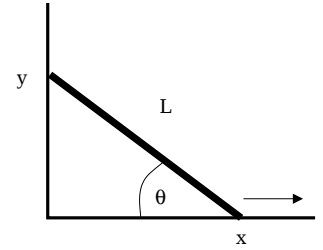


5. Tomemos una masa m que cuelga de una cuerda de largo ℓ que esta atada a un resorte (con largo de equilibrio ℓ_E tal que $\ell_E \ll L$). Este resorte esta atado a un eje que rota con frecuencia ω como se muestra en la Figura. Encuentre las ecuaciones de movimientos. Encuentre el equilibrio relevante. Es estable? Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones para el caso $\ell = 3\ell_E$ y $L = 2\ell_E$. ¿Qué constantes de movimiento hay? ¿Son la energía y el Hamiltoniano constantes del movimiento? ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía?

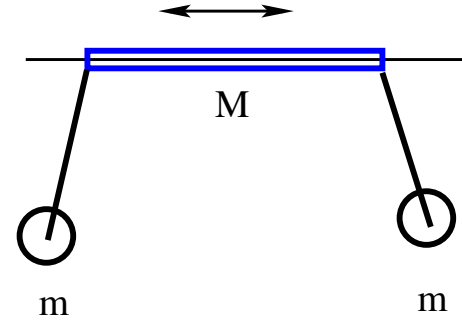


Péndulo con resorte rotando a frecuencia ω

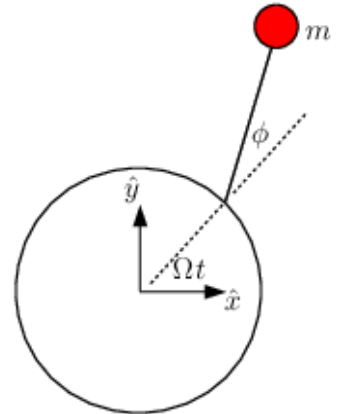
6. Tomemos una vara de largo L que resbala tocando el suelo y la pared como se muestra en la Figura. Encuentre las ecuaciones de movimiento en termino de variables generalizadas. Encuentre para que ángulo la vara pierde contacto con el suelo usando el método de multiplicadores de Lagrange si parte del reposo en un ángulo θ_0 . **Ayuda:** Utilice θ y x .



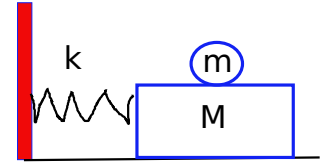
7. Considere un tubo cilindrico de masa M y largo L que se puede deslizar sin fricción en un alambre horizontal. De los extremos de este cilindro cuelgan 2 pendulos de masa m_p y largo ℓ (masa de las cuerdas es m_c) como se ve en la figura. Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento (1 puntos). Encuentre el Hamiltoniano y la energía, vea si se conservan y si son iguales (1 puntos). Para el equilibrio estable, encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones, y describa los modos. Además describa el significado de cada una de las frecuencias y su modo en termino de las constantes de movimiento (4 puntos).



8. Considere una masa m está atada por una cuerda de largo l a un pivote. El pivote recorre un anillo de radio R a frecuencia Ω . Pase a las variables generalizadas que representan el sistema de referencia que se mueve con el pivote. Muestre que el Lagrangiano se puede reescribir sumando una derivada total como el de un péndulo bajo la acción de una aceleración de gravedad $g(\Omega)$. Encuentre $g(\Omega)$, el Hamiltoniano, los puntos de equilibrio y las frecuencias naturales de oscilación ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía? ¿Es una constante de movimiento?



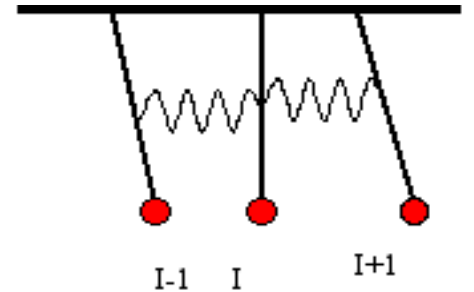
9. Considere un sistema formado por un bloque de masa M que esta conectado a un resorte de constante k y largo natural $\ell_o = 0$ fijo a una muralla. Sobre este bloque rueda sin resbalarse una pelota de radio R y momento de inercial I como se observa en la figura. Encuentre el Lagrangiano en variables generalizadas y las ecuaciones de movimiento. Encuentre un equilibrio y calcule las frecuencias de pequeñas oscilaciones y los modos normales. Grafique a que corresponden estos modos. Calcule el Hamiltoniano, la energía, señale si son iguales y cuales son constantes. Use el método de multiplicadores de Lagrange encuentre las ecuaciones de movimiento y calcule la fuerza de restricción. Describa cuando la pelota comienza a deslizarse.



Péndulo y dos masas

10. Tomemos un numero N de péndulos de masa m y largo L , que se mueven en forma transversal a una barra e interactúan con resortes angulares a través de una fuerza $(k(\theta_{n+1} - \theta_n))$, con θ_n como la desviación angular con respecto a la vertical del péndulo n .

- Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para este sistema.
- Tomemos la distancia entre péndulos como d y tomemos el limite $d \rightarrow 0, m \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, con $\rho = m/d, \eta = kd$ constante y encuentre la ecuación de sine-gordon para el ángulo $\theta(x, t)$.
- Demuestre que la ecuación tiene una solución solitónica con $|\alpha| < 1$



$$\theta(x, t) = 4 \tan^{-1} \exp \left[\pm \frac{\frac{\omega x}{v} + \alpha \omega t}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right]$$

Que valor tienen θ , ν y α ?

- Construya la simulación numérica para los pendulos discretos y encuentre la solución solitónica.

Útil: $\sin [4 \tan^{-1} x] = -\frac{4x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$