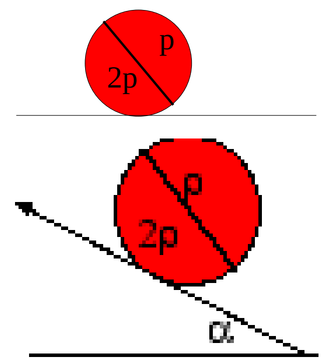
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Electrodinámica: Tarea Nº 5

Profesor: Alejandro Valdivia　　　　　　　　　　　　　　Ayudante: Rafael Medina

1. Considere un disco compuesto de dos mitades con densidades p y 2p. Construya el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para el disco rodando sin resbalarse en un plano horizontal como se muestra en la Fig. **??**a. Encuentre los puntos de equilibrio y la estabilidad de estos. Construya el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para el disco rodando sin resbalarse en un plano inclinado como se muestra en la Fig. **??**b. Tome los limites razonables para demostrar que su solución es correcta



2. Considere tres masas, m en $\{2r, 0, 0\}$, 2m en {0,-2r,2r},3m en {2r,2r,0}. Encuentre el momento de inercia, los ejes principales de inercia y los momentos principales de inercia. Encuentre el Lagrangiano y los posibles movimientos. Si en $t = 0$ tenemos $\omega(0) = (\omega_o \cos\theta, \omega_o \sin\theta, 0)$, encuentre $\omega(t)$ y el movimiento de cada una de las masas en el tiempo.

3. Un lanzador de martillo olímpico. Simulemos el martillo como 4 átomos de masa m (no gravedad aun). Inicialmente tenemos ω={0,0,o} con respecto al centro de masa, como en la figura.

    a) Describa la variación del centro de masa

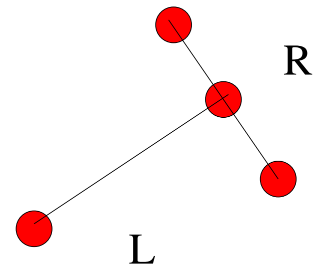
    b) Estudiemos la parte rotacional. Cual es el momento angular en el sistema inercial? Cuando es constante? Cual es el torque con respecto al centro de masa?

    c) Transforme el problema al sistema de EP. Que es $\bar{I}$ y V?

    d) Escriba las ecuaciones de Euler y resuelva.

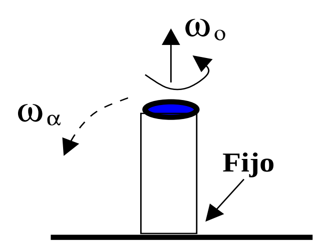
    e) Construya el Lagrangiano en este sistema en termino de θ, ϕ, ψ. Cuales son los valores iniciales de θ, ϕ, ψ y sus derivadas

    f) Puede resolver el problema? y en el sistema inercial?



4. Considere un plato (medio cilindro de radio R, densidad uniforme por unidad de largo, y largo infinito) que se balancea sin resbalarse en un plano. Utilice los ángulos de Euler. Cuantas variables independientes tenemos? Cual es la restricción relevante? Encuentre el Lagrangiano.

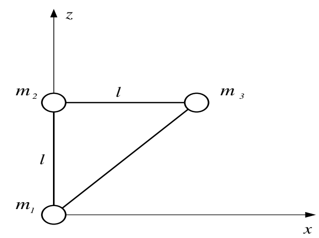
5. Tomemos un péndulo-cilindro de masa M, radio R y altura L que esta fijo al suelo como se muestra en la figura, pero que es libre de rotar en los tres ángulos de Euler. Inicialmente el cilindro rota con frecuencia angular constante ω_o con respecto al eje del cilindro. Le damos un impulso al cilindro perpendicular al eje de rotación del cilindro con lo que adquiere una velocidad angular ω_a instantánea extra como se muestra en la figura. Que condición tiene que satisfacer ω_a para que este péndulo-cilindro no toque el suelo?



Impulso sobre cilindro

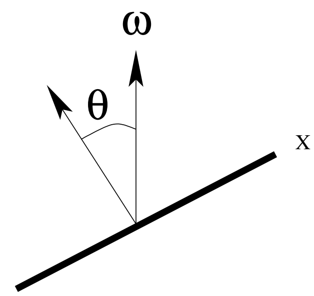
6. Construya el Lagrangiano que describe el movimiento de un trompo cónico de masa M, altura h, y radio de la base circular R. Este cono es un trompo que su punto fijo en el suelo. Encuentre las constantes de movimiento y posibles soluciones. Que tipo de movimiento tenemos?

7. Consideremos una estructura triangular formada por tres masas m como se muestra en la figura, con $l = 10$ [cm]. En el instante $t = 0$ [s] lanzamos la estructura de manera tal que su centro de masa parte con $v = 10$ [m/s] en un ángulo $\theta = \pi/6$ con respecto a la horizontal y la frecuencia angular es $\omega = 1\hat{y}$ [Hz] con respecto al centro de masa. Considere $g = -10\hat{z}$ [m/s^2].

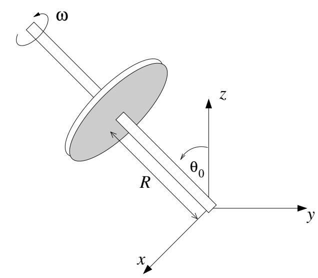


   - Encuentre $\omega(t)$.
   - Calcule la posición de cada una de las masas en el instante en que el centro de masa de la estructura vuelve a la posición $z = 0$.

8. Inicialmente, un disco con inclinación θ_o respecto al eje $\hat{z}$ esta girando con frecuencia angular $\omega = \omega_o \hat{z}$. Encuentre los componentes de $\omega(t)$ en el sistema de los ejes principales y en el laboratorio. Encuentre los componentes del momento angular L en el sistema del laboratorio. Describa la dinámica en el sistema de los ejes principales en termino de los ángulos de Euler.



9. Considere un disco de masa M y radio R montado en el centro de una barra cilíndrica de masa despreciable y longitud $2R$, como muestra la Fig. **??**. El sistema, que está posado sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción suficiente para no resbalar, está rotando con gran velocidad angular $\omega(t)$ (**ayuda:** a que corresponde este ángulo?), e inicialmente se encuentra inclinado un ángulo θ_0 respecto a la vertical y precesando con velocidad Ω . Suponga que la tasa de cambio de $\omega(t) \approx \omega_o$ es pequeña en comparación a la precesión.



   a) Calcule los momentos de inercia principales del sistema.

   b) ¿Cuáles son las componentes del torque en el sistema de referencia solidario con el trompo? para un ángulo arbitrario de θ y ψ.

   c) Encuentre una ecuación diferencial para $\theta(t)$.

   d) ¿Qué condición debe cumplir θ_0 para que sea un punto de equilibrio del sistema?

   e) ¿Qué condición debe cumplir $\omega(t)$ para que el sistema no se caiga si θ_0 es punto de equilibrio?

10. Considere una cuerpo rígido, rotando con una velocidad angular inicial $\omega_o = 3\sqrt{2}w_o[0,0,1]$, compuesto de las siguientes 6 masas:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m & r_1 &= L\left[0, 1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
m_2 &= m & r_2 &= L\left[0, 1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
m_3 &= m & r_3 &= L\left[-1, 1, 0\right] \\
m_4 &= m & r_4 &= L\left[1, 1, 0\right] \\
m_5 &= 2m & r_5 &= L\left[0, 1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
m_6 &= 2m & r_6 &= L\left[0, 1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]
\end{aligned}
$$

   a) Calcule las dos constante de movimiento
   b) Encuentre $\omega(t)$
   c) Usando los ángulos de Euler, encuentre las constantes de movimiento, construya el potencial efectivo y describa el movimiento del sistema