

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Electrodinámica: Tarea N° 6

Profesor: Alejandro Valdivia

Ayudante: Rafael Medina

1. Consideremos 2 masas ($m_1 = m_2$) unidas por resortes entre ellas y a la pared (constante k). Asuma que la distancia de equilibrio de los resortes es $L/3$. Cual es la transformación canónica que resuelve este problema



2. Tomemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{px^2 + p_y^2}{2} + \omega^2 (x^2 + y^2 + 4gxy)$$

Encuentre la transformación canónica que nos lleva a

$$\bar{H} = \omega_1 \bar{p}_1 + \omega_2 \bar{p}_2$$

Que es ω_1 y ω_2 ? **Ayuda:** Sugiero hacerlo en dos partes. Primero convertirlo a osciladores armónicos independientes y luego usar la transformación estándar para resolver.

3. Rotaciones.

- a) Evalúe los siguientes paréntesis de Poisson $\{L_i, r_j\}$ $\{L_i, p_j\}$ $\{L_i, r\}$ $\{L_i, p^2\}$.
- b) Si el Hamiltoniano $H=T+U$ es invariante bajo rotaciones, de que variables puede U depender.
- c) Con

$$H = T + \frac{\alpha}{r}$$

pruebe que el vector de Lenz

$$A = p \times L + m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

es una integral de movimiento usando el paréntesis de Poisson

- d) Calcule $\{A_i, A_j\}$

- e) Si un Lagrangiano es invariante a rotaciones en cualquier dirección. Usando los generadores de las rotaciones, pruebe que el momento angular (sus 3 componentes) son constantes de movimiento. Haga lo mismo usando el formalismo del teorema de Poisson.

4. Escriba el Hamiltoniano para el oscilador armónico mas simple que se le ocurra.

- a) Cual es la solución? Que constante de movimiento existe?
- b) Súmele la perturbación $H_1 = 2\alpha q + \alpha^2$ ($\alpha > 0$) y dibuje el tipo de trayectorias que espera usando el método de los potenciales
- c) Escriba las ecuaciones de movimiento y resuelva directamente
- d) Escriba una transformación canónica que transforme este problema al oscilador armónico inicial. Ayuda: use la transformación $T(q, \bar{p})$ y escriba $\bar{q}$ y p en termino de T .
- e) Resuelva el problema en termino de $\bar{q}$ y $\bar{p}$ usando la solución (a). Re-escriba la solución en termino de (q, p) y compare con la solución (c).
- f) Dibuje las trayectorias en el espacio de fase.

5. Considere el oscilador armónico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

y la transformación

$$\bar{q}(q, p) = p + iaq \quad \bar{p}(q, p) = \frac{p - iaq}{2ai}$$

- a) Demuestre que la transformación es canónica
- b) Encuentre la función generadora de esta transformación
- c) Demuestre que se puede transformar a $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = i\bar{q}\bar{p}$
- d) Resuelva $q(t)$ y $p(t)$ resolviendo $\bar{q}(t)$ y $\bar{p}(t)$

6. En un sistema de 2 grados de libertad, encuentre la transformación canónica F mas general consistente con

$$\bar{q}_1 = q_1^2 \quad \bar{q}_2 = q_1 + q_2$$

Con esta definición podemos transformar

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1} \right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

a una situación donde podemos ignorar los $\bar{q}_i$. Es F una constante de movimiento? Encuentre la solución $q_i(t)$ para este problema. A que corresponden estas soluciones en el espacio de fase $q - p$?

7. Supongamos el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \epsilon \Phi(q)$$

donde $\epsilon \ll 1$ y $\Phi(q)$ es un potencial arbitrario que depende solo de q .

(a) Demuestre que la función generatriz $T(q, \bar{p}, t) = S(q, \bar{p}) - \Omega t$ es a primer orden en ϵ

$$T = \bar{p}q - \frac{m}{\bar{p}}\epsilon \int^q \Phi(x)dx - \frac{\bar{p}^2}{2m}t$$

asumiendo que $\bar{p} > 0$. Que es $\Omega(\bar{p})$?

(b) Encuentre $\bar{q}$ y $\bar{p}$ en función de q y de p , a primer orden en ϵ . Demuestre que la transformación a primer orden en ϵ es canónica.

8. Considere un péndulo, con el ángulo q definido con respecto a la vertical como se acostumbra. Para pequeñas amplitudes de oscilación, encuentre la transformación a variables de ángulo-acción. A segunda aproximación con la amplitud de la oscilación, encuentre la variación de la frecuencia de oscilación del péndulo con esta amplitud.

9. Considere el problema de Kepler relativista (o átomo de hidrógeno clásico relativista), en cuyo caso el Hamiltoniano es

$$H = \sqrt{c^2 p^2 + \frac{c^2}{r^2} \ell^2 + m^2 c^4} - \frac{e^2}{r}, \quad (1)$$

donde, en coordenadas polares, p y ℓ son los momentos conjugados, dados por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad \ell = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad (2)$$

con L el Lagrangiano del sistema.

- a) A partir de la ecuación Hamilton–Jacobi, encuentre una expresión integral para $S(r, \theta; E) = R(r) + Q(\theta) - Et$.
- b) Encuentre una expresión explícita para la órbita $r = r(\theta)$ y muestre que para algún rango de ℓ , la partícula de masa m se acerca en una órbita tipo espiral hacia $r = 0$.
- c) Muestre que en el límite no-relativista obtenemos la expresión correspondiente derivada anteriormente.

Puede ser útil:

$$\int \frac{du}{\sqrt{A + Bu - Cu^2}} = -\frac{1}{\sqrt{|C|}} \begin{cases} \arccos \left[\frac{2Cu - B}{\sqrt{B^2 + 4CA}} \right] + \text{cte.} & C > 0 \\ \text{arcosh} \left[\frac{C^2u - B}{C\sqrt{B^2 + 4AC}} \right] + \text{cte.} & C < 0 \end{cases}$$

10. Caotic bouncing: Describa el mapa de este sistema en el límite $M \gg m$ que relaciona las velocidades entre choques. La energía se conserva? Asuma que la amplitud de la oscilación de la masa M es muy pequeña (la fase de esta oscilación es relevante). Normalice el tiempo y la ecuación de movimiento. Haga un diagrama de bifurcación con respecto a un parámetro relevante. El sistema es caótico? Calcule el exponente de Lyapunov como función de este parámetro.

