Capítulo 5: Transformaciones canónicas

En este capitulo estudiaremos las idea básicas de los sistemas canónicos y las simetrías subyacentes. En un sistema de dimensión d, con un espacio de fase de dimensión $2d+1$, podemos definir

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Notemos que hemos definido la gradiente en d dimensiones. Si esta relación se pueda invertir, podemos construir el Hamiltoniano a través de la transformación de Legendre

$$\mathscr{H}\left(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}\right) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathscr{L}\left[t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})\right]$$

Esta transformación da origen a las ecuaciones de movimiento

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}} \qquad \frac{d\mathscr{H}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}$$

Un sistema que admite un Hamiltoniano se denomina un sistema canónico. Estos sistemas tienen su relevancia en mecánica cuántica, ya que la teoría se puede desarrollar solo desde el punto de vista de sistemas canónicos (y operadores hermiticos).

Podemos escribir las ecuaciones canónicas en forma mas compacta definiendo el vector

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

y la gradiente del Hamiltoniano con respecto a $\mathbf{x}$ como

$$\mathscr{H}_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}\right)$$

Con la siguiente matriz de dimensión $2d \times 2d$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

podemos definir las ecuaciones canónicas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathscr{H}_{\mathbf{x}}$$

donde la matriz $\mathbf{J}$ tiene la propiedad de $\mathbf{J}^2 = -1$ y $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$.

Índice

1. Transformaciones Canónicas (TC) 3
- 1.1. Los 4 casos (transformaciones de Legendre) . . . 4
  - 1.1.1. Caso: $\mathscr{M}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t)$ . . . 4
  - 1.1.2. Ejemplo del oscilador armónico . . . 5
- 1.2. Estructura simpléctica . . . 6

2. Paréntesis de Poisson 8
- 2.1. Propiedades de los paréntesis de Poisson . . . 9

3. Simetría y Leyes de conservación 10
- 3.1. Punto de vista Lagrangiano: Teorema de Noether . . . 10
- 3.2. Punto de vista Hamiltoniano: TC Infinitesimales . . . 12

4. Ecuación de Hamilton-Jacobi 14
- 4.1. $\mathscr{H}$ independiente del tiempo t . . . 15
  - 4.1.1. Método 1 . . . 15
  - 4.1.2. Método 2 . . . 17
- 4.2. Rectificación global de la trayectoria . . . 19

5. Sistemas integrables (variables de ángulo – acción) 21
- 5.1. Teorema de sistemas integrables: . . . 22
- 5.2. Condición Simpléctica y variables de accion-angulo . . . 24
- 5.3. Invariantes adiabáticos . . . 29
- 5.4. Perturbaciones y Teoría de KAM . . . 31

6. Teorema de Liouville 38
- 6.1. Geometría Diferencial . . . 39
- 6.2. Formas y tensores . . . 41

7. Mecánica como el Limite de una ecuación de onda 41

1. Transformaciones Canónicas (TC)

Es posible obtener las ecuaciones de movimiento directamente del principio variacional de Hamilton usando

$$\mathscr{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

para $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ independientes, ya que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \frac{\partial L}{\mathbf{p}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

Es bastante claro que hay muchas formas de elegir las coordenadas independientes. Una transformación canónica (TC) se define como una transformación difeomorfica (que sea uno a uno tal que es posible encontrar el inverso) de

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathscr{H}\} \quad \rightarrow \quad \{\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathscr{H}}\}$$

que preserven el principio de optimización

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - \mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\right] dt = 0 \quad \rightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\bar{\mathbf{q}}} \cdot \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t)\right] dt = 0$$

y la estructura canónica de las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dfrac{\partial \bar{\mathscr{H}}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} = \dfrac{\partial \bar{\mathscr{H}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}$$

Es casi intuitivo darse cuenta que podemos sumarle a L la derivada completa de un funcional M, que depende solo de viejas y nuevas variables pero no de derivadas, sin cambiar la estructura de las ecuaciones.

$$\left[\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\right] = \left[\bar{\mathbf{p}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t)\right] + \frac{d\mathscr{M}}{dt}$$

Es importante notar que $\mathscr{M}$ solo puede depender de variables, viejas o nuevas, pero no de las velocidades. Esto garantiza que las variaciones sean cero en los limites de integración.

Dependiendo de que combinaciones de nuevas y viejas variable que definen a $\mathscr{M}$ tenemos las cuatro TC y se pueden obtener una de otras con una transformación de Legendre. La función $\mathscr{M}$ es denominada la función generadora de la TC. Es importante notar que solo dos variables se pueden usar en $\mathscr{M}$ (una nueva y una vieja) para mantener la independencia de las variables.

La razón fundamental para definir una TC es para ver si es posible encontrar una transformación de variables en la que el Hamiltoniano sea cíclico en alguna de la variables, lo que implica que

$$\dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{\mathscr{H}}}{\partial \bar{q}_i} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \bar{p}_i = \alpha_i = const$$

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{\mathscr{H}}}{\partial \bar{p}_i} = v_i(t) \qquad \rightarrow \qquad \bar{q}_i = \int_{t_1}^{t} v_i(t)dt + \beta_i$$

lo que resuelve el problema completamente para la variable i.

En principio podríamos multiplicar la relación por una constante (scale transformation)

$$\lambda\left[\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - \mathscr{H}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\right] = \left[\bar{\mathbf{p}}\cdot\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t)\right] + \frac{d\mathscr{M}}{dt}$$

pero por ahora asumiremos que $\lambda = 1$.

1.1. Los 4 casos (transformaciones de Legendre)

1.1.1. Caso: $\mathscr{M}\left(\mathbf{q},\bar{\mathbf{q}},t\right)$

En este caso tenemos

$$\frac{d\mathscr{M}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$$

y debemos satisfacer la ecuación de arriba

$$\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - \mathscr{H} = \bar{\mathbf{p}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathscr{H}} + \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}\left(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t\right) \\
\mathbf{p} = \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \mathbf{q}} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}\left(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t\right) \\
\bar{\mathscr{H}}\left(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t\right) \quad &= \mathscr{H}\left(\mathbf{q}\left(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t\right),\mathbf{p}\left(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t\right),t\right) + \mathscr{M}_t\left(\mathbf{q}\left(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}},t\right),\bar{\mathbf{q}},t\right)
\end{aligned}$$

asumiendo que las relaciones se pueden invertir.

De la misma forma podemos definir los 3 restantes casos asumiendo que se pueden invertir las relaciones.

$\mathscr{M} = T_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t)$	$\bar{\mathbf{p}} = -\dfrac{\partial T_1}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$	$\mathbf{p} = \dfrac{\partial T_1}{\partial \mathbf{q}}$	$\bar{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \dfrac{\partial T_1}{\partial t}$
$\begin{aligned}\mathscr{M} &= T_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t), t) \\ &= T_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) - \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) \cdot \bar{\mathbf{p}}\end{aligned}$	$\bar{\mathbf{q}} = \dfrac{\partial T_2}{\partial \bar{\mathbf{p}}}$	$\mathbf{p} = \dfrac{\partial T_2}{\partial \mathbf{q}}$	$\bar{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \dfrac{\partial T_2}{\partial t}$
$\begin{aligned}\mathscr{M} &= T_1(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t), \bar{\mathbf{q}}, t) \\ &= T_3(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t) \cdot \mathbf{p}\end{aligned}$	$\mathbf{q} = -\dfrac{\partial T_3}{\partial \mathbf{p}}$	$\bar{\mathbf{p}} = -\dfrac{\partial T_3}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$	$\bar{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \dfrac{\partial T_3}{\partial t}$
$\begin{aligned}\mathscr{M} &= T_1(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t), \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t), t) \\ &= T_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) \cdot \mathbf{p} - \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) \cdot \bar{\mathbf{p}}\end{aligned}$	$\mathbf{q} = -\dfrac{\partial T_4}{\partial \mathbf{p}}$	$\bar{\mathbf{q}} = \dfrac{\partial T_4}{\partial \bar{\mathbf{p}}}$	$\bar{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \dfrac{\partial T_4}{\partial t}$

Todas estas transformaciones se relacionan con una transformada de Legendre como podemos ver. Por lo tanto son en esencia la misma transformación.

Problema: Demuestre que T_2 incluye la transformación de identidad

1.1.2. Ejemplo del oscilador armónico

Hay una TC que hace cíclico el problema. Tomemos

$$\mathscr{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

con

$$T_1(q, \bar{q}) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot \bar{q}$$

con lo que podemos resolver

$$\bar{p} = -\frac{\partial T_1}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{2} \frac{m\omega q^2}{\sin^2 \bar{q}} \quad \rightarrow q = \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\omega}} \sin \bar{q}$$

con lo que obtenemos

$$p = \frac{\partial T_1}{\partial q} = m\omega q \cot \bar{q} = m\omega \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\omega}} \cos \bar{q}$$

Ahora podemos construir en el sistema transformado

$$\bar{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \frac{\partial T_1}{\partial t} = \omega \bar{p}$$

y podemos encontrar las ecuaciones de movimiento

$$\rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{p} = \bar{p}_o \\ \bar{q} = \omega t + \beta \end{array}$$

y volviendo al sistema inicial

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

solución que ya conocíamos. Cuando el momento p es constante y la coordenada asociada q lineal en el tiempo, p se denomina la variable de acción y q la variable angular. Ya volveremos a las variables de acción-ángulo mas abajo.

1.2. Estructura simpléctica

Los 4 tipos de transformaciones canónicas relacionan derivadas cruzadas entre los dos sistemas de coordenadas. Por ejemplo para el caso 1 tenemos

$$\frac{\partial p_i}{\partial \bar{q}_j} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \bar{q}_j \partial q_i} = -\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q_i}$$

similarmente para las otras TC. Por lo tanto podemos definir la matriz

$$M_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \quad \rightarrow \quad \left(M^{-1}\right)_{i,j} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}$$

Es interesante ver que toda la variedad escondida en las 4 transformaciones canónicas puede ser resumida en la siguiente relación

$$\boxed{\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^{-1} = -\mathbf{J}\mathbf{M}^T\mathbf{J}$$

La importancia de esta relación yace en que $\mathbf{M}$ es la matriz de segundas derivadas de generadores de TC y le da cierta simetría al espacio de fase. De hecho todas la matrices que obedecen esta relación conforman el grupo real simpléctica S, al cual pertenece $\mathbf{M}^T$ y $\mathbf{M}^{-1}$. Mas aun, de esta relación se puede probar que $(detM)^2 = 1$, $\mathbf{M}$ no es singular y tiene inverso. Mas aun, es posible probar que $det(M) = +1$ para todas $\mathbf{M}$. Podemos además ver que $\mathbf{J}$ es invariante bajo TC, por esta razón juega el rol de una métrica en el espacio de fase.

Problema: Pruebe esta relación para 1 dimensión.

Partamos por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial \bar{q}} & \dfrac{\partial q}{\partial \bar{p}} \\ \dfrac{\partial p}{\partial \bar{q}} & \dfrac{\partial p}{\partial \bar{p}} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir

$$\mathbf{M}^T\ \mathbf{J}\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} + \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} - \dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, usando las relaciones de la tabla

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}}\left[\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{q}}\right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\frac{\partial T_1}{\partial \bar{\mathbf{q}}}\right] = -\frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{p}}}\left[\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{q}}\right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\frac{\partial T_2}{\partial \bar{\mathbf{p}}}\right] = -\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}$$

podemos escribir

$$-\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}} = 1$$

dado que

$$1 = \frac{d}{d\mathbf{q}}\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}}$$

vemos que es igual a

$$\mathbf{M}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Mas aun, podemos demostrar que el determinante es

$$\begin{aligned} det(M) &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{det(M) = 1}$$

Este resultado es general para cualquier dimensión.

Problema: Si tenemos una transformación linear, que necesitamos garantizar para que sea una transformación canónica?

En este caso tenemos

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$$

y para que sea una transformación simpléctica, necesitamos que el determinante de la matriz sea $+1$.

Problema: Pruebe que las transformaciones canónicas representadas por la matriz simpléctica $\mathbf{M}$ forman un grupo.

Problema: Probar para la TC del oscilador armónico que det $M = +1$

2. Paréntesis de Poisson

Supongamos que tenemos una función de coordenadas generalizadas $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, la variación de esta función en la órbita es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathscr{H}\}$$

lo que define el paréntesis de Poisson. Para dos funciones dinámicas tenemos

$$\{f, g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} = f_{\mathbf{x}}^T \, \mathbf{J} \, g_{\mathbf{x}}$$

Es fácil probar que el paréntesis de Poisson es invariante bajo una TC.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} = \sum_j^d \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} = \sum_j^d \frac{\partial f}{\partial x_j} (M)_{j,i} = \sum_j^d (M^T)_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

o en forma matricial

$$f_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{M}^T \, f_{\mathbf{x}}$$

Ahora podemos demostrar que

$$\{f, g\}_{\bar{\mathbf{x}}} = f_{\bar{\mathbf{x}}}^T \, \mathbf{J} \, g_{\bar{\mathbf{x}}} = f_{\mathbf{x}}^T \, \left(\mathbf{M} \, \mathbf{J} \, \mathbf{M}^T \right) g_{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{x}}^T \, \mathbf{J} \, g_{\mathbf{x}} = \{f, g\}_{\mathbf{x}}$$

La última relación se consigue de la definición de la estructura simpléctica de las TC, ya que M^T también pertenece a S. De hecho es posible darnos cuenta que si T es una transformación que satisface esta relación para todo f y g, entonces es una TC.

Si asumimos que

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$$

es posible demostrar que una transformación es una TC si satisface

$$\{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0 \qquad \{\bar{q}_i, \bar{p}\} = \delta_{i,j}$$

Por lo tanto, hasta ahora tenemos 3 formas de determinar si una transformación es canónica

- M es simpléctico
- El conmutador {f,g} es invariante
- Los paréntesis de Poisson de las variables satisfacen las relaciones de arriba

Note la similitud de estas relaciones y las relaciones canónicas de la mecánica cuántica. El paso a la mecánica cuántica se hace justamente convirtiendo estos paréntesis de Poisson en conmutadores de operadores (multiplicados por una constante). Veremos esto explícitamente mas abajo.

2.1. Propiedades de los paréntesis de Poisson

Ahora veremos algunas propiedades de las paréntesis de Poisson. En termino de la dinámica de las variables canónicas, podemos escribir

$$\dot{q}_i = \{q_i, \mathscr{H}\}$$
$$\dot{p}_i = \{p_i, \mathscr{H}\}$$

Además se puede demostrar que

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Esta última se denomina la identidad de Jacobi. Esta relación se puede probar usando la simetría de los paréntesis de Poisson. De esta relación obtenemos que si $f(q, p)$ es una constante de movimiento, entonces

$$\{f, \mathscr{H}\} = 0$$

Obtenemos el **teorema de Poisson**: El paréntesis de Poisson de dos integrales de movimiento es de nuevo una integral de movimiento. Por ejemplo, si

$$\omega = \{f, g\} \qquad\qquad \{f, \mathscr{H}\} = \{g, \mathscr{H}\} = 0$$

entonces

$$0 = \{\mathscr{H}, \omega\} + \{f, \{g, \mathscr{H}\}\} + \{g, \{\mathscr{H}, f\}\} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\omega} = \{\omega, \mathscr{H}\} = 0$$

3. Simetría y Leyes de conservación

Supongamos que tenemos un Lagrangiano independiente del tiempo

$$\mathscr{L} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

Es fácil demostrar que si la energía cinética es una función homogénea de 2do orden, entonces

$$\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} = 2T \quad \rightarrow \quad \mathscr{H} = T + U = E$$

lo que además implica que la energía se conserva en una trayectoria. Acá vemos que la existencia de una simetría, en este caso el sistema es invariante en el tiempo ("time shift"), genera una constante de movimiento, en este caso la energía. Esta observación es muy general, y se determina el teorema de Noether.

3.1. Punto de vista Lagrangiano: Teorema de Noether

Supongamos que tenemos $\mathscr{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ independiente del tiempo (un sistema autónomo) que es invariante bajo la transformación continua $\mathbf{q} : \mathbf{h}(\mathbf{q}, s)$ del parámetro s, con $\mathbf{h}(\mathbf{q}, s = 0) = \mathbf{q}$, entonces existe la integral de movimiento

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{h}(\mathbf{q}, s) \bigg|_{s=0}$$

Prueba: si $\mathbf{q}(t)$ es una solución de las ecuaciones de movimiento, entonces $\boldsymbol{\phi}(t, s) = \mathbf{h}(\mathbf{q}, s)$ también es una solución de las ecuaciones de movimiento, ya que

$$\mathscr{L}\left(\boldsymbol{\phi}(t, s), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t, s)\right) = \mathscr{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{q}} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\phi}}$$

ya que $\mathscr{L}$ no depende de $\boldsymbol{\phi}(t, s)$ (mirar el capitulo sobre calculo de variaciones), y con la definición $\dot{\boldsymbol{\phi}}(t, s) = \boldsymbol{\phi}_t(t, s)$. Esto implica que

$$I\left(\boldsymbol{\phi}(t, s), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t, s)\right) = \frac{\partial \mathscr{L}(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(t, s)}{\partial s}$$

$$\frac{dI(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}, s)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial s} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial s}\right) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial s} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}}{\partial s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial s} = 0$$

para todos los valores de s. Por lo tanto

$$I(\boldsymbol{\phi}(t,s),\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,s),s)\Big|_{s=0} = I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{h}(\mathbf{q},s)\Big|_{s=0}$$

también es una constante de la trayectoria. Notemos que es trivial extenderlo para varias dimensiones

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{h}(\mathbf{q},s)\Big|_{s=0}$$

Ejemplo 1: Tomemos el Lagrangiano tradicional y asumamos que es invariante bajo una traslación en un eje

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{L} = \dfrac{1}{2} m\, \dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} - U(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x},s) = \mathbf{x} + s\hat{\boldsymbol{a}} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad I = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},s)}{\partial s} = m\dot{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{a}} = p_a$$

implica que si el sistema es invariante a una traslación, por ejemplo si consideramos una partícula con $U(\mathbf{x}) = 0$, entonces el momento es constante.

Ejemplo 2: Tomemos el Lagrangiano tradicional

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} m\, \dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} - U(\mathbf{x})$$

y asumimos que es invariante bajo una rotación en el eje z

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},s) = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

implica que si el sistema es invariante a una rotación en un eje entonces la proyección del momento angular en esta dirección es constante ya que

$$I = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},s)}{\partial s}\Big|_{s=0} = m\dot{\mathbf{x}}\cdot(\hat{\boldsymbol{z}}\times\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\mathbf{x}\times m\dot{\mathbf{x}}) = -L_3$$

Así, si el Lagrangiano es invariante a un rotación en cualquier dirección (con un potencial simétrico en forma esférica como una fuerza central) entonces el momento angular total es constante. Para mayor intuición mirar el capitulo de rotaciones del cuerpo rígido.

Problema Que pasa si utilizamos la matriz de rotación con un eje de rotación en una dirección general.

Ejemplo 3: Como se pasa al continuo? Para el caso de campos A_μ, con la simetría $h_\mu(A_\nu, s)$ tal que $h_\mu(A_\nu, s=0) = A_\mu$, tenemos

$$I = \int \Pi_\nu dx^\nu \; \mathscr{L}_{A_{\mu,\alpha}} \left.\frac{\partial h_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}$$

3.2. Punto de vista Hamiltoniano: TC Infinitesimales

Las simetrías y las constantes de movimiento también se pueden estudiar desde el punto de vista de transformaciones infinitesimales. Primero $S_I = \mathbf{q}\cdot\bar{\mathbf{p}}$ genera la TC de identidad. Supongamos que partimos por una transformación infinitesimal mas allá de la identidad

$$T = \mathbf{q}\cdot\bar{\mathbf{p}} + \varepsilon\tau(\mathbf{q},\bar{\mathbf{p}})$$

Con esta definición tenemos

$$\bar{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \bar{p}_i} = q_i + \varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial \bar{p}_i} \quad \rightarrow \quad \delta q_i = \bar{q}_i - q_i = \varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial \bar{p}_i} = \{q_i,\tau\}\varepsilon$$
$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} = \bar{p}_i + \varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial q_i} \quad \rightarrow \quad \delta p_i = \bar{p}_i - p_i = -\varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial q_i} = \{p_i,\tau\}\varepsilon$$

por lo tanto podemos escribir a primer orden en ε que $\varepsilon\tau(q,\bar{p}) \simeq \varepsilon\tau(\mathbf{q},\mathbf{p})$.

Por ejemplo, si usamos $\tau = H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ y $\varepsilon = dt$, obtenemos

$$dq_i = \{q_i, \mathscr{H}\}dt$$
$$dp_i = \{p_i, \mathscr{H}\}dt$$

que es equivalente al resultado que obtuvimos anteriormente. Esto implica que la función Hamiltoniana sirve para darle un boost al sistema en que la correspondiente TC infinitesimal corresponde al movimiento actual del sistema en el intervalo de tiempo dt.

Para cualquier variable dinámica f podemos calcular la variación producida por la transformación canónica generada por τ,

$$d_\tau f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{q} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\cdot\delta\mathbf{p} = \{f,\tau\}\varepsilon$$

Supongamos que τ deja $\mathscr{H}$ invariante, esto quiere decir

$$0 = d_\tau\mathscr{H} = \{\mathscr{H},\tau\}\varepsilon \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\tau}{dt} = 0$$

por lo tanto τ es una constante de movimiento. Por lo tanto podemos definir una **simetría** como una transformación canónica que deja el Hamiltoniano $\mathscr{H}$ invariante (de la misma forma). Esta TC infinitesimal generada por τ hace a la función Hamiltoniana $\mathscr{H}$ invariante si y solo si τ es una

constante de movimiento a lo largo de la órbita. Es importante ver la relación con el teorema de Noether para la función Lagrangiana.

En particular dado que $d_{\mathscr{H}} f = \{f, \mathscr{H}\} dt$, podemos comprobar que $\mathscr{H}$ es la transformación canónica que permite hacer la transformada $t \to t + dt$, evoluciona el sistema en el tiempo.

Volvemos a nuestros ya tradicionales ejemplos con el Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{q})$$

Ejemplo 1: Asumamos que $\mathscr{H}$ es invariante bajo una traslación en la dirección $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$$
$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\boldsymbol{a}}$$

entonces tenemos que encontrar la transformación canónica correspondiente,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\boldsymbol{a}} &= \frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \end{aligned}\right\} \quad \to \quad T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{p}} + \varepsilon \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\mathbf{p}}$$

que hace $\mathscr{H}$ es invariante, lo que implica que

$$\{\varepsilon \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\mathbf{p}}, \mathscr{H}\} = 0 \qquad \to \quad \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\mathbf{p}} = const$$

implica que la proyección de p en la dirección a es una integral de movimiento.

Ejemplo 2: Asumamos que $\mathscr{H}$ es invariante bajo una rotación en el eje z. En forma infinitesimal tenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{p}}} = \bar{\mathbf{q}} &= \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{q} \\ \frac{\partial T}{\partial q} = \bar{p} &= \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} \end{aligned}\right\} \quad \to \quad T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{q}$$

y esto implica que el generador es una constante de movimiento

$$\tau(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (p_1\, q_2 - p_2\, q_1) = L_3$$

Por lo tanto si el sistema es invariante a una rotación en un eje entonces la proyección del momento angular en esta dirección es constante.

Problema Que pasa si utilizamos la matriz de rotación con un eje de rotación en una dirección general.

4. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Consideremos el caso de $\mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Supongamos que queremos encontrar la TC, con $T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$, que fuerce a

$$\bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) = 0\,.$$

Las ecuaciones de movimientos son

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathscr{H}}_{\bar{\mathbf{p}}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{q}}_o$$
$$\dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\bar{\mathscr{H}}_{\bar{\mathbf{q}}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{\mathbf{p}}_o$$

Dado que esta transformación canónica exige que

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \qquad\qquad \bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{p}}}$$

obtenemos

$$\bar{\mathbf{q}}_o = \frac{\partial T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o, t)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}_o, \bar{\mathbf{p}}_o, t)$$

y también,

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o, t)}{\partial \mathbf{q}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}_o, \bar{\mathbf{p}}_o, t)$$

La ecuación que tiene que satisfacer T, es la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\boxed{\mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}, t) + \frac{\partial T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)}{\partial t} = 0\,.}$$

para el generador de la TC. Una vez que tenemos T, se puede obtener $\mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{p}(t)$ de las relaciones de arriba.

Ejemplo 1: Para una partícula libre

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m}$$

tenemos que resolver

$$\frac{1}{2m}\left(\nabla T\right)^2 + \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

lo que nos da

$$T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}_o, t) = \bar{\mathbf{p}}_o \cdot \mathbf{x} - \frac{\bar{p}_o^2}{2m} t + c$$

con lo que podemos escribir

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{p}}} = \mathbf{x} - \frac{\bar{\mathbf{p}}_o}{m} t = \bar{\mathbf{x}}_o \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{x}}_o + \frac{\bar{\mathbf{p}}_o}{m} t$$

que es precisamente la solución que esperaríamos.

4.1. $\mathscr{H}$ independiente del tiempo t

Consideremos el caso de $\mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ independiente del tiempo. Esto se puede pensar de dos maneras.

4.1.1. Método 1

Supongamos que queremos encontrar la TC, con $T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$, que fuerce a

$$\bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) = 0\,.$$

tal que

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathscr{H}}_{\bar{\mathbf{p}}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{q}}_o$$
$$\dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\bar{\mathscr{H}}_{\bar{\mathbf{q}}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{\mathbf{p}}_o$$

Esta claro, mirando el ejemplo anterior, que si $\mathscr{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, T va a ser lineal en el tiempo t, con una constante de proporcionalidad igual al Hamiltoniano h. Por lo tanto pensemos en una transformación canónica $T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$ tal que

$$T(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) = S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) - h\, t$$

donde

$$h = \mathscr{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o)$$

Dado que esta transformación canónica exige que

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \qquad\qquad \bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} = \frac{\partial S}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} - \frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o}\, t$$

obtenemos

$$\bar{\mathbf{q}}_o = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} - \frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o}\, t \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}_o, \bar{\mathbf{p}}_o, t)$$

y también,

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial \mathbf{q}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}_o, \bar{\mathbf{p}}_o, t)$$

La ecuación que tiene que satisfacer T, es la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\boxed{\mathscr{H}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) = h\,.}$$

para el generador de la TC. Una vez que tenemos T, se puede obtener $\mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{p}(t)$ de las relaciones de arriba.

Ejemplo 1: Para el caso de la partícula libre tenemos

$$S(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}_o) = \bar{\mathbf{p}}_o \cdot \mathbf{x} + c$$

y por lo tanto

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{p}}_o$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - t\frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} = \bar{\mathbf{x}}_o \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}_o + \frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} t$$

donde

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_o} = \mathbf{v}_o$$

es la velocidad inicial constante.

Ejemplo 2: Para una partícula

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{x})$$

tenemos que resolver

$$\frac{1}{2m}\left(\nabla S\right)^2 + U(\mathbf{x}) = h = E$$

lo que implica resolver

$$(\nabla S)^2 = 2m\left[E - U(\mathbf{x})\right] = p^2 \qquad \rightarrow \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p}\cdot d\mathbf{x} + S_o$$

donde la integral es hecha a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ con energía E. Notemos que esta ultima relación no se puede integrar exactamente sin conocer la dirección del vector p que tiene magnitud $\sqrt{2m(E-U(\mathbf{x}))}$ como función de $\mathbf{x}$. En este caso el generador de la TC se puede relacionar con la acción usando

$$\frac{dT(\mathbf{q},\bar{\mathbf{p}}_o,t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}} = -\mathscr{H} + \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} = \mathscr{L}$$

lo que implica que

$$T(\mathbf{q}(t),\bar{\mathbf{p}}_o,t) = \int_{t_1}^{t} \mathscr{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t')dt'$$

donde la integral debe de ser integrada a lo largo de la trayectoria real $\mathbf{q}(t)$, donde $\dot{\mathbf{q}}$ no es independiente de $\mathbf{q}(t)$. Variaciones de esta integral solo se puede hacer en termino de parámetros en los bordes (t_1, a, p_1) o (t_2, b, p_2) y esto puede ser un máximo, un mínimo o un "saddle point". En el caso de un problema en 1D, podemos entonces escribir

$$S = \pm\int_{x_o}^{x} d\bar{x}\sqrt{2m(E-U(\bar{x})}$$

4.1.2. Método 2

Supongamos que queremos encontrar la TC, con $T = S(\mathbf{q},\bar{\mathbf{p}})$, que fuerce a

$$\bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}}) = \Omega(\bar{\mathbf{p}})\,.$$

para una función arbitraria $\Omega(\bar{\mathbf{p}})$ tal que

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathscr{H}}_{\bar{\mathbf{p}}} = \frac{\partial\Omega}{\partial\bar{\mathbf{p}}} \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\omega}t + \bar{\mathbf{q}}_o$$

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\bar{\mathscr{H}}_{\bar{\mathbf{q}}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{\mathbf{p}}_o$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial\Omega}{\partial\bar{\mathbf{p}}_o}$$

Dado que esta transformación canónica exige que

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}} = \qquad\qquad \bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial S}{\partial\bar{\mathbf{p}}_o}$$

obtenemos

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\omega} t + \bar{\mathbf{q}}_o = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o, t)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}_o, \bar{\mathbf{p}}_o, t)$$

y también,

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial \mathbf{q}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}_o, \bar{\mathbf{p}}_o, t)$$

La ecuación que tiene que satisfacer S, es la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\boxed{\mathscr{H}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) = \Omega\,.}$$

para el generador de la TC. Una vez que tenemos S, se puede obtener $\mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{p}(t)$ de las relaciones de arriba. Notemos que esto es similar al **Método 1**, con $h = \Omega$.

Ejemplo 1: Partícula en un potencial harmónico

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$$

en una dimensión. Asumamos $f = \bar{p}_o$ y por lo tanto tenemos encontrar $S(q, \bar{p})$, resolviendo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}q^2 = \bar{p}_o$$

donde hemos elegido $\Omega(\bar{p}_o) = \bar{p}_o$ lo que implica resolver (antes del punto máximo de oscilación)

$$S(q, \bar{p}_o) = \int_0^q \sqrt{2\bar{p}_o - x^2}\, dx$$

Notemos que

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial S}{\partial q} &= \sqrt{2\bar{p}_o - q^2} \\ \bar{q} = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_o} &= \int_0^q \frac{dx}{\sqrt{2\bar{p}_o - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2\bar{p}_o}}\right) \end{aligned}$$

donde $\bar{p} = \bar{0}(0)$ y

$$\bar{q}(t) = \frac{d\Omega}{dp_o} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \bar{q}(t) = \bar{q}(0) + t\,.$$

Por lo tanto

$$q = \sqrt{2\bar{p}_o}\sin(t + \bar{q}_o)$$

y además

$$q = \sqrt{2\bar{p}}\sin\bar{q} \qquad\qquad p = \sqrt{2\bar{p}}\cos\bar{q}$$

que ya vimos que representa una transformación canónica que resuelve el problema del oscilador harmónico.

Notemos que lo que hicimos en el problema anterior fue rectificar la trayectoria en el espacio $(\bar{q}, \bar{p})$, que corresponde a lineas rectas. Por supuesto esto se puede hacer mientras la solución no sea un punto de equilibrio ($\dot{q} = \dot{p} = 0$).

4.2. Rectificación global de la trayectoria

Notemos que para el caso de un Hamiltoniano independiente del tiempo en general podemos elegir $\Omega(\bar{\mathbf{p}}_o)$ tal que la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\mathscr{H}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) = \Omega(\bar{\mathbf{p}}_o)$$

La dinámica esta descrita por

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}_o = const$$

y

$$\bar{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} t + \bar{\mathbf{q}}_o = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_o} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}\left(\bar{\mathbf{q}}_o + \boldsymbol{\omega} t, \bar{\mathbf{p}}_o\right)$$

Vemos que en la practica hemos rectificado la trayectoria. En el caso del oscilador harmónico, transformamos una trayectoria elíptica cerrada en el espacio de fase (q, p) a una trayectoria lineal en el espacio de fase $(\bar{q}, \bar{p})$.

Pregunta: Es posible rectificar las trayectoria tal que en el espacio $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$, correspondan a lineas rectas? al menos localmente?

Asumiendo que podemos invertir la ecuación de Hamilton-Jacobi, podemos encontrar

$$\mathscr{H}(q_1, .., q_d, p_1, \ldots, p_d) = \Omega(\bar{\mathbf{p}}_o) \qquad \rightarrow \qquad p_d = -h(q_1, \ldots, q_d, p_1, \ldots, p_{d-1}, \Omega)$$

Vemos que dado que

$$\dot{q}_d = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_d}$$

podemos ver a $q_d = \tau$ como una variable temporal del nuevo Hamiltoniano h que es ahora "tiempo dependiente" y que tiene formalmente $d - 1$ grados de libertad. Ahora tomemos una derivada de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathscr{H}\left(q_1,..,q_d,p_1,\dots p_{d-1},-h(q_1,\dots,q_d,p_1,\dots,p_{d-1},\Omega)\right)=\Omega(\bar{\mathbf{p}}_o)$$

con respecto a p_i $(i=1,\dots,d-1)$ para obtener

$$0=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_i}+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_d}\frac{\partial p_d}{\partial p_i}=\dot{q}_i-\dot{q}_d\frac{\partial h}{\partial p_i}$$

pero además

$$\frac{dq_i}{d\tau}=\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_d}=\frac{\partial h}{\partial p_i}$$

Los mismo se puede hacer para

$$\frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial h}{\partial q_i}$$

Por lo tanto h es un Hamiltoniano, tiempo dependiente, para las $d-1$ variables. Vemos que efectivamente, hemos **rectificado** las trayectoria.

En particular, notemos que si elegimos $\Omega(\bar{\mathbf{p}}_o)=\bar{p}_d$, entonces

$$\dot{\bar{q}}=0 \qquad\qquad \dot{\bar{p}}_i=0$$

para $i=1,\dots,d-1$. Mientras que

$$\dot{\bar{q}}_d=1 \qquad\qquad \dot{\bar{p}}_d=0$$

lo que efectivamente permite **rectificar** la trayectoria. En este caso invertir la ecuación de Hamilton-Jacobi fue trivial.

Ejemplo 4: Partícula en un potencial harmónico en una dimensión. En este caso tenemos que encontrar $S(\mathbf{q},\bar{\mathbf{p}})$ y resolver

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\frac{1}{2}q^2=\bar{p}_o$$

donde hemos elegido $\Omega(\bar{p}_o)=\bar{p}_o$ lo que implica resolver (antes del punto máximo de oscilación)

$$S(q,\bar{p}_o)=\int_0^q\sqrt{2\bar{p}_o-x^2}dx$$

Notemos que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q\partial\bar{p}_o}=\frac{1}{\sqrt{2\bar{p}_o-q^2}}\neq 0$$

por lo tanto podemos encontrar una solución. Ahora

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2\bar{p}_o - q^2}$$
$$\bar{q} = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_o} = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{2\bar{p}_o - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2\bar{p}_o}}\right)$$

pero

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{p}_o} = 1$$

por lo tanto

$$q = \sqrt{2\bar{p}_o}\sin(t - t_o)$$

y además

$$q = \sqrt{2\bar{p}_o}\sin\bar{q} \qquad\qquad p = \sqrt{2\bar{p}_o}\cos\bar{q}$$

que ya vimos que representa una transformación canónica que resuelve el problema del oscilador harmónico.

5. Sistemas integrables (variables de ángulo – acción)

Sistemas que se puedan integrar completamente y globalmente son por lo general la excepción. En general el encontrar esta soluciones globales, no infinitesimales, depende de cuantas constantes de movimiento se puedan encontrar.

Definamos un **sistema autónomo** donde H no depende del tiempo. Además definamos que d **funciones están en involución** si

$$\{g_i, g_j\} = 0 \qquad i, j = 1, ..., d$$

Problema: Tomemos el problema de una particular en un potencial en $d = 1$ dimensión. Notemos que $\mathscr{H}$ es constante, y vemos que este problema es integrable donde la trayectoria se mueve en el espacio de fase sobre las curvas $\mathscr{H} = const.$

Problema: Un caso interesante es el caso de una partícula en $d = 3$ dimensiones bajo un potencial central. El sistema es globalmente integrable en termino de cuadraturas. Además hay varias integrales de movimiento dados por la energía $\mathscr{H} = E$, el momento angular $\mathbf{L}$, y L^2. Es fácil comprobar que no todas las constantes de movimiento están "in involution", ya que

$$\{L_3, \mathscr{H}\} = 0 \quad \{L_3, L^2\} = 0 \quad \{L_3, L_1\} = -L_2 \quad \{L_3, L_2\} = L_1$$

pero que tenemos por lo menos $d = 3$ en involución

$$\{L_3, \mathscr{H}\} = \{L_3, L^2\} = \{L^2, H\} = 0$$

Problema: El caso de 3 partículas en un potencial central. En este caso podemos reducir el problema a $d = 6$ variables independientes con la conservación del centro de masa. En este caso tenemos las mismas 3 constantes en involución, y sabemos que el sistema no es integrable en general.

Problema: Notemos que si logramos encontrar la solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema de d grados de libertad, obtenemos las d integrales de movimiento independiente $\bar{q}_i$ que satisface trivialmente la propiedad de $\{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = 0$. Por lo tanto la existencia de d integrales de movimiento "in involution" sugiere que es suficiente para lograr que el sistema de 2d variables canónicas sea integrable.

5.1. Teorema de sistemas integrables:

Supongamos que tenemos d funciones independientes $\{g_1 = \mathscr{H}, g_2, \ldots, g_d\}$ que están "in involution" de un sistema autónomo de 2d variables canónicas. Entonces (mirar Arnold 1988):

1. Las ecuaciones de movimiento se pueden resolver por cuadraturas
2. La superficie de movimiento definida por las constantes $\{q_1 = \mathscr{H}, g_2, \ldots, g_d\}$ se puede mapear a un d-Dimensional **torus** $T = S \times S \times S \times \ldots S$ (d veces) donde S es el circulo de radio 1 y donde el movimiento en S es cuasi-periódico con una solución transformada como

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i \qquad i = 1, ..., d$$

Notemos que las variables que están en involución, aparte de que g_i son constantes de movimiento, no varían sobre las otras variables g_j. Este restringe la solución lo suficiente como para lograr que el sistema sea integrable.

Ejemplo 1: Dos osciladores acoplados. El Hamiltoniano es

$$\begin{aligned}
\mathscr{H} &= \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega_+^2(q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}m\omega_-^2(q_1 - q_2)^2 \\
&= \left[\frac{1}{4m}\left(p_1 + p_2\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_+^2(q_1 + q_2)^2\right] + \left[\frac{1}{4m}\left(p_1 - p_2\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_-^2(q_1 - q_2)^2\right] \\
&= \mathscr{H}_+ + \mathscr{H}_-
\end{aligned}$$

Sabemos que $\mathscr{H}$ es una constante de movimiento. Pero además $\mathscr{H}_\pm$ están en involución

$$\{\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-\} = 0$$

Podemos encontrar los modos ortogonales de este sistema, pero en este caso los podemos leer directamente de los paréntesis, los cuales son constantes de movimiento (claro que solo 2 son independientes)

$$\{\mathscr{H}, \mathscr{H}_\pm\} = 0$$

Definamos las siguientes variables y la transformación canónica

$$p_\pm = \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}}$$
$$q_\pm = q_1 \pm q_2$$
$$T(q_\pm, \bar{q}_\pm) = \frac{1}{2} m\omega_+ q_+^2 \cot \bar{q}_+ + \frac{1}{2} m\omega_- q_-^2 \cot \bar{q}_-$$

lo que nos da las ecuaciones de movimiento

$$\left.\begin{aligned} p_\pm &= m\omega_\pm q_+^2 \cot \bar{q}_\pm \\ q_\pm &= \sqrt{\frac{2p_\pm}{m\omega_\pm}} \sin \bar{q}_\pm \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathscr{H}} = \omega_+ \bar{p}_+ + \omega_- \bar{p}_-$$

con lo cual finalmente tenemos

$$\bar{q}_\pm = \theta_\pm = \omega_\pm t + \beta_\pm$$

por lo tanto la trayectoria se desenvuelve en un **torus** T=SxS. El movimiento es cerrado si las frecuencias están relacionadas por un numero racional

$$\frac{\omega_+}{\omega_-} = \frac{p}{q}$$

sino, el movimiento es **cuasi-periódico** y por lo tanto la órbita es densa en el **torus**. Estas variables son un ejemplo de **variables ángulo-acción**.

Problema: Tomemos el caso de un péndulo esférico

$$\mathscr{H} = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR(1 - \cos\theta)$$

Notemos que la coordenada ϕ es cíclica, por lo tanto

$$p_\phi = const$$

Por lo tanto tenemos dos constantes de movimiento, y además podemos ver que

$$\{\mathscr{H}, p_\phi\} = 0$$

por lo tanto el sistema es integrable. Notemos que podemos re-escribir la conservación de energía como

$$\epsilon = \frac{1}{2}p_1^2 + \left[\frac{a^2}{2\sin^2 q_1} + (1 - \cos q_1)\right] = \frac{1}{2}p_1^2 + U(q_1)$$

y por lo tanto la solución es fácil de expresar como una cuadratura

$$\tau = \int \frac{dq_1}{\sqrt{2(\epsilon - U(q_1))}}$$

5.2. Condición Simpléctica y variables de accion-angulo

En el caso de sistemas Hamiltonianos podemos escribir

$$\dot{x} = F = J\mathscr{H}_x$$

con la matriz J, y por lo tanto

$$\nabla \cdot (J\mathscr{H}_x) = 0$$

Supongamos que tener un punto de equilibrio $\mathbf{x}_o^*$. La evolución de una trayectoria cercana al punto de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_o^* + \boldsymbol{\eta}(t)$, con $|\boldsymbol{\eta}(t)| << 1$, esta dado por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)\boldsymbol{\eta}$$

Tenemos que la estabilidad del punto de equilibrio esta determinada por los valores propios (exponentes de Lyapunov)) λ_i $i = 1, \ldots, d$ (si la base existe) de la matriz

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)$$

y por lo tanto vemos que $\sum_i^d \lambda_i = Tr(\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)) = 0$. Este concepto de exponentes de Lyapunov también se pueden definir de forma similar para ciclos limites y para orbitas caóticas (que de alguna forma corresponden a ciclos limites de duración infinita) asumiendo una trayectoria infinitesimalmente cercana $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$, con $|\boldsymbol{\eta}(t)| << 1$.

Estudiemos en mas detalle la estabilidad cerca del punto de equilibrio $\mathbf{x}_o^*$. La ecuación para la perturbación es

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)\boldsymbol{\eta}$$

y la matriz es

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*) = J\ \mathscr{H}_{\mathbf{xx}} \qquad\qquad (H_{\mathbf{xx}})_{i,j} = \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dado que $\mathscr{H}_{\mathbf{xx}}$ es simétrico, tenemos que

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)^T\ \mathbf{J} = -\mathbf{J}\ \mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)$$

y por lo tanto $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)$ es **infinetisimalmente simpléctico**. Esto inmediatamente implica que si λ es un valor propio de la matriz $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)$, entonces

$$\begin{aligned} det(\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*) - \lambda) &= det(\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*) + \lambda\mathbf{JJ}) \\ &= det(\mathbf{JDF}(\mathbf{x}_o^*)^T\mathbf{J} - \lambda\mathbf{JJ}) \\ &= det(\mathbf{J})\ det(\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*)^T + \lambda)\ det(\mathbf{J}) \\ &= det(\mathbf{DF}(\mathbf{x}_o^*) + \lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto los exponentes de los punto de equilibrio vienen en pares $\pm\lambda$. Esta es una de las consecuencias mas importantes de la **condición simpléctica**. Esto demuestra que en flujos Hamiltonianos no podemos tener atractores (por ejemplo puntos de equilibrio estables), ya que esto implicaría que todos los $Re(\lambda_i) < 0$ (por ejemplo para un punto de equilibrio) , lo cual no es permitido. El caso de puntos elípticos $\lambda_\pm = \pm i|\Omega|$ esta permitido, lo que genera movimientos similares a un oscilador harmónico, esto es un **torus** (también llamados **centros**). También esta permitido los **puntos hiperbólicos** donde $\lambda_\pm = \pm(R + i\omega)$ con $R \neq 0$.

Mas adelante veremos que (teorema de Liouville) el volumen de cualquier set de condiciones en el espacio de fase se conserva en el tiempo, y esto debe a que

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{V(t)} d\mathbf{x}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Pero hay una propiedad mas interesante aun para flujos generales (no necesariamente puntos de equilibrio). Tomemos 3 orbitas $\mathbf{x} = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, $(\mathbf{q}(t)+\delta\mathbf{q}_1(t), \mathbf{p}(t)+\delta\mathbf{p}_1(t))$ y $(\mathbf{q}(t)+\delta\mathbf{q}_2(t), \mathbf{p}(t)+\delta\mathbf{p}_2(t))$, que determinan el área

$$\delta A = \delta\mathbf{p}_1\cdot\delta\mathbf{q}_2 - \delta\mathbf{p}_2\cdot\delta\mathbf{q}_1 = \delta\mathbf{x}_1^\dagger\cdot\mathbf{J}\cdot\delta\mathbf{x}_2$$

Dado que

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{DF}(\mathbf{x})\cdot\delta\mathbf{x} = \mathbf{J}\ \mathscr{H}_{\mathbf{xx}}\ \delta\mathbf{x}$$

podemos derivar que

$$\frac{d\delta A}{dt} = \delta\mathbf{x}_1^\dagger[\mathbf{DF}(\mathbf{x})^\dagger\ \mathbf{J} + \mathbf{J}\ \mathbf{DF}(\mathbf{x})]\delta\mathbf{x}_2 = \delta\mathbf{x}_1^\dagger[\mathscr{H}_{\mathbf{xx}}^\dagger(\mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}) + (\mathbf{J}\ \mathbf{J})\mathscr{H}_{\mathbf{xx}}]\delta\mathbf{x}_2 = 0$$

porque $\mathbf{J}^\dagger = -\mathbf{J}$ y $\mathscr{H}_{\mathbf{xx}}$ es simétrica. Dado que este resultado funciona para cualquier dirección, vemos que las áreas se conservan en pares en el espacio de fase, incluso para la definición mas general de exponentes de ciclos limites o trayectorias caóticas.

Este resultado se puede escribir también como

$$\boxed{\frac{d}{dt}\oint_{\Omega(t)} \mathbf{p}\cdot d\mathbf{q} = 0}$$

donde el camino cerrado $\Omega(t)$ se mueve con las trayectorias. Este **teorema de Poincare-Cartan** es la base de los invariantes adiabáticos.

Notemos que

$$I(E) = \oint_{\Omega(t)} \mathbf{p}\cdot d\mathbf{q}$$

es una constante de movimiento segun el teorema anterior y una funcion de E, al igual que $\bar{p}$ si es que podemos resolver la ecuacion de Hamilton-Jacobi.
En una dimension nos gustaria usar las variables $\bar{q} = \theta$ y $\bar{p} = I$, que de ahora en adelante llamaremos variables de *angulo-accion*, y asi poder definir

$$\bar{\mathscr{H}}(\theta, I) = \bar{\mathscr{H}}(I)$$

e integrar la ecuacion de Hamilton-Jacobi

$$\mathscr{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E$$

para encontrar la solucion $q(t)$. El problema esta en que necesitamos invertir la relacion de arriba y encontrar $E(I)$ tal que

$$\bar{\mathscr{H}}(I) = E(I)\,.$$

Notemos que usando $\bar{\mathscr{H}}(I)$ podemos integrar inmediatamente las ecuaciones de movimiento, si es que somos capaces de integrar la ecuacion de Hamilton-Jacobi, ya que

$$\theta = \frac{\partial}{\partial I} S(q, I) \qquad \rightarrow \qquad q(\theta(t), I)$$

y ademas

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial I} \qquad \rightarrow \qquad \theta(t) = \omega t + \theta(0)$$

con la frecuencia definida por

$$\omega = \frac{dE}{dI}\,.$$

Por lo tanto dE/dT es la frecuencia, y por lo tanto dI/dE corresponde al periodo de la orbita.

Problema: El caso del oscilador harmónico en una dimension

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$$

Tenemos que construir

$$I(E) = \frac{1}{2\pi}\oint_P pdq = \frac{2}{2\pi}\int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} \sqrt{2E - q^2}dq = E$$

y por lo tanto

$$E(I) = I$$

La ecuacion de Hamilton-Jacobi es entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}q^2 = I\,,$$

la cual tiene solución

$$S(q, I) = \int_0^q \sqrt{2I - x^2}dx$$

con

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial S}{\partial q} &= \sqrt{2I - q^2} \\ \bar{q} = \frac{\partial S}{\partial I} &= \int_0^q \frac{1}{\sqrt{2I - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2I}}\right) \end{aligned}\,.$$

Al mismo tiempo

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{\partial E}{\partial I} = 1\,,$$

por lo tanto

$$q(t) = \sqrt{2I}\sin(t - t_o)$$

Notemos que el espacio de fase definido por (θ, I) corresponde a **torus** S de los sistemas integrables discutido más arriba. Por lo tanto este metodo nos permite integrar el sistema y encontrar el mapeo al **torus** S, descrito por las variables de **accion-angulo**.

Consideremos el caso de una orbita periodica de un potencial más complicado en $d = 1$, de periodo $T(E)$ y con energía E en un sistema autónomo. Definamos la variable de acción

$$I(E) = \frac{1}{2\pi}\oint_P pdq$$

relacionada con el área de la superficie encerrada por la trayectoria de energía E en el espacio de fase. Asumamos que $dI/dE = T(E)/2\pi > 0$ en un intervalo $[E_1, E_2]$. Por lo tanto podemos invertir la relacion y encontrar $E(I)$, lo que nos permite definir una TC $\{q, p\} \to \{\theta, I\}$ de tal manera

$$p = \frac{\partial S(q,I)}{\partial q} \quad \theta = \frac{\partial S(q,I)}{\partial I} \quad H(q, \frac{\partial S(q,I)}{\partial q}) = E(I)$$

Con esta definición $I = const$ en un intervalo $[E_o, E_1]$ tenemos

$$\dot{\theta} = \frac{\partial E(I)}{\partial I} = \omega_I = const\,,$$

rectificando la trayectoria.

Consideremos un **sistema separable** en $d > 1$ grados de libertad y d constantes "in involution", tal que

$$I_k(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{P_k} \sum p_i dq_i$$

donde P_k corresponde a cada **torus** descrito en el teorema. Un ejemplo puede ser varios resortes acoplados, donde su descripcion en modos normales representa los estos **torus**.

Para el ejemplo del péndulo esférico tenemos

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon, a) &= \frac{1}{2\pi} \oint p_1 dq_1 = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(\epsilon - U(q_1)}dq_1 \\ I_2(\epsilon, a) &= \frac{1}{2\pi} \oint p_2 dq_2 = a \end{aligned}$$

Notemos que tenemos que resolver por $\epsilon(I_1, a)$, y podemos calcular

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial I_1} = const$$

Como volvemos a q_1 dado θ?

Problema Encuentre las variables acción-ángulo para el péndulo esférico.

Problema Encuentre las variables acción-ángulo para 2 resortes acoplados entre ellos y a murallas fijas.

5.3. Invariantes adiabáticos

Supongamos que tenemos una solución $q(\phi, t) = \cos(\omega t + k)$. Por lo tanto vemos que tenemos una familia de soluciones

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(k, t) \qquad\qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(k, t)$$

parametrizadas por $k\epsilon[0, 2\pi]$ (equivalente a la fase en el caso de arriba). Con la definición

$$J = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = \oint \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial k} dk$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt} &= \oint dk \left[\frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial k} + \mathbf{P} \cdot \frac{\partial}{\partial k} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right] \\
&= \oint dk \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial k} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial k} \right] \\
&= \oint dk \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora asumiremos que $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{Q}}\left(\omega(t)t + k(t), t\right)$ donde $\omega(t)$ y $k(t)$ varían en forma muy lenta. Por lo general podemos escribir

$$k(t) = k_o + f(t)$$

Por lo tanto podemos definir ahora

$$\bar{J}(t) = \oint dk \bar{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial k}$$

y de la misma manera podemos demostrar que

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = 0$$

lo que define el **invariante de Poincare**.

Problema: Tomemos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right] + \frac{q}{c} r \dot{\phi} A_\phi$$

con $A_\phi = B(t)r/2$ y un campo magnético $B(t)$ que varia lentamente en el tiempo. Las ecuaciones de movimiento son

$$p_r = m\dot{r} \qquad\qquad m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + \frac{q}{c}B(t)r\dot{\phi}$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} + \frac{q}{2c}r^2B(t) \qquad\qquad \dot{p}_\phi = 0$$

Esto implica que a primer orden en variaciones temporales tenemos

$$r \approx const \qquad\qquad \dot{\phi} \approx -\frac{qB(t)}{mc} = -\Omega(t)$$

y por lo tanto tenemos la solución

$$\phi(t) = -\Omega(t) - k(t)$$

El **invariante adiabático** es entonces

$$\begin{aligned} J &= \oint dk \left[p_r \frac{\partial r}{\partial k} + p_\phi \frac{\partial \phi}{\partial k} \right] \\ &= -2\pi p_\phi \\ &= \pi m r^2 \Omega \\ &= \frac{2\pi mc}{q}\mu \end{aligned}$$

donde

$$\mu = \frac{E_\perp}{B} = \frac{\frac{mr^2\Omega^2}{2}}{B}$$

Problema: Consideremos un campo magnetico dipolar, similar al campo magnetico cerca de la tierra. Considere una particla con $v_{\parallel,o}$ y $v_{\perp,o}$ cerca del ecuador con $r = L\ R_E$ (McIlwain L-parameter $L > 1$ describe las lineas de campo). Describa el movimiento de la particula y determine bajo que condiciones esta particula cae a la atmosfera contribuyendo a las *auroras boreales* o *auroras australes*

En este caso tenemos 2 variables conservadas

$$E = E_\perp + E_\parallel \qquad\qquad \mu = \frac{E_\perp}{B}\,.$$

Dado que $v_{\parallel,o} > 0$ las particulas se mueven a lo largo del campo magnetic hacia los polos magneticos, pero a medida que esto sucede el campo magnetico aumenta a costa de $E_\parallel$. En algun valor de la latitud magnetica λ_c donde ($v_{\parallel,o} = 0$) la particula se devuelve. En un campo magnetico dipolar centrado en el origen, la linea de campo puede ser descrita como

$$\frac{r}{R_E} = L\cos^2\lambda$$

mientras que la magnitud del campo dipolar es

$$|B| = B_o \left(\frac{R_E}{r}\right)^3 \sqrt{1 + 3\sin^2\lambda}$$

donde λ es la latitud magnetica. En el ecuador tenemos $|B| = B_o/L^3$, por lo tanto

$$E = E_{\perp,o} + E_{\parallel,o} = \mu B_c \qquad\qquad \mu = \frac{E_{\perp,o}}{B_o} L^3 \,.$$

Resolviendo tenemos

$$\frac{B_c}{B_o} = \frac{1}{L^3\cos^6\lambda_c}\sqrt{1+3\sin^2\lambda_c} = L^3\left(1 + \frac{E_{\parallel,o}}{E_{\perp,o}}\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{4 - 3\cos^2\lambda_c}{\cos^{12}\lambda_c} = L^6\left(1 + \frac{E_{\parallel,o}}{E_{\perp,o}}\right)$$

Este tiene que ser comparado con la latitud a la cual

$$r = 1 = L\cos\lambda_E^2$$

Si $\lambda_E > \lambda_c$ la particula no cae a la atmosfera. Pero si $\lambda_E < \lambda_c$, entonces la particula cae a la atmosfera. Dado un valor de E, es posbile encontrar el valor critico de $E_{\parallel,o}/E_{\perp,o}$, tal que un valor de $E_{\parallel,o}$ mayor las particulas precipitan a la atmosfera produciendo las **auroras boreales o australes**.

5.4. Perturbaciones y Teoría de KAM

Supongamos que tenemos d constantes de movimiento, de tal forma que el sistema esta restringido por $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i$. Si además están en involución, entonces la dinámica es en un **torus** de dimensión d. Esto implica que podemos usar la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathscr{H}\left(\frac{\partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = \bar{\mathscr{H}}(\mathbf{I})$$

para transformarnos a un sistema donde $\bar{\mathscr{H}}$ es independiente de q. Por lo tanto podemos escribir en termino de las variables de acción-ángulo $\boldsymbol{\theta} - \mathbf{I}$,

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{I}}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0$$

con

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{I}}$$

donde las soluciones cuasi-periódicas son posibles si no existe un vector de números enteros que satisfagan la condición

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

Estas orbitas son densas en el espacio de fase, y estos **torus** son parametrizados por $\mathbf{I}$ y $\boldsymbol{\omega}$.

Perturbemos este sistema integrable

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) = \mathscr{H}_o(\mathbf{I}) + \epsilon \mathscr{H}_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$$

Tratemos de construir una solución por expansión

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \epsilon \boldsymbol{\theta}_1 + \epsilon^2 \boldsymbol{\theta}_2 \ldots \qquad\qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \epsilon \mathbf{I}_1 + \epsilon^2 \mathbf{I}_2 \ldots$$

con

$$\boldsymbol{\theta}_o = \boldsymbol{\omega}_o t + \boldsymbol{\beta}$$

usando

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, \mathscr{H}\} \qquad\qquad \dot{I}_i = \{I_i, \mathscr{H}\}$$

A primer orden podemos escribir

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{1,i} = \{\theta_{o,i}, \mathscr{H}_1\} &\approx \frac{\partial \mathscr{H}_1(\theta_0, \mathbf{I}_0)}{\partial I_{0,i}} \\ \dot{I}_{1,i} = \{I_{o,i}, \mathscr{H}_1\} &\approx -\frac{\partial \mathscr{H}_1(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{I}_0)}{\partial \theta_{0,i}} \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, d$. Dado que asumimos que $\mathscr{H}_1$ da origen a trayectorias periódicas, podemos expandir en series de Fourier

$$\sum_{\mathbf{m}} \mathscr{H}_{1,\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}$$

La solución es entonces

$$\theta_{1,i}(\mathbf{m}) \approx \sum_{\mathbf{m}} \frac{A_{1,i}(\mathbf{m})}{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_o} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}$$

y por lo tanto da origen a **términos seculares** para soluciones periódicas

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_o = 0$$

del sistema original. Para el caso de soluciones **quasi-periódicas** podemos usar la aproximación

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \approx \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}_0} \langle \mathscr{H}_1(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{I}_0) \rangle$$

y también

$$\dot{\mathbf{I}}_1 \approx \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} \langle \mathscr{H}_1(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{I}_0) \rangle = 0$$

ya que el promedio de una función F sobre la orbita cuasi-periódica es equivalente a un promedio sobre el **torus** de periodo $2\pi/\omega_{o,i}$. Es importante notar acá que tenemos una separación en las escalas de tiempo, para que este promedio tenga sentido.

Problema: El oscilador anarmonico

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + \mu q^4$$

con $\mu << 1$. Para $\mu = 0$ tenemos

$$q_0(t) = \sqrt{2I_o}\sin\theta_0 \qquad\qquad \theta_0(t) = t + \phi_0$$

ya que

$$I_o = \frac{2}{2\pi}\int_{q_{max}}^{q_{max}} dq\sqrt{2E_o - q^2} = E_o$$

Tomando

$$\mathscr{H}_1 = q^4 = 4I_o^2\sin^4\theta_0$$

Ahora podemos calcular su promedio sobre el **torus** usando $\epsilon = \mu$

$$< \mathscr{H}_1 >= 4I_0^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta_0\, d\theta_0 = \frac{3}{2}I_o^2$$

y por lo tanto

$$\dot{\theta}_1 \approx \frac{\partial}{\partial I_0} < H_1 >= 3I_0$$

La solución a primer orden es entonces

$$\theta(t) \approx (1 + 3E_o\mu)\, t + \phi_o$$

claro que solo para las orbitas cuasi-periódicas.

Pregunta: Que le pasa al numero denso de **torus** que estaban presentes en el caso $\epsilon = 0$. Son destruidos o sobreviven?

Para estudiar este punto, podemos hacer una transformación canónica $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) \to (\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\mathbf{I}})$ para ver que le pasa al **torus** definido para el valor **I**,

$$S = S_o + \epsilon S_1 = \bar{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\theta} + \epsilon S_1$$

con la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathscr{H}_0(\bar{\mathbf{I}}) + \epsilon \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial \bar{\mathbf{I}}} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \epsilon \mathscr{H}_1(\bar{\mathbf{I}}, \boldsymbol{\theta}) = \bar{\mathscr{H}}(\bar{\mathbf{I}})$$

Hagamos una transformación usando funciones periódicas

$$\begin{array}{l} \mathscr{H}_1 = \sum_m \mathscr{H}_{1,\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}} \\ S_1 = \sum_{\mathbf{m}} S_{1,\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}} \end{array} \quad \rightarrow S_1 = i \sum_{\mathbf{m}} \frac{\mathscr{H}_{1,m}(\bar{\mathbf{I}})}{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_o(\bar{\mathbf{I}})} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}$$

con

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \partial \mathscr{H}_0 / \partial \mathbf{I}$$

Vemos que los **torus resonantes** son los que satisface $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, y estos serán destruidos por la perturbación. Pero aun hay una mayor cantidad de **torus no-resonantes** que no serán destruidos a primer orden.

Vemos que la respuesta a nuestra pregunta es que la mayoría de los **torus** sobreviven a primer orden en ϵ, y que el volumen en el espacio de fase no ocupado por **torus** tiende a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Los únicos toros que se destruyen son los que **resuenan** con el driver $\epsilon \mathscr{H}_1$. Pero que pasa con los **torus** resonantes a medida que aumentamos ϵ.

Problema: El péndulo perturbado periódicamente (the kicked pendulum)

Un buen ejemplo es el péndulo golpeado sin gravedad, que es una perturbación del sistema Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2} \qquad \rightarrow \begin{array}{l} p = const \\ \theta = p * T + \theta_o \end{array}$$

Vemos que las soluciones son lineas rectas en el espacio $\theta - p$. Este sistema es claramente integrable y se muestra en la Fig. 2a. Tenemos trayectorias periódicas y cuasi-periódicas.
Si perturbamos el péndulo periódicamente en la dirección vertical podemos integrar entre golpes como

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2} + \sum_n \epsilon Cos\theta \delta(t - t_n) \qquad \rightarrow \begin{array}{l} p_{n+1} = p_n + \epsilon Sin\left(\theta_{n+1}\right) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_n T \end{array}$$

Podemos normalizar este problema a

$$\begin{array}{l} p_{n+1} = p_n + \epsilon Sin\left(\theta_n + p_n\right) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_n \end{array}$$

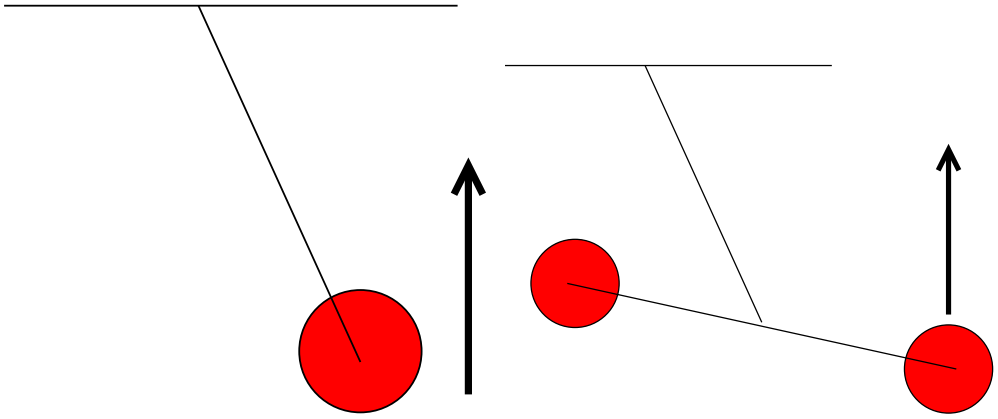

Figura 1: (a) El péndulo perturbado. (b) El péndulo doble perturbado.

Para $\epsilon = 0$, los **torus** resonantes (acá una orbita cuasi-periódica es una trayectoria que se mueve de izquierda a derecha sin repetirse), están definidos por $p = 2\pi m/n$ con lo cual θ es un punto fijo para el mapa M^n. A medida que perturbamos el sistema, los puntos fijos del mapa se mueven

$$\begin{matrix} p = 2n\pi \\ \theta = m\pi \end{matrix} \qquad \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(2 + \epsilon(-1)^{m+2n} \pm \sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon + 4(-1)^{m+2n}}$$

por lo tanto en el rango $0 < \epsilon < 4$ tenemos puntos elípticos para $\theta = n\pi$ e hiperbólicos para $\theta = 0$. para $\epsilon > 4$ los puntos elípticos se convierte en puntos hiperbólicos. Dada la naturaleza elíptica del punto fijo, las orbitas tiene que quedarse un tiempo largo cerca de ellas, generando una isla, pero como no son atractores las trayectorias eventualmente se alejan. Esto se muestra en la Fig. 2b, donde una isla esta claramente definida alrededor de un mar caótico. Notemos que para $\epsilon = 2$ esta isla aun sobrevive, y la orbita gasta largo tiempo cerca de esta isla, con saltos esporádicos entre islas. Gente ha desarrollado teorías basadas en integrales y derivada fractales para entender este movimiento.

Las trayectorias en el espacio de fase se muestra en la Fig. 2 para diferentes valores de ϵ. Vemos la existencia clara de las orbitas elípticas, y el efecto de las islas o superficies de KAM, aun cuando $\epsilon = 0{,}5$. Notemos que esto implica que tenemos muchas orbitas no-resonantes que aun sobreviven y que se mueven de izquierda a derecha en el espacio de fase. Vemos que luego de la destrucción de las orbitas resonantes aparecen estas curvas KAM. Pero también aparecen orbitas caóticas que se mueven entre estas curvas, y que en el caso de sistemas con un grado de libertad restringen el movimiento de las trayectorias (las curvas son invariantes).

A medida que aumentamos ϵ las islas desaparecen y la región caótica se agranda. Para $\epsilon = 4$ desaparecen todos las islas de KAM y solo tenemos movimiento caótico.

Para el caso de este péndulo forzado podemos estudiar el efecto de la **difusión anómala** en el espacio de momento

$$\Delta P_n = p_{n+1} - p_n = \epsilon sin\theta_{n=1} \qquad \rightarrow \frac{\langle \Delta P_n^2 \rangle}{2} = \frac{\epsilon^2}{2} \left\langle \sin \theta_{n+1}^2 \right\rangle$$

En el régimen caótico, podemos tratar θ como una variable no correlacionada , y esperaríamos que $D_K = \epsilon^2/4$, lo cual no es observado porque la trayectoria tiene que pasar un largo rato cerca de las islas afectando fuertemente el coeficiente de difusión.

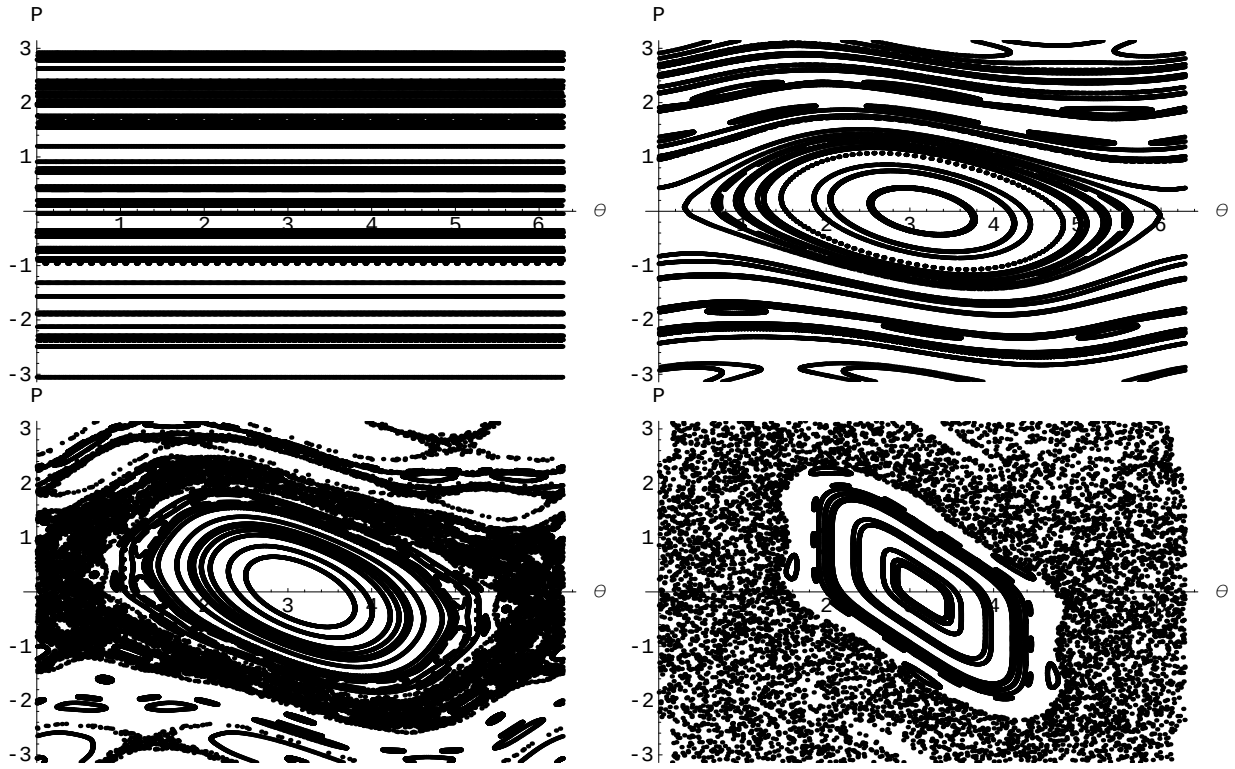

Figura 2: Trayectorias en el espacio de fase par (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 0{,}5$, (c) $\epsilon = 1$, (d) $\epsilon = 2$ usando muchas condiciones iniciales.

Aun no entendemos como obtenemos el caos. Miremos alrededor de un punto elíptico. Alrededor de este punto elíptico podemos observar tres **torus** que se pueden describir por los tres círculos como se muestran en la Fig. 3 representados por $I_1 < I_2 < I_3$. Dado que

$$I_2 = 2\pi \frac{p}{q}$$

es racional, vemos que el mapa M^q deja invariante esta curva C_2, mientras la curva C_3 es rotada contra las manecillas del reloj, mientras que C_1 a favor con respecto C_2. Al aplicar la perturbación al mapa M_ϵ^q

$$I_{n+1} = I_n + \epsilon g(I_n, \theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_o(I_n) + \epsilon h(I_n, \theta_n)$$

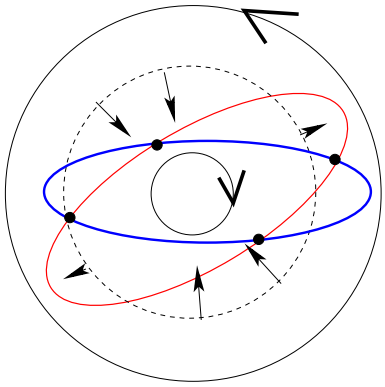

Figura 3: Deformación del **torus**

el mapa va a deformar estas curvas, pero existe una curva roja C_ϵ cerrada que evoluciona los puntos en forma puramente radial para ϵ muy pequeño. Al aplicar este mapa M_ϵ^q nuevamente, va a deformar esta curva en la curva azul. Como el volumen se conserva, estas dos curvas tienen que intersectar generando puntos fijos elípticos e hiperbólicos. De hecho aparecen en pares si miramos con cuidado el flujo (Teorema de Poincare-Birkhoff). Notemos que cerca de orbitas elípticas, y sus curvas (o superficies en dimensiones mayores) podemos usar nuevamente este mapa. Por lo tanto esto se repite ad-infinitum formando fractales de puntos fijos elípticos e hiperbólicos, denominadas **franjas estocásticas** alrededor de los puntos elípticos. Interesante!

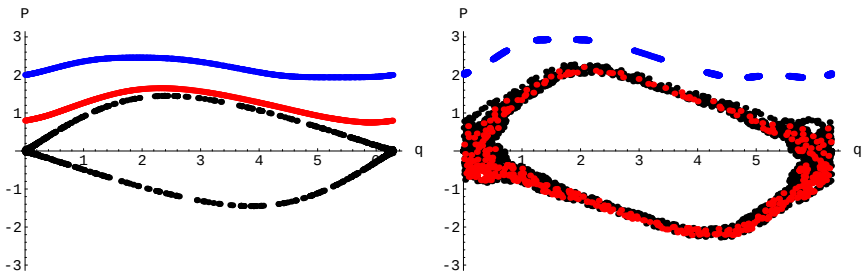

Figura 4: La variedad inestable de puno hiperbólico $(0, 0)$ y algunas trayectorias de referencia para (a) $\epsilon = 0{,}5$, (b) $\epsilon = 1$

Que dinámica tenemos cerca de los puntos fijos? Lo que pasa es que las variedades estables e inestables de las orbitas hiperbólicas se intersectan en una **intersección heteroclinica** generando **caos transiente**, ya que como no podemos tener atractores, tiene que ser transiente. En el caso de nuestro péndulo forzado los puntos hiperbólicos son el mismo punto $(0, 0) = (2\pi, 0)$), por lo tanto podríamos decir que la intersección es **homoclínica** también. Notemos que el caos ocurre cerca

de las curvas de KAM, y el ancho de la franja estocástica crece con ϵ. La trayectoria emigra lejos de $(0,0)$ pero pasa cerca de otra curva de KAM, moviéndose en un caos transiente. Hay tantas de estas superficies o curvas, que la trayectoria pasa de isla en isla en forma caótica.
En la Fig. 4 tenemos la franja estocástica cerca de la separatriz que forman las variedades estables e inestables del punto hiperbólico en el origen. Vemos claramente la curva de KAM y la franja estocástica pe se ensancha a medida que ϵ aumenta.

En dimensiones mayores a $d > 1$, las superficies de KAM no restringen el paso de las trayectorias en el espacio de fase, como sucede en $d = 1$. Por lo tanto incluso para ϵ muy pequeño podemos tener una trayectoria que visita gran parte del espacio de fase. Una dinámica muy interesante!

6. Teorema de Liouville

Tomemos un ensamble de condiciones iniciales que ocupan un volumen V_o. El teorema de Liouville dice que el volumen de este ensamble de condiciones iniciales después de un tiempo t es $V_t = V_o$. La forma es probar esto a tiempo $t = 0$ y $t = dt$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{V_t} dx &= \oint\limits_{S_t} \frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\, dS \\ &= \oint\limits_{S_t} \boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \int\limits_{V_t} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}})dx = 0\end{aligned}$$

ya que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}}\right) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\left(-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{q}}\right) = 0$$

y por lo tanto el volumen del ensamble de sistemas no cambia en el tiempo. Además ya que el numero de sistemas tampoco cambia en el tiempo es bastante trivial demostrar que la densidad de sistemas ρ definida por

$$N = \int\limits_{V_t} \rho dx$$

tampoco cambia en el tiempo. Por lo tanto

$$\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_t}\rho dx = \int\limits_{V_t}\frac{\partial\rho}{\partial t}dx + \oint\limits_{S_t}\rho\frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \int\limits_{V_t}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}})\right]dx = 0$$

Dado que el volumen es arbitrario, podemos escribir

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho,\mathscr{H}\} = 0$$

y por lo tanto el teorema de Liouville

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, \mathscr{H}\} = 0$$

De este resultado parte toda la mecánica estadística, tanto clásica como cuántica. Requiere una visión desde el punto de vista Hamiltoniano y del espacio de fase. Por ejemplo, si queremos escribir la densidad de estados en el equilibrio en el espacio de fase descubrimos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \{\rho, \mathscr{H}\} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \rho(\mathscr{H})$$

Para el caso del oscilador armónico, las trayectorias en el espacio de fase son elipses alrededor del origen, y el volumen de V_t no cambia en el tiempo como es de esperarse.

Problema: Confirmar numéricamente para el caso de péndulo.

6.1. Geometría Diferencial

Veamos este mismo teorema desde otro punto de vista. Consideremos las trayectorias como

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_{t,t_o}(\mathbf{x}) \qquad\qquad \boldsymbol{\varphi}_{t_o,t_o}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

El volumen en el espacio de fase es

$$V_t = \int_{V_t} dy = \int_{V_o} dx \; det\left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right] \qquad\qquad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}_{t,t_o}$$

notemos que

$$\boldsymbol{\varphi}_{t,t_o}(x) = \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\; dt + O(dt^2)$$

donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{J}\mathscr{H}_x$$

y por lo tanto

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}_{t,t_o} = \mathbf{1} + \mathbf{DF}(\mathbf{x}, t)\; dt$$

Notemos que

$$det[1 + \mathbf{A}\epsilon] = 1 + \epsilon Tr[\mathbf{A}] + O(\epsilon^2)$$

Pero

$$Tr[\mathbf{DF}(\mathbf{x}, t)] = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}) = 0$$

y por lo tanto

$$V_t = V_o$$

Esto es equivalente a decir que $\mathscr{H}$ hace una TC en el tiempo, y por lo tanto el mapa

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$$

es simpléctico con $det\mathbf{M} = 1$.

Podemos además mostrar que el **flujo es simpléctico**. Veamos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}_{t,t_o} = \boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{\varphi}_{t,t_o}(\mathbf{x})\right]$$

con

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o} = D(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}(\mathbf{x})$$

Por lo tanto podemos calcular

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}^T \boldsymbol{J}\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}\right] = \boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}^T\left[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}})^T\ J\ +\ J\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}})\right]\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}$$

pero

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}})^T\ J\ +\ J\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}) = 0$$

porque $\boldsymbol{D}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}$ es simétrico. Esto implica que

$$\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}^T \boldsymbol{J}\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o} = const$$

y dadas las condiciones en $t = 0$, obtenemos

$$\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o}^T \boldsymbol{J}\boldsymbol{D\varphi}_{t,t_o} = \boldsymbol{J}$$

Miremos ahora la densidad

$$N(t) = \int_{V_t} \rho(\boldsymbol{y}, t)dy$$

En un intervalo Δt, las trayectorias se mueven a

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x} + \mathbf{J}\mathscr{H}_{\mathbf{x}}\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Usando

$$N(t+\Delta t)=\int_{V_{t+\Delta t}}\rho(\mathbf{y},t+\Delta t)dy=\int_{V_t}dx\rho(\mathbf{x}+\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}},t+\Delta t)\;det\left[\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\right]$$

podemos expandir a primer orden

$$N(t+\Delta t)\approx\int_{V_t}\rho(\mathbf{x},t)dx+\int_{V_t}dx\left(\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}\right)\Delta t$$

con lo que obtenemos en el limite $\Delta t\to 0$

$$\frac{dN}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=\int_{V_t}dx\left(\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}\right)$$

Dado que el numero de trayectorias no cambia en el tiempo y como el volumen es arbitrario, podemos ver que

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{J}\mathscr{H}_{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\{\rho,\mathscr{H}\}=0$$

que es nuevamente el teorema de Liouville.

6.2. Formas y tensores

7. Mecánica como el Limite de una ecuación de onda

Técnicas para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi se pueden encontrar en Goldstein. Pero en esta parte queremos investigar mas a fondo esta relación entre una ecuación de Hamilton-Jacobi y la mecánica.

En estos ejemplos podemos ver que la el momento p del sistema es perpendicular a las superficies $S=const$ en el caso de sistemas independientes del tiempo. Esto es muy parecido a la aproximación óptica de las ecuaciones de Maxwell, donde tenemos la Eikonal S y la ecuación del rayo

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dr}{ds}\right)=\boldsymbol{\nabla}n$$

que describe los rayos que nos normales a las superficies de fase constante

$$n\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\boldsymbol{\nabla}S$$

donde n es el índice de refracción. Esta aproximación funciona cuando $\lambda << L$ el tamaño del sistema.

Miremos el sistema independiente del tiempo en la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathscr{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) + U(q) = E$$

que es la ecuación que determina la transformación

$$T(q, \alpha, t) = S(q, \alpha) - Et$$

Esta última relación sugiere que T esta relacionado con una fase de una onda que se propaga, en forma similar a las óptica en electromagnetismo. Claramente las superficies de fase constante cambian en el tiempo y espacio.

Entonces nos hacemos la siguiente pregunta: **si las ecuaciones de la mecánica representan una aproximación "óptica" de una teoría de ondas, cual seria la ecuación que describe esta teoría mas general?**

Miremos la analogía con la ecuación de onda que se puede derivar de las ecuación de Maxwell

$$\nabla^2\phi - \frac{n(x)^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

Hacemos la siguiente expansión (óptica)

$$\phi \approx \exp(A(r) + ik_o(L(x) - ct)) \quad \rightarrow \quad \nabla^2 A + (\boldsymbol{\nabla} A)^2 + k_o^2(n^2 - (\boldsymbol{\nabla} L)^2) = 0$$

Si además asumimos que el índice de refracción n varia lentamente en una longitud de onda ($k_o L >> 1$), entonces tenemos la ecuación Eikonal de óptica geométrica

$$(\boldsymbol{\nabla} L)^2 = n^2$$

Inmediatamente vemos la similitud con la ecuación de Hamilton-Jacobi, ya que

$$n(x) \quad \rightarrow \quad p^2(x) = 2m\,(E - U(x))$$

Así vemos que las ecuaciones de Hamilton-Jacobi sugieren que la mecánica clásica es el limite de una ecuación de onda en que los rayos, definidos por las perpendiculares a los frentes de onda S, corresponden a las trayectorias del sistema. Esta es la razón por la cual Newton y Huygens fueron capaces de explicar el fenómeno de reflexión y refracción a través de caminos diferentes. Por lo tanto el principio de mínima acción (principio de Fermat) estaría relacionado con el principio de Hamilton

$$\delta \int L dt = 0 \quad \rightarrow \quad \delta \int n ds = 0$$

en la óptica. Nosotros sabemos que esta ecuación proviene de la ecuación de onda (ecuaciones de Maxwell). Pero también podemos observar que la ecuación de onda que tiene como aproximación

la mecánica no es exactamente una ecuación de onda como en el electromagnetismo, ya que no optimizamos p, sino L.

Tenemos que relacionar el Eikonal L con el generador de las TC, T. La ecuación de Hamilton-Jacobi sugiere que las dos cantidades podrían ser proporcionales. Además, aun no sabemos que representa **la longitud de onda de la onda** que en su limite representa la mecánica clásica. Como sabemos la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$(\nabla S)^2 = 2m(E - U(r))$$

Esta relación es el equivalente a la ecuación Eikonal para la mecánica. Por lo tanto vemos que T debería ser proporcional a la fase de la onda

$$2\pi i \left(\frac{L}{\lambda_o} - \nu t \right) = \frac{2\pi i}{h} (S - Et) = \frac{2\pi i}{h} T$$

donde h es la constante de proporcionalidad. Podemos entonces definir

$$E = h\,\nu$$

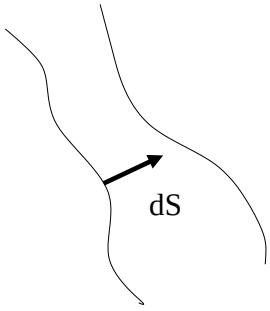

Figura 5: El campo de la superficie de fase constante.

Una vez que tenemos la frecuencia de la onda, podemos definir la velocidad de los frentes de la onda y su longitud de onda. El frente de onda se define como la superficie de fase constante. Por lo tanto en un intervalo dt, esta superficie cambia

$$dS = Edt \quad \rightarrow \quad dS = |\boldsymbol{\nabla} S|\, ds = \sqrt{2m(E-U)} ds$$

y por lo tanto la velocidad del frente de la onda es

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$$

pero si la transformación a las variables generalizadas no dependen del tiempo, entonces la energía cinética es cuadrática en las velocidades y por lo tanto

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{p}$$

para una partícula. Es muy interesante darse cuenta de esta **dualidad entre partícula y onda**.

Con esto tenemos lo que finalmente sugiere que T, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, representa la solución Eikonal de una ecuación de onda

$$\Psi = \Psi_o \exp\left[\frac{iT}{\hbar}\right]$$

con $\hbar = h/2\pi$. La ecuación de Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathscr{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi$$

presenta exactamente esta solución formal.

Pregunta: Es la ecuación de Hamilton-Jacobi el limite de la ecuación de Schrodinger? Substituyendo tenemos

$$\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 T = \left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}T\right)^2 + U\right] + \frac{\partial T}{\partial t}$$

lo que sugiere que la mecánica clásica es la aproximación para pequeñas longitudes de onda de la ecuación de Schrodinger con

$$\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 T \sim \frac{i\hbar}{2m}\frac{T}{R} \sim 0$$

Esto significa considerar $\hbar \sim 0$ lo cual es bastante razonable para sistemas microscópico, pero también implica que cuando esto no se da (sistemas microscópicos) hay que usar la ecuación de Schrodinger. Esta dualidad onda-partícula se hace mas importante a mediada que este termino

$$\frac{i\hbar}{2m}\frac{T}{R}$$

toma relevancia. Esto implica pequeñas distancias R, la física microscópica.

Esta ecuación fue derivada por de Broglie y Schrodinger en 1926. Notemos primero que para obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi de

$$\Psi = \Psi_o \exp\left[\frac{iT}{\hbar}\right]$$

necesitamos que la ecuación de Schrodinger tenga una derivada temporal de primer orden tal que $\mathscr{H} = E$. Esto marca una diferencia con la ecuación de onda que se obtiene de las ecuaciones de

Maxwell, pero como Ψ es compleja, vemos que hay soluciones propagantes. Podríamos preguntarnos por que no supusimos una ecuación de la forma

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathscr{H}\Psi = \frac{1}{2m}\left(i\hbar\boldsymbol{\nabla}\Psi\right)^2 + V\Psi$$

que daría directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi sin aproximación. Para empezar esta es una ecuación no-lineal y además hay razones muy particulares por la cual se considera la asignación

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\Psi$$

(la multiplicación por i garantiza que p sea Hermiticos). Notemos que esto garantiza que el conmutador

$$[x,p]\Psi = i\hbar\Psi$$

y vemos que el paso a la mecánica cuántica se hace trivialmente convirtiendo paréntesis de Poisson en conmutadores y multiplicando por $i\hbar$. Lo mismo para derivadas temporales. A su vez esto garantiza que

$$\left\langle\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right\rangle = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)\langle[\mathbf{X},H]\rangle = \frac{\langle\mathbf{P}\rangle}{m}$$

como esperaríamos.

Notemos el paralelismo entre la aproximación óptica y la mecánica clásica:

Ecuaciones de Maxwell	Ecuación de Schrodinger
Ecuación del rayo	Ecuación de Hamilton (Newton)
Eikonal $S = \int_{\lambda_o}^{\lambda_f} nds$	Acción $A = \int_{t_o}^{t_f} \mathscr{L}dt$
Principio de Fermat $\delta S = 0$	Principio de Hamilton $\delta A = 0$
Propagador $\sum Exp[ik_oS]$	Propagador $\sum Exp[i\hbar A]$
Ecuación Eikonal $(\nabla S)^2 = n^2$	Hamilton Jacobi $(\nabla T)^2 = 2m(E-U)$
Limite $k_oL >> 1$	Limite $pL >> \hbar$
onda $Exp[ik_oS - i\omega t]$	onda $Exp[(ik_oT - iEt)/\hbar]$

Por lo tanto vemos que en óptica las trayectorias están dadas por la normal $\hat{k}$ a las superficies de S constante. Mientras que en la mecánica la transformación canónica $\mathbf{p} = \boldsymbol{\nabla} S$ es perpendicular a las superficies de fase S constante. Esto ultimo es equivalente a superficies de fase A constante ya que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} = -\mathscr{H} + p\dot{q} = \mathscr{L}$$

ya que $T(q, \bar{p}, t)$, pero $\bar{p} = const$. Por lo tanto

$$T[q(t), \bar{p}, t] = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt$$