Última Tarea

Métodos de la Física Matemática II

Profesor *Víctor Muñoz* *Ayudante* *Cristóbal Espinoza*

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.

- 20 de Diciembre 2002 -

Entregar antes o durante el lunes 30 de Diciembre de 2002. (Esta si que no se corre)

Polinomios de Legendre Una de las características prinipales de los polinomios de Legendre es que son un set ortogonal de funciones. Esto significa que podemos representar cualquier función razonable a través de una expansión en estos polinomios. Encuentre la expansión de la función $f(x) = x^2$ en polinomios de Legendre.

Electrostática La función

$$g(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1}$$

es de fundamental importancia en electrostática, ya que muchas veces el potencial electrostático lo podemos escribir como

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \tag{2}$$

Sin embargo a veces la expresión (2) resulta complicada.
Es posible demostrar que

$$g(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3}$$

Donde:

- Los Y_{lm} son los armónicos esféricos y $*$ significa conjugar.
- El vector $\vec{r}'$ tiene asociadas las variables primadas (r', θ', ϕ') y análogamente el vector $\vec{r}$ las no primadas.
- Considere que las variables primadas se mueven solamente en donde hay carga (son las variables de integración en (2)) , mientras que las no primadas representan el punto de observación, o sea, en donde se está evaluando el potencial.
- La notación $r_<$ y $r_>$ se refiere a lo siguiente: $r_<$ *es el menor entre* r *y* r'*, y al mismo tiempo* $r_>$ *es el mayor entre* r *y* r'. Por ejemplo, si se está en una región en que miraremos más alla de las cargas, usaremos $r_< = r'$ y $r_> = r$.

Considere que hay una carga q en $z = a$ y otra carga $-q$ en $z = -a$. Encuentre el potencial $\Phi(r, \theta, \phi)$ para esta configuración siguiendo los siguientes pasos:

1. Escriba la distribución de carga de la siguiente manera:

$$\rho(r',\theta',\phi') = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{\delta(r'-a)\delta(\theta') - \delta(r'-a)\delta(\theta'-\pi)}{r'^2\sin\theta'}\right)$$

   y verifique que es necesario agregar los factores del denominador comprobando que la carga en todo el espacio es lo que corresponde.

2. Calcule el potencial Φ integrando la expresión (2) mediante la expansión (3) para $r < a$ y para $r > a$. Es recomendable primero integrar en ϕ' y lugo en las otras variables.

Funciones de Bessel Las funciones de Bessel también son un set ortogonal.
En la expansión

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{\nu m} J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) \quad 0 \le \rho < a, \quad \nu > -1$$

con $J(\alpha_{\nu m}) = 0$, encuentre los coeficientes $C_{\nu m}$ de la serie.