

## 2009

### Clase 1

- Uno se queda con la idea, en Mecánica Analítica, de que basta conocer el Lagrangiano o el Hamiltoniano, en las coordenadas que sea, y con las condiciones iniciales uno puede decir exactamente que le va a pasar al sistema, siempre.
- Ejemplo: velocidad final de caída. Robusto a pequeñas incertezas experimentales.
- Es una idea correcta, pero incompleta. No siempre es así.
- Modelo crecimiento de poblaciones: igual a la del año pasado, corregir por factor multiplicativo, corregir por factor de penalización a crecimiento excesivo.
- Iteración numérica:  $r = 1,5$ ,  $x = 0,3$ , trayectoria, atractor (estado asintótico), transiente.
- $x = 0,5$ , independencia de condiciones iniciales.
- $r = 3,3$ ,  $x = 0,3$ , dos valores alternados!
- $r = 3,5$ . Cuatro valores
- Órbita de período 1, 2, 4, etc.
- Panorama general: eliminar el transiente, graficar los siguientes  $N$  puntos. Diagrama de bifurcaciones.
- Doblamiento de período.
- Cada vez más seguido, mayor período.
- Región caótica, atractor caótico: órbita de período infinito.
- Caos no es desorden. Hay una acumulación de puntos en la zona caótica. El sistema, aún en la zona de caos, recuerda que alguna vez tuvo una órbita de período 8. Ventanas de orden. Nuevas bifurcaciones hasta llegar al caos nuevamente.

- Toda esta estructura la podemos entender matemáticamente, predecir, decir cosas analíticamente, calcular cuándo van a ocurrir las bifurcaciones, cuándo empieza el caos... El caos no es un desorden, es un concepto que tiene un significado matemático preciso.

## Clase 2

- Autosimilaridad. Ampliaciones sucesivas preservan la estructura.
- Sensibilidad a las condiciones iniciales: no es un problema experimental, es un problema intrínseco. No es correcto decir: como es un sistema determinista, si yo conozco aproximadamente la condición inicial voy a poder llegar a los mismos resultados. Determinismo es diferente de sensibilidad a las condiciones iniciales. Ejemplo con dos  $x_0$  separados por  $10^{-15}$ . Tras 200 iteraciones, son completamente distintos. Esto es caos determinista.
- Calcular distancias entre puntos sucesivos de bifurcación. En el límite, constante de Feigenbaum.
- Calcular distancia entre ramas de la bifurcación. En el límite, parámetro de reducción.
- Universales para mapas diferenciables, unidimensionales, máximo cuadrático local.
- La teoría del caos no se trata de estudiar lo diferente entre los sistemas, sino encontrar las características universales.
- Mapa logístico es nuestro oscilador armónico para la Teoría del Caos.
- Análisis de una trayectoria: función de retorno. Líneas que representan iteraciones sucesivas.
- Período uno: un punto estable, otro inestable ( $\dot{x} = 0!$ ) en  $M$ .
- Período dos: mostrar evolución para  $M$ . Dos puntos fijos. Función de retorno para  $M^2$ : dos puntos estables, dos inestables.
- Definir punto fijo (la transición del experimento numérico al analítico no fue bien hecha, y quedó un poco enredada esta parte).
- Punto fijo estable (cruza la curva en dirección “hacia arriba”).

- Punto fijo inestable (cruza la curva en dirección “hacia abajo”).
- Transición en la bifurcación ocurre justo cuando  $M(x^*) = x^*$  ocurre cuando  $M' = 1$ . Así puedo calcular analíticamente cosas. Esto hay que repetirlo mejor la próxima clase.
- (Lo malo no fue haber alcanzado a ver exponentes de Lyapunov, que va a servir para la próxima ayudantía.)

### Clase 3

- Los análisis anteriores para el mapa logístico fueron numéricos. Ahora nos propendremos revisar algunos resultados analíticos.
- Punto fijo órbita de período 1,  $M(x^*) = x^*$ .
- Punto fijo órbita de período 2,  $M^2(x^*) = x^*$ .
- Puntos fijos para mapa logístico.
- Estabilidad tiene que ver con qué le pasa a una condición inicial cercana al punto fijo, si se acerca o aleja de él. Luego hay que ver cómo evoluciona la *distancia* al punto fijo.
- Estable (atractor) si  $|M'| < 1$ , inestable (repulsor) si  $|M'| > 1$ .
- Para el mapa logístico, un punto estable y el otro inestable, como ya sabíamos.
- Período 2: análisis con  $M^2$ .
- Período  $m$ : análisis con  $M^m$  (mala letra  $m$ , cambiar a  $p$  o algo así).
- Ecuación para la distancia  $\delta_n$ . Tiene la forma de una ecuación exponencial. Ansatz exponencial.
- Exponente de Lyapunov.
- Caso órbitas caóticas,  $m = \infty$ .
- Algoritmo de cálculo:
  - a) Los  $x^{(k)}$  son los puntos sucesivos, eliminado el transiente.

- b)  $m$  mayor que el período de la órbita, irrelevante, porque la suma se separa y queda la fórmula correcta para  $m$  finito. Para  $m = 1$  la suma es  $p$  veces el mismo término, y queda simplemente la derivada en un punto, que es el  $\lambda$  correcto para una órbita de período 1. Si  $m = 2$ , por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \ln \left| \frac{dM}{dx}(x^{(k)}) \right| &\simeq \frac{1}{p} \left( \frac{p}{2} \ln \left| \frac{dM}{dx}(x^{(1)}) \right| + \frac{p}{2} \ln \left| \frac{dM}{dx}(x^{(2)}) \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \ln \left| \frac{dM}{dx}(x^{(2)}) \right| . \end{aligned}$$

- c) Mide la evolución de la distancia entre trayectorias cercanas, luego mide la sensibilidad a las condiciones iniciales, luego mide la existencia o no de caos.  $\lambda < 0$  órbita periódica,  $\lambda > 0$  caos.
- d) Gráfico exponente de Lyapunov mapa logístico, al lado del mapa logístico. Correlación entre el signo del coeficiente de Lyapunov y el mapa.
- e) Zoom a región caótica, estructura interna, ventanas de orden (cuencas profundas en Lyapunov), todo mapeado perfectamente.
- f) Puntos superestables ( $\lambda = -\infty$ ,  $M' = 0$ ). La distancia entre órbitas cercanas no quiere cambiar (a primer orden).
- (Grupo de renormalización me lo salté, porque quedaba sólo media hora de clases y quería terminar los sistemas continuos. Alguien preguntó sobre Feigenbaum, pero decidí saltarme la discusión para el final del capítulo, porque la tarea incluye un problema sobre Lorenz.)
  - Caos en ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas a los que estamos acostumbrados como físicos. ¿Hay caos? ¿Podemos usar algo de lo que ya aprendimos para estudiar caos, si lo hay, en el caso continuo?
  - Reseña histórica estudios de Lorenz (imprecisión en condiciones iniciales, resultado completamente inesperado, comienzo del estudio del caos).
  - Sistema de Lorenz: de ecuaciones de fluido, para un sistema meteorológico,  $\sigma$  relacionado con la difusión y la viscosidad,  $b$  relacionado con si el sistema conduce más por conducción o por convección. Derivación complicada.

No es el sistema original en que Lorenz vio caos, pero Lorenz después encontró esta versión más sencilla.

- Integración para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ , ciertas condiciones iniciales. Atractor caótico. Una curva que nunca se cruza a sí misma (sistema integrable, por unicidad no puede cruzarse), llena el espacio no uniformemente. (Se mostró figura, no se integró explícitamente.)
- Sistema meteorológico intrínsecamente caótico, el tiempo, en definitiva, es un problema esencialmente impredecible, porque las ecuaciones subyacentes exhiben caos, y por tanto sensibilidad a las condiciones iniciales. Pequeñas perturbaciones o imprecisiones en las mediciones, llevan a resultados completamente distintos. Efecto mariposa. Y sin embargo, estamos aprendiendo que se pueden decir ciertas cosas.
- Exponente de Lyapunov, midiendo la distancia entre dos trayectorias inicialmente cercanas. Recta en gráfico semi-log. Se puede seguir usando para caracterizar el caos.
- Otro método: generar mapas discretos. Viejo truco de convertir problemas difíciles desconocidos en problemas fáciles ya resueltos.
- Idea sencilla: Definir un plano y marcar un punto cada vez que la órbita pasa por ese plano. Es un conjunto numerable de puntos, puedo dibujar la secuencia, puedo dibujar la función de retorno, todo. Ésta es la idea básica, habiendo distintas estrategias para hacerlo dependiendo de los detalles, lo que da origen a distintos tipos de mapas.
- Corte de Poincaré:  $x(t) = C$ ,  $dx/dt = 0$ , uno mira sólo los cruces al plano en cierta dirección. (Sólo figura.)
- Mapa de los máximos sucesivos. El atractor de Lorenz es acotado en el espacio, y por tanto la trayectoria de cualquier coordenada debería estar llena de máximos y mínimos. Idea: tomar la sucesión de máximos de una coordenada. Resultado: mapa similar al triangular. (Sólo figura.) Dado eso, uno puede empezar a hacer análisis para esa coordenada, y caracterizar el sistema, si hay órbitas periódicas, caos, etc., aislando una sola coordenada. (No lo dije bien en la clase, sino después de ella, a propósito de una pregunta.)

- Mapa estroboscópico: darse una cierta escala de tiempo  $T$ , y sacarle fotos a la trayectoria cada un tiempo  $T$ .
- Ilustración con el péndulo anarmónico forzado.
- Graficamos el espacio de fase,  $(x, \dot{x})$ . Para un oscilador armónico, es un círculo.
- Integración `beta=0.1; A=1; w=1; A = 1` es grande, y sin embargo el sistema se parece a un oscilador armónico. Es un círculo. Se ve más desordenado que eso, pero porque seguimos toda la trayectoria. Botamos el transiente (primeros 200 puntos), y se ve una linda elipse.
- `A=1.2`; Para un  $A$  sólo un poco mayor, el comportamiento es *completamente* distinto. Un ejemplo muy bonito de lo que pasa cuando las ecuaciones son no lineales.

#### Clase 4

- Recapitulación oscilador armónico `A=1.0;`, `A=1.2;`.
- Mapa estroboscópico para  $T = 2\pi$  ( $A = 1,0$ ), y para  $T = 6\pi$  ( $A = 1,2$ ) (en los apuntes de Menéndez aparece  $12\pi$ , pero  $6\pi$  también funciona).
- Podemos calcular las constantes de Feigenbaum numéricamente, y eso es lo que les pedimos en la tarea. Pero uno puede hacerlo analíticamente.
- Observación: autosimilaridad en el mapa logístico. Partes del sistema se ven iguales al sistema completo, pero reescaladas y trasladadas.
- Técnica: grupo de renormalización, un pomposo nombre para una idea básicamente sencilla. Encontrar la transformación de coordenadas que permite convertir al sistema en una réplica de sí mismo, pero reescalada, y posiblemente trasladada.
- Vamos a estudiar la sucesión de puntos fijos superestables, en vez de la sucesión de puntos donde sucede la bifurcación. Debería ser el mismo límite, si hay convergencia de Cauchy.
- Estudiemos solamente la primera bifurcación, para pasar de período 1 a 2.

- Comparamos los mapas  $M$  y  $M^2$ . En torno a los puntos fijos superestables la función de retorno se puede aproximar por una cuadrática. En torno a dichos puntos, las funciones son iguales, pero reescaladas, rotadas, y trasladadas. Transformación de coordenadas.
- Desarrollo algebraico hasta encontrar  $r_c$ ,  $\delta$  y  $\alpha$ . (Esta parte no fue muy limpia y no me gustó cómo la discutí, me enredé mucho.)
- Mostrar que se ve por qué va a ser la misma constante siempre que el máximo sea cuadrático.
- Grupo de renormalización útil en muchísimos otros contextos (transiciones de fase, exponentes críticos). (No fue una buena idea mencionar esto, porque ellos no han visto nada de esto.)
- (Por una pregunta, me puse a hablar del trabajo de tránsito y caos en un sistema de un auto. Fue entretenido, pero creo que innecesario. La pregunta era qué es lo que se hacía hoy en día en caos, y la verdad la respuesta debería haber sido vaga, del tipo “lea Ud. los papers y se dará cuenta”.)
- Caos es un concepto que aparece en muchos otros sistemas. Nosotros sólo vimos el mapa logístico y el sistema de Lorentz. Hay muchos otros ejemplos, y no son para nada sistemas exóticos:
- Problema de 3 cuerpos. Uno sabe que el problema de 1 cuerpo se resuelve exactamente. El de 2 se reduce al de 1 (vía masa reducida), y se puede resolver exactamente (el viejo truco). El de 3 ya no se puede resolver exactamente, y sólo se puede resolver numéricamente, y además presenta caos.
- Billares. Una partícula en una caja de cierta geometría, rebotando especularmente en los bordes.
- Anillos de Saturno, producidos por inestabilidades gatilladas por la presencia de las lunas de Saturno. La secuencia de gaps y anillos tiene estructura aproximadamente autosimilar, lo que no es casualidad, porque el problema es caótico.
- Turbulencia en fluidos (tenía que haber mostrado antes cuencas de atracción, para que se vieran monitos similares, pero no sabían lo que eran, tuve que explicarlo, y además no pude mostrarlo, porque no tenía el capítulo en

el computador. Un error. Hablé de turbulencia y de las distintas escalas en Júpiter, pero no quedó bien y podría haberlo evitado sin daño, en honor a la hora.)

- Fractales.
- Set de Cantor. Definición. Conjunto infinito, medida cero. (No sabían lo que era el set de Cantor, ni se acordaban lo que era medida.)
- Evidentemente no es un punto. Pero tampoco es una línea. ¿Existe alguna manera de caracterizar esto, para decir que es algo que es más que un punto pero menos que una línea?
- Puntos uniformemente distribuidos en una línea, cubiertos por una caja de longitud  $L$ , el número de puntos va como  $N \sim L$ . Para puntos en un plano, va como  $N \sim L^2$ . Para un volumen, va como  $N \sim L^3$ . Una dimensión, exponente 1; dos dimensiones, exponente 2; tres dimensiones, exponente 3. Esto no puede ser casualidad. Podemos imaginar, en principio, que puntos no uniformemente distribuidos aumentan dentro de la caja a una razón  $N \sim L^D$ , con  $D$  algún número no entero. Si eso es así, entonces a ese número  $D$  lo vamos a llamar la “dimensión”, del conjunto de puntos.
- Uno creía que sabía todo, y que la dimensión tiene que ser necesariamente un número entero. Ahora nos damos cuenta de que no, y cuando abrimos la puerta a que existan dimensiones no enteras, entramos al fascinante mundo de los fractales, que van a ser objetos matemáticos, o físicos, cuya dimensión no es entera.
- (Comencé el cálculo para el set de Cantor. Puse el resultado al tiro, por si no terminaba a tiempo en los minutos que me quedaban, y calculé la longitud del set de Cantor al cabo de la  $n$ -ésima iteración,  $(2/3)^n$ , pero no terminé, y la verdad no fue una buena idea haberlo intentado.)

## Clase 5

- Recapitulación sobre autosimilaridad en mapa logístico. Nuestro objetivo es ver si podemos aprender algo sobre las consecuencias de la autosimilaridad en sí.
- Set de Cantor. Un conjunto muy sencillo que exhibe autosimilaridad.

- El problema de la dimensión, visto la clase pasada.
- Este problema se relaciona con otro, conocido como la paradoja de la costa. Una manera de medir la costa de Inglaterra es con trazos de longitud constante que unen puntos de la costa, y luego sumar los trazos. Uno esperaría que, al usar trazos cada vez más pequeños, la distancia converja a algo. No es el caso. Richardson, en 1961, encontró empíricamente que  $L(G) = FG^{1-D}$ , con  $F > 0$ . No converge a nada. La distancia depende de la escala usada, *para todas las escalas*, no importa cuán pequeña sea. A lo sumo uno puede decir cómo escala.  $D$  representa la “dimensión” de la costa. Gran Bretaña, 1.25; Australia, 1.13; África, 1.02. De alguna manera,  $D$  tiene relación con cuán regular es la costa.
- En 1967, Mandelbrot escribe un paper famoso, en que aborda este problema, y hace notar que la relación empírica de Richardson se puede deducir con elementos puramente formales, suponiendo que la costa es autosimilar. Mandelbrot nos está diciendo que hay ciertos objetos extraños, los fractales (aunque no los llama todavía así en este paper), que nos permiten modelar algo que está en la naturaleza.
- La clase pasada mostramos que la cantidad de puntos, uniformemente distribuidos, dentro de un intervalo, un área, o una esfera, va como  $r^n$ , con  $n = 1, 2$  ó  $3$ , respectivamente. Tiene sentido entonces pensar que podrían existir objetos geométricos tales que  $n$  es no entero. Ésos son los fractales.
- La definición anterior, de  $N \sim r^D$ , con  $D$  real, corresponde (laxamente) a la definición de dimensión de Hausdorff.
- No es la única manera de definir una dimensión fractal. Hay un modo fácil de implementar con un computador, y ésa es la dimensión de box counting, o dimensión de capacidad.
- Ponemos una grilla con trazos/cuadrados/cubos de longitud  $\epsilon$ , y contamos cuántos cuadros tienen un elemento del conjunto dentro de ellos,  $N(\epsilon)$  (notar que hay que distinguir si estamos contando el área o la frontera). Para puntos, líneas, áreas y volúmenes regulares, deberíamos tener  $N(\epsilon) \sim 1, 1/\epsilon, 1/\epsilon^2$ , respectivamente. Por lo tanto, si es verdad que podemos tener dimensiones intermedias, deberíamos tener  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$ . Lo cual nos da

$$\log N(\epsilon) \sim -D \log \epsilon .$$

La estrategia computacional es clara: ponemos una grilla de ancho  $\epsilon$ , contamos las cajas con elementos del conjunto, graficamos como función de  $\epsilon$  en gráfico log-log, y la pendiente es  $-D$ , con  $D$  la dimensión de box counting.

- Resultado analítico para set de Cantor (lo hacemos):  $\log 2 / \log 3 \simeq 0,63$ .
- Resultado numérico: ¡ok! Evidentemente no es 1, así que ciertamente no es una línea. Impresionante.
- Otros fractales: triángulo de Sierpiński (visto en ayudantía, dibujarlo,  $D = 1,26$ ), Koch snowflake (dibujarlo,  $D = 1,585$ ).
- Interesante: Una construcción puramente matemática, da origen a algo que se parece que hemos visto siempre: un cristal de nieve. Ése es el punto que Mandelbrot nos quiere proponer, que estos objetos matemáticos extraños, tienen que ver con algo real, con la costa de Gran Bretaña, con los copos de nieve...
- Uno se puede poner a generar muchos fractales. El más famoso probablemente es el set de Mandelbrot. Explicar con detalle cómo se genera. Mostrar dibujo personal.
- Mostrar figura profesional. Explicar algoritmo de coloreado: número de iteraciones en llegar a “infinito”, una medida de la rapidez con que la sucesión diverge. Mostrar zooms sucesivos en la figura. En ningún momento, la curva es “rectificable”, siempre aparecen más estructuras, en todos los niveles en que hagamos zoom.
- El set de Mandelbrot es un ejemplo de fractal divergente, basado en un test de divergencia de una sucesión. Otros son el set de Julia, definidos reemplazando  $z^2$  por una función racional general. Si la función racional es cuadrática ( $z^2$ , se dice que es un set de Julia cuadrático).
- Fractal de San Marco, explicar detalladamente cómo se genera, su parecido a Mandelbrot, y su diferencia: ahora la semilla se varía, y  $c$  es fijo. Figura.
- También están los fractales convergentes, basados en un test de convergencia de una sucesión. Ejemplo: resolver por método de Newton  $z^3 - 1 = 0$  (ya lo habían visto en MFM2, así que no hay tanto que explicar). Las raíces uno las encuentra fácilmente, pero la pregunta es, dada una semilla para el

método de Newton, a qué raíz se va. Según la raíz a la que va, se pinta la semilla de un color determinado. Uno puede pensar ingenuamente que en torno a cada raíz habrá una cuenca de atracción, pero no es tan sencillo. Mostrar figura autogenerada. La frontera tiene estructura fractal. Mostrar figura web.

- Hay muchos fractales bonitos, figuras disponibles en la red, programas para visualizarlos.
- Ej: xfractint (mostrado en ayudantía: uno elige el fractal, lo calcula, uno puede pedir un zoom, lo recalcula, etc.)
- Otro: xaos. Mostrar en clase. Mandelbrot. Zoom “infinito”. Impresionante. No hay cálculo, hay una gran base de datos de puntos. Es para impresionar a la abuelita. Newton. Zoom aún más infinito. Completamente autosimilar. Otros fractales, mostrar rápidamente. A estas alturas, uno ya se olvidó de la costa de Gran Bretaña, y si esto sirve o no para algo. Simplemente, uno disfruta de la oportunidad de estudiar estas cosas, por el puro placer de verlas, sólo porque son bonitas.
- Las fotos de las paredes de esta sala son fractales. No son paisajes creados por algún diseñador gráfico trasnochado. Son expresiones sencillas, matemáticas, que dan origen a dibujos impresionantes.
- Pero, ¿tienen algo que ver con algo real? Sí.
  - Figura de Lichtenberg. Explicar experimento. Evidentemente un árbol. Pero es un fractal, una estructura muy complicada, que uno puede generar computacionalmente con algoritmos muy sencillos, que generan fractales.
  - Descargas eléctricas. Simulación computacional. Es igual. También son fractales entonces.
  - Foto de DLA. Explicar experimento. También se puede reproducir con algoritmos sencillos, que generan fractales.
  - Brócoli Romanesco. Impresionante. ¡Eso se come! Y es evidentemente un fractal.
- Los algoritmos que generan fractales generan estructuras tan parecidas a cosas reales, que se usan en diseño de juegos, por ejemplo, o digitales

en general, para crear árboles o patrones geográficos (mostrar fractal de la hoja, enfatizar que son transformaciones matemáticas sencillas, y el resultado es claramente una hoja).

- ¿Cuál parece ser la moraleja de todo esto? Bueno, uno se puede preguntar cómo es que una pequeña semilla tiene en sí la capacidad de crear toda la complejidad de un árbol, y uno podría pensar que hay una serie de leyes bien complicadas que rigen eso. Pero cuando uno estudia fractales, nos damos cuenta que esa misma complejidad se puede crear con expresiones matemáticas sencillísimas. Quizás ahí hay algo profundo: parece que la Naturaleza no necesita complejidad para generar complejidad; la Naturaleza puede crear complejidad a partir de la simplicidad. Y esto es una revelación profunda, impresionante. Porque no es necesario que haya leyes complicadas; bastan modelos sencillos, como nos gustan a los físicos, para crear la complejidad que vemos a nuestro alrededor. Y hay algo de poesía en eso.

### **Clase 6**

- De varias maneras, hasta ahora, hemos visto que expresiones matemáticas sencillas son capaces de generar patrones complicados: caos, fractales. Ahora la idea es profundizar en ese aspecto de lo que hemos visto: que uno no necesita leyes complicadas para explicar la complejidad que vemos a nuestro alrededor. Y lo vamos a hacer a través de un tipo de modelos que son, por excelencia, ejemplos de sistemas sencillos, muy sencillos, que son capaces de albergar comportamientos muy complejos: los autómatas celulares.
- Historia: idea de von Neumann, de máquina autorreplicante. Eventualmente, modelo computacional (estaba comenzando esa era en ese momento), y mostró que era posible tener sistemas que fueran capaces de autorreplicarse.
- Éstos son los elementos que uno debe tener para construir un autómata celular:
  - Discretización del espacio: uno divide el espacio en una grilla de cierto tamaño.
  - Estado de las celdas: uno debe decir en qué estados puede estar cada celda, y que significa (ej.: 1/0, encendido/apagado, viva/muerta, etc.).

- Discretización del tiempo: dada una cierta configuración inicial dada de las celdas, uno hará evolucionar el sistema de acuerdo a ciertas reglas, para llegar a un tiempo  $t_1$ , y así sucesivamente.
- Reglas de evolución: se deben dar reglas que permiten determinar, dada una configuración de celdas en  $t_n$ , la configuración de celdas en  $t_{n+1}$ . Las reglas son usualmente sencillas e involucran el estado de la propia celda a evolucionar *y las celdas vecinas*. Son posibles muchas variaciones en este aspecto: qué significa “celda vecina” (las celdas a cada costado, las cuatro en los cuatro puntos cardinales, las ocho vecinas, tomar celdas a segundos vecinos, etc.), y por supuesto qué tipo de regla se va a usar.
- Ejemplo sencillo. (Hacer con cuadritos pintados en vez de números.)  $111 \rightarrow 0$ ,  $110 \rightarrow 1$ ,  $011 \rightarrow 0$ ,  $010 \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow 0$ . O sea, la única manera de que la celda quede viva es que tenga una celda viva a su izquierda solamente. Evolucionaremos estas reglas en una grilla de  $3 \times 3$ , con condiciones de borde periódicas. Dibujamos una H, evolucionamos una vez, quedan dos celdas pintadas, evolucionamos otra vez y desaparece todo.
- Éste es un caso particularmente sencillo y quizás poco interesante, pero de esto, con algunas variaciones, se trata siempre hacer un autómata celular.
- Como decíamos, los autómatas celulares tenían su propia historia, pero saltaron a la fama en 1970, con un autómata celular particularmente interesante diseñado por John Conway en 1970, y que se llamaba “El Juego de la Vida” (Game of Life). Este juego apareció comentado en una revista de divulgación científica, Scientific American, en 1970, en un artículo de Martin Gardner, el cual lanzó a la fama al juego y a los autómatas celulares en general.
- Mostrar versión en XEmacs. Uno parte con cierta condición inicial, y el sistema comienza a evolucionar de maneras extrañas.
- Las reglas son sencillas:
  - Una celda viva, muere si tiene uno o ningún vecino, de “soledad”.
  - Una celda viva, con cuatro o más vecinos muere, por “sobrepoblación”.
  - Una celda viva, con dos o tres vecinos, sobrevive.
  - Una celda muerta, con tres vecinos vivos, se vuelve viva.
- Lo interesante, y ésta es la clave de los autómatas celulares, es que a partir de estas reglas sencillas, al hacerlas evolucionar, aparecen comportamientos completamente inesperados.

- xlife
- Mostrar que ponemos una condición inicial arbitraria, y evoluciona, y de hecho evoluciona a ciertas estructuras estables.
- Estructuras fijas: block (ver en detalle en la pizarra, es evidente que va a ser una estructura invariante; mostrarla en xlife), beehive, boat, ship, loaf (mostrarlas solamente en pizarra y en xlife).
- Estructuras oscilantes: blinker, toad (en pizarra y xlife).
- Estructuras móviles: gliders. (Pizarra.) Evolucionarlas en xlife. Esto es impresionante. ¡Es una ameba! Hemos creado, con reglas completamente sencillas, un bicho que reptaba en este mundo de dos dimensiones.
- Estructuras evolucionantes: Queen Bee Shuttle. (Pizarra.) Evolucionarlas en xlife. Avanza, se deforma, deja un beehive, se devuelve, deja otro beehive, y vuelve a devolverse. (Ésa es la razón del nombre.) Completamente inesperado.
- Nada de esto estaba en las reglas iniciales, y sin embargo ahí está. Ése es el punto central. Reglas sencillas, locales, dan origen a comportamientos globales organizados. Es lo que uno llama comportamientos “emergentes”. Y eso es lo que da origen a un área muy fascinante de la Física, que son los Sistemas Complejos. Sistemas en que interacciones locales, de corto alcance, de alguna forma dan origen a comportamientos globales organizados, coherentes, que uno llama “emergentes”, que no es evidente que estén contenidos en las sencillas reglas de interacción originales.
- Observar que, para una semilla inicial dada, lo que está pasando acá, en el lenguaje de caos que ya aprendimos, es que el sistema, después de un transiente, llega a los atractores, a los puntos fijos estables, y hay algunos de período uno, otros de período dos, etc. Podemos usar el mismo lenguaje adquirido antes para describir el comportamiento de un autómata celular.
- Hay otros autómatas celulares posibles. Unos particularmente interesantes son los sistemas presa-predador. En ellos, uno tiene celdas de dos tipos, presa o predador. El resto es esencialmente lo mismo.
- Mostrar el ejemplo en JavaScript.
- Correrlo de a una iteración, con los parámetros default, simplemente para mostrar que conejitos y lobitos parecen evolucionar como uno espera:

los conejitos arrancan a perderse, alejándose de los lobitos, y los lobitos los persiguen.

- Correr 25 iteraciones, para ver comportamiento global.
- Mostrar el diagrama de espacio de fase.
- Mostrar reglas de evolución. Son sencillas y razonables.
- Hay una parte no determinista, que es la tasa de crecimiento y muerte. Para cada celda, además de determinar su estado futuro usando las reglas conocidas, se lanza un dado, es decir un número al azar. Si el número está bajo/sobre un cierto valor, que se ajusta a conveniencia, eso determina un comportamiento u otro.
- Otro ejemplo: bandadas de pájaros. Película.
- Los pájaros evolucionan coherentemente, rodean obstáculos, etc., como si fueran inteligentes, pero en realidad todo esto está determinado por reglas de comportamiento muy sencillas.
- En realidad, esto no es autómata celular, porque no hay discretización del espacio y del tiempo, pero la idea es similar.
- Reglas: separación (dos pájaros tratarán de no estar demasiado cerca), alineamiento (un pájaro tratará de moverse en la dirección promedio de sus vecinos), cohesión (un pájaro tratará de moverse hacia la posición promedio de sus vecinos). El resultado es, como siempre, completamente inesperado, organizado.
- Uno empieza a entender, entonces, que la complejidad de la Naturaleza no emerge, necesariamente, de la complejidad, sino de reglas sencillas de comportamiento.
- Además de lo anterior, estos experimentos computacionales permiten avances en la animación digital. Por ejemplo, en “Batman Returns” de Tim Burton, las secuencias con bandadas de murciélagos fueron creadas precisamente con versiones modificadas del software que acabamos de ver.
- Otro ejemplo es la secuencia de la estampida en “The Lion King”. Mostrar video.
- Todo esto es un mundo muy fascinante y, como hemos dicho, nos permite descubrir algo aparentemente profundo acerca de la Naturaleza.

- Mostrar fotos de estorninos en Roma, particularmente famosas, admirarse de las estructuras completamente complicadas y fascinantes que los pájaros describen.
- Mostrar fotos de portada de Physics Today de Octubre 2007, y cómo estos sistemas uno puede, al menos, imaginarse que *pueden* ser descritos por autómatas celulares o por reglas sencillas de interacción.
- Lo mismo se hace con cardúmenes de peces (mostrar foto), colonias de hormigas (mostrar foto), evacuaciones de peatones de un recinto cerrado. . . Todos estos comportamientos colectivos pueden ser descritos por reglas más o menos sencillas.
- Hasta ahora, hemos visto autómatas celulares como generadores de “patrones de comportamiento emergentes”. También uno puede usarlos, y esto es otro mundo en sí, para generar “patrones espaciales emergentes”.
- Wolfram sistematizó el estudio de autómatas celulares unidimensionales.
- Ejemplo, Rule 30. Explicar por qué 30, explicar regla de evolución, explicar figura hasta 16 iteraciones (todo esto en detalle, porque servirá para la tarea, en que simplemente se les pide llegar a más iteraciones).
- Lo interesante es que, al hacer evolucionar esto, emerge un patrón que a uno le recuerda cosas que ha visto. Mostrar concha de cono textil. En el fondo esto tiene sentido, porque uno aprende que una célula va a expresar un determinado pigmento o no dependiendo de las interacciones con sus vecinos. . . ¡y eso es un autómata celular! ¡*Tiene* que resultar!
- Uno empieza a mirar alrededor entonces, y se da cuenta de que en todas partes hay patrones complicados, y uno dice: ¿Cómo es posible que las cebras tengan esas rayas? ¿Cómo es posible que los leopardos tengan esas manchas? ¿Y las jirafas esas manchas? Y uno ve que, quizás, acá está la respuesta. No se necesitan reglas complicadas, sino sencillas y locales. ¿Será posible hacer un autómata celular que dé origen a las rayas de una cebra. . . ? ¡Sí! ¿A las manchas de una jirafa. . . ? ¡Sí! Lo cual, nuevamente, nos confirma que, quizás, lo que acabamos de hacer dice algo profundo acerca de la Naturaleza.

## Clase 7

- Self-organized criticality
- Partimos con la portada del paper BTW sobre SOC en pantalla.

- Hoy vamos a hablar de esto. En 1988, Bak escribió un paper proponiendo un modelo extremadamente sencillo, pero que presenta características comunes a una enorme familia de problemas. De alguna manera, el modelo propuesto captura la esencia de una gran multitud de fenómenos, y, con justicia, es uno de los papers más influyentes en la historia de la Física, dando origen a toda una nueva área de investigación científica, muy fértil, extremadamente interesante, y todavía muy activa. En este artículo se propone el estudio de un fenómeno muy particular, que los autores bautizan “self-organized criticality”, como dice el título del paper. En esta clase, intentaremos entender el significado de este título, y la profunda consecuencia que han tenido estos estudios en la imagen que tenemos de la naturaleza.
- El modelo es muy sencillo: es un autómatas celular. Pensemos en una dimensión. Discretizamos el espacio en cierto número de sitios. Al comenzar, ponemos un grano de arena en el sitio de más a la izquierda. En la siguiente iteración, otro en el mismo lugar, y así sucesivamente. Ahora, diremos que cuando la diferencia de altura entre dicho sitio (1) y el siguiente (2) supera una cierta altura crítica  $h_c$  (por ejemplo, 4), el último grano cae hacia la derecha. Si sucediera ahora que, después de mover el granito hacia el sitio 2, la diferencia entre el sitio 2 y el 3 es mayor que  $h_c$ , entonces volvemos a mover el granito hacia la derecha, y así sucesivamente, hasta que se llega a una situación en que ninguna diferencia es mayor que  $h_c$ . Decimos entonces que el sistema ha *relajado*. A todo el conjunto de eventos que ocurrió desde que se agregó el granito que desencadenó la relajación, hasta que la relajación concluye, le llamamos una *avalancha*.
- Procedemos entonces así: colocamos un granito en el sitio 1. Si  $\Delta h > h_c$  para algún sitio, movemos el granito un sitio a la derecha. Volvemos a revisar la condición y mover un granito si corresponde, hasta que  $\Delta h < h_c$  en todas partes. Entonces dejamos caer otro granito en el sitio 1. Y así sucesivamente.
- Discutir la condición de borde.
- Mostrar el código.
- Simulación con  $N = 5$  sitios y pocas iteraciones. Mostrar el archivo de texto, donde se ven los números, y ver el estado final: una “pirámide”, una pila de arena.

- El modelo anterior se denomina un sandpile model, y es este modelo tan sencillo el que se nos propone como representante de una gran clase de procesos físicos.
- Ahora que sabemos cómo responde el sistema, con avalanchas, podemos preguntarnos por el *tamaño* de ellas. Mediremos el tamaño contando el número de sitios involucrados en una avalancha dada. En el archivo de texto, la última columna nos dice, con un 1, si hubo algún movimiento de granitos, y por lo tanto, el problema se reduce a contar el número de unos consecutivos, y eso diremos que es el tamaño de la avalancha.
- Gráfico de tamaño de avalanchas. No es muy lindo, pero se ve que hay alguna irregularidad al comienzo, y de ahí en adelante es constante. En lenguaje conocido, diríamos que hay un *transiente*, y que luego de él el sistema cae en un *atractor* o *punto fijo estable*. Interesante.
- Corramos el sistema durante más iteraciones (5000), para tener más estadística. Vemos que sucede lo mismo. Visualizamos el estado final, una pila de arena, y el tamaño evoluciona igual, llegando a un punto fijo estable.
- Tratemos de entender. Pensemos en el sistema en el estado final, una linda pila de arena. Cuando ha transcurrido suficiente tiempo, podemos pensar  $\Delta h = h_c$  en todas partes (si fuera mayor, relajaría y no sería estacionario). Entonces, al agregar un granito en el sitio 1,  $\Delta h = 4$ , y el granito tiene que correrse a la derecha. Pero ahora también  $\Delta h = 4$ , en el sitio siguiente, y tiene que correrse el granito al sitio 3. Y así sucesivamente: el granito cae de sitio en sitio, y el número de sitios involucrados en la avalancha es justo la longitud del sistema: ése es el tamaño de las avalanchas siempre. ¡Y eso es justamente lo que dice nuestro gráfico: 20 sitios, avalanchas de tamaño siempre después del transiente.
- Así que el problema en una dimensión no era tan interesante después de todo, podríamos haber adivinado perfectamente lo que iba a suceder. Sin embargo, hemos desarrollado un modelo que tiene algunas características importantes que luego nos van a servir.
- Técnicamente, lo que hemos hecho es tener un sistema que es estimulado en una cierta escala de tiempo (el granito agregado en el sitio 1) que es mucho menor que la escala en que el sistema relaja, o disipa energía (la avalancha). Esta separación de escalas de tiempo es crucial para este modelo.

- El segundo elemento importante de este modelo es que existe una magnitud umbral, tal que cuando es superada, se gatilla una avalancha. El sistema, entonces, responde a perturbaciones infinitesimales (un grano de arena contra posiblemente muchos que tiene la pila de arena), con avalanchas.
- Bajo estas condiciones, lo que ha sucedido es que el sistema se ha organizado en un estado tal que es globalmente estable, mirado desde lejos. Porque si lo miramos de cerca, están ocurriendo avalanchas todo el tiempo. Pero de lejos, la forma del sistema es siempre la misma: una pila de arena.
- Ahora complejicemos un poco el sistema, y veamos qué es lo que ocurre en dos dimensiones.
- La regla de evolución es la misma. Agregaremos granos en el centro de una grilla cuadrada. Ahora, si la diferencia de altura entre un grano y alguno de sus cuatro vecinos en línea recta es mayor o igual que cuatro, entonces se produce una avalancha, repartiendo los cuatro granos de exceso entre sus cuatro vecinos, uno para cada uno. Al cabo de un cierto tiempo, debería producirse una pila de arena, con el punto más alto en el centro de la grilla.
- Correr simulación con  $N = 5$ , y 10 iteraciones, para mostrar el output, el conteo de sitios activos, y el estado final (una meseta más que una pila, en este caso).
- Correr simulación con  $N = 10$  y 400 iteraciones, para mayor estadística, sin tirar las fotografías a un archivo.
- La evolución del tamaño de los eventos ahora es completamente distinto: no parece haberse llegado a un estado estacionario, sino que hay siempre avalanchas pequeñas y grandes, sin ninguna regularidad. Hay algo como un transiente al principio, pero de ahí adelante, está este estado en que el tamaño de las avalanchas no es predecible. Y ojo, que la perturbación sigue siendo infinitesimal.
- Lo que ha ocurrido, entonces, es que el sistema responde a perturbaciones a avalanchas que son potencialmente de *cualquier* tamaño. Por esto, en analogía a sistemas termodinámicos en transiciones de fase (explicar), decimos que el sistema está en un estado *crítico*, donde el sistema puede responder de manera global a perturbaciones infinitesimales. Esto explica una parte del título del paper de BTW.

- A diferencia de la criticalidad en transiciones de fase, aquí no hay un parámetro externo, como la temperatura, que yo esté ajustando para llegar al estado crítico. Acá, hay un único parámetro libre,  $h_c$ , y podemos darnos cuenta de que el sistema llegará al mismo estado, independiente de  $h_c$ . Además, no estoy perturbando mucho el sistema, solamente agregando granitos de vez en cuando, y cuando hay avalanchas dejo que el sistema relaje, y no lo vuelvo a perturbar hasta que termina. Por ello, decimos que este estado crítico es *auto-organizado*. Y ello explica la otra parte del título.
- Lo que tenemos entonces es que este modelo de pila de arena presenta el fenómeno de *self-organized criticality* (SOC).
- Ya que las avalanchas pueden ser de cualquier tamaño, podemos calcular la probabilidad de tener una avalancha de cierto tamaño. Explicar cómo calcular una PDF de eventos, graficarla en log-log.
- Notar que para eventos grandes (los chicos no importan), el tamaño va como una línea recta. Esto es muy distinto de lo que uno sabe de Termodinámica, en que los eventos grandes son muy improbables. En principio, las distribuciones de equilibrio son Maxwellianas, lo que significa que es muy improbable que una partícula tenga velocidad muy grande. Pero aquí vemos que los eventos grandes no son infrecuentes, porque la pdf va no como una exponencial, sino con un decaimiento polinomial.
- Una línea recta en log-log significa que el número de eventos con un tamaño dado está relacionado con el tamaño de dichos eventos con una *ley de potencias*. Y éste es un hecho crucial, porque cuando uno empieza a explorar otros ámbitos de la naturaleza, descubre que las leyes de potencia están en todas partes.
- Tomemos, por ejemplo, los terremotos. Todos sabemos cómo se producen: modelo de placas, acumulación de tensión, durante décadas, siglos posiblemente, y de repente, el sistema colapsa y libera la energía repentinamente. Es una física completamente distinta a la pila de arena. Y sin embargo, si uno lo mira bien, en el fondo, los terremotos son exactamente iguales a nuestro modelo sencillo de pila de arena. Reconocemos aquí todos los elementos esenciales: un mecanismo de excitación, un mecanismo de disipación, una escala de tiempo de excitación mucho mayor que la de disipación, y una magnitud umbral sobre la cual se produce la disipación.

¡Es lo mismo! Esto podría ser casualidad. Pero en realidad la casualidad no puede ser tanta, porque ahora, si uno grafica la distribución de tamaño de los eventos... ¡es una ley de potencias! Esto tiene nombre, de hecho, y se llama ley de Gutenberg-Richter.

- Mostrar paper de von Neumann, con todos los gráficos de leyes de potencias. (Esto fue tirar toda la carne a la parrilla de repente, pero ya no me quedaba tiempo, sólo 10 minutos, y quería cerrar con dramatismo la clase. Entonces en vez de mostrar resultados exclusivos de terremotos — torpemente dejé los nombres originales de los papers, lo que los hacía más difícil de encontrar con Alt-Tab— mostré todas las leyes de potencia al tiro y las fui discutiendo de a una.)
- Otro ejemplo: intensidad de rayos gama en eventos de llamaradas solares. De nuevo, la física es completamente distinta: Física de Plasmas, reconexión magnética, etc. Pero al final, la distribución de eventos, nuevamente, es una recta en log-log. Esto nos dice, nuevamente, que el sistema, de algún modo, se ha auto-organizado en un estado crítico, que es capaz de responder a estímulos infinitesimales (perturbaciones en el campo magnético, en el plasma solar, etc.) con avalanchas de todos los tamaños posibles.
- Lo impresionante, es que hay una enorme variedad de fenómenos que parecen exhibir exactamente el mismo tipo de comportamiento: número de citas en papers (número de papers con cierto número de citas, versus número de citas), hits recibidos por páginas web, libros vendidos por una tienda, llamadas telefónicas recibidas, diámetro de cráteres en la luna, distribución de riqueza en una población, *frecuencia de nombres*, población de ciudades. Todas, *todas*, exhiben distribuciones de probabilidad que son leyes de potencias. Esto es completamente extraordinario.
- Un ejemplo particularmente interesante es la frecuencia de uso de palabras en un idioma. En la figura, está graficada la distribución de probabilidad de frecuencia de palabras en “Moby Dick”. Uno toma un texto, y cuenta cuántas veces aparece cada palabra en él. Y luego construye la PDF. El resultado: ¡una ley de potencias! Esto también tiene nombre, y se llama la ley de Zipf.
- Lo que hemos encontrado, aparentemente, es un comportamiento universal. La aparición de leyes de potencia en todas partes sugiere que el concepto

de SOC es transversal a muchos ámbitos, aparentemente distintos, sorprendentemente variados. Y ojo, porque no solamente se trata de sistemas físicos. Después de todo, a los terremotos les podemos poner ecuaciones, a las llamaradas solares también. . . Pero aquí hay sistemas biológicos (poblaciones). Hay sistemas económicos. ¡Frecuencia de nombres, o de palabras! Las leyes de potencia parecen estar en todas partes: en las placas tectónicas, en las llamaradas solares, en la guía telefónica, en “Moby Dick” . . .

- Esto justifica (y con esto terminamos), que Per Bak haya escrito eventualmente un libro titulado “How Nature Works”, cuya portada está ilustrada convenientemente con una foto de dunas en el desierto, recordando el simple modelo de pila de arena que comenzó todo. Un título ambicioso. Pero por lo que hemos visto, Bak tiene un punto: aparentemente, el fenómeno de SOC, y su manifestación visible como distribuciones en leyes de potencia, es transversal a una gran variedad de sistemas en la naturaleza, no sólo del ámbito que uno podría llamar “Física”, sino de muchos otros campos también. El concepto de SOC es central para nuestro entendimiento de lo que llamamos sistemas complejos. Un fenómeno determinado por una determinada interacción local, pero los detalles de la cual no importan mucho, porque un modelo dado, por sencillo que sea, como la pila de arena, da origen a un fenómeno emergente completamente inesperado, a esta respuesta del sistema en todas las escalas. Y aquí hay una universalidad que es fascinante y perturbadora a la vez.

## Clase 8

- Recapitulación sobre ideas claves de un sistema con SOC (driver, disipación, escalas de tiempo, umbral. . .)
- Recapitulación de relación de terremotos con pilas de arena. Ley de Gutenberg-Richter y Omori (explicar el concepto de aftershock), mostrando papers específicos con las leyes de potencia. Son básicamente los únicos resultados bien establecidos sobre terremotos.
- Sistemas económicos, un hecho particularmente robusto en distintas sociedades, culturas, épocas de la historia, egipcios, sociedades industrializadas, no industrializadas. . . En este contexto, se conoce como ley de Pareto. Paper ejemplo: ingreso en Estados Unidos e Inglaterra.

- Otro ejemplo de riqueza, nuestro paper (sin decir que es nuestro), y los ajustes a la distribución de riqueza mundial, y la de los multimillonarios.
- Paper experimental: avalanchas en gotas de agua. Explicar brevemente experimento, mostrar leyes de potencia.
- Recapitulación de profundidad en la ubicuidad de leyes de potencia, con paper de von Neumann.
- Mostrar mis resultados de serie de tiempo y CDF de duración de intervenciones en “The Nonlinear Magnetosphere”, mención del ajuste por recta de exponente  $-5/3$ , mención del resultado teórico general de Kolmogorov, con este mismo exponente para turbulencia.
- Hemos dejado muchos tópicos interesantes fuera. Por ejemplo, multifractales. La idea es que, cuando tenemos un fractal, y queremos calcular su dimensión, en un box counting nos interesa solamente si el sitio está ocupado o no, pero no cuántos puntos hay dentro de él. Pero si consideramos cuántas veces es visitada cada celda, entonces esa información se pierde en el box-counting. Lo que uno aprende, es que, al considerar el número de visitas, es posible asociar muchas dimensiones fractales a un conjunto dado de puntos. Es como si hubiera muchos fractales contenidos dentro de uno solo. Por ejemplo, los datos de sismos, las posiciones de sismos en una región dada del planeta, no se distribuyen de acuerdo a un fractal único, sino que forman un conjunto multifractal.
- Óptica No Lineal
- Educar es mentir, y a uno siempre le han enseñado que las ecuaciones de propagación de ondas electromagnéticas son lineales. Esto significa varias cosas: parámetros del medio independientes de la intensidad (índice de refracción, etc.), principio de superposición, frecuencia inalterada al pasar por un medio, ondas no se molestan.
- El láser permitió por primera vez tener intensidades realmente altas (hoy en día se puede llegar a  $10^{15}$  W), mostrando que efectivamente es posible tener efectos no lineales en la propagación de la luz en medios materiales.
- Breve explicación de cómo funciona un laser.

- Modelo de Lorentz. Explicar. El único refinamiento que le hacemos es que la carga electrónica está distribuida en un cascarón esférico.
- Condición de equilibrio. Lo que estamos calculando es la distorsión de una molécula o átomo debida a la presencia de un campo externo. Y lo hacemos a través de este modelo sencillo, que nos da la elongación del resorte.

### Clase 9

- Cálculo de una mejor aproximación, usando el modelo de una nube electrónica. Esto nos permite calcular una corrección no lineal al modelo. (Tuve que estar explicando a cada rato lo que estábamos haciendo, no estuve claro en el desarrollo.)
- Llegamos a una expresión para el campo eléctrico externo dada una elongación del resorte. Pero necesitamos invertir esta relación. Una manera sería resolver esta ecuación cuadrática, expandir a pequeños valores de  $E$ , y proceder. No lo haremos así, sino de un modo más general: Suponer que  $x = \alpha E + \beta E^2$ , pues sabemos que ésa será la forma al final, reemplazamos, mantenemos hasta orden  $E^2$ , y calculamos  $\alpha$  y  $\beta$  igualando coeficientes de los polinomios.
- Encontramos la separación entre las cargas, con ello el momento dipolar, con ello la polarización, en función del campo eléctrico, hasta la primera corrección no lineal.
- Podemos seguir a un orden superior, y obtener una corrección cúbica.
- Si la respuesta del medio no es paralela al campo eléctrico aplicado, es necesario usar tensores.
- Uno espera que haya simetría de inversión: si  $\vec{E}$  cambia de signo, la polarización cambia de signo. Esto lleva a que el término  $E^2$  es nulo, y la corrección no lineal de orden más bajo es la cúbica. Pero hay medios (y eso depende de su estructura cristalina) que no tienen simetría de inversión, y en ese caso la corrección más baja es cuadrática.
- Ahora que tenemos la polarización, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell, y darnos cuenta de que todo lo que hicimos se convierte, al final, en que la ecuación de ondas se modifica con un término no lineal. Ahora basta, en principio, con poner las distintas posibilidades de no linealidad, y revisar los fenómenos que aparecen.

- Medios cuadráticos.
- Generación de armónicos. En el caso más sencillo, ponemos simplemente un campo oscilatorio, y aparece, en el lado derecho de la ecuación de ondas, un término oscilando con frecuencia  $2\omega$ . Los modos de frecuencias distintas no son independientes, como en el caso lineal. Si hacemos una transformada de Fourier, esto significa que la amplitud  $E(2\omega)$  en el lado izquierdo no es nula, sino que es proporcional a  $E(\omega^2)$ : además de la onda original, se ha generado una onda del doble de la frecuencia. (No me gustó la explicación de esta parte.)
- Efecto electroóptico. El siguiente experimento en complejidad es poner, además, un campo eléctrico de fondo. En este caso, aparecen términos del tipo  $E(0)E(\omega)e^{i\omega t}$ , que son proporcionales al campo original, por tanto esos términos se pueden poner a la izquierda en la ecuación de onda, y por tanto habrá una modificación del índice de refracción debido a que el material está inmerso en un campo eléctrico intenso. (Esta parte quedó mal explicada por mi mala idea de explicar “la física” en los últimos 5 minutos de la clase, en vez de rendirme, y de todos modos voy a tener que reexplicarla, junto con la matemática, la segunda clase.)

### Clase 10

- Recapitulación de medios cuadráticos.
- Consideramos  $P_{NL} = \chi^{(2)} E^2$ .
- Si  $E = E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.$ , encontramos que

$$P_{NL} = P_{NL}(0) + P_{NL}(2\omega) ,$$

con

$$\begin{aligned} P_{NL}(0) &= \chi^{(2)} |E(\omega)|^2 , \\ P_{NL}(2\omega) &= \chi^{(2)} [E^2(\omega)e^{2i\omega t} + c.c.] . \end{aligned}$$

- $P_{NL}(0)$  no depende del tiempo, y por tanto no afecta en la ecuación de onda. Cada vez que aparezca un término constante en  $P_{NL}$ , lo ignoraremos pues no tiene influencia en la propagación de ondas electromagnéticas.

- $P_{NL}(2\omega)$  es un término oscilatorio con el doble de la frecuencia. Veamos con calma qué consecuencias tiene. Inicialmente supusimos que  $E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.$ . Esto corresponde a estudiar un único modo de Fourier. Al reemplazar en la ecuación de onda, sin embargo, este término no lineal hace aparecer un término  $e^{2i\omega t}$ . Por lo tanto, la ecuación no está balanceada. Lo estaría, si incluimos a la izquierda de la ecuación de onda términos no sólo  $e^{i\omega t}$ , sino  $e^{2i\omega t}$ . Entonces podríamos igualar coeficientes para las dos frecuencias. Esto significa, entonces, que la aparición de un término como  $P_{NL}(2\omega)$  significa que, además de la onda original, aparece un modo de frecuencia  $2\omega$ , simplemente debido a los efectos no lineales. A esto lo llamamos “generación del segundo armónico”.

Notemos que, al hacer el balance de coeficientes de Fourier, resulta que el modo de frecuencia  $2\omega$  es proporcional a  $E^2(\omega)$ , por ende es claramente un efecto no lineal.

Notemos también que podríamos continuar el argumento, porque si hay términos  $2\omega$  en  $E$ , éstos también hay que incluirlos al lado derecho de la ecuación, en  $P_{NL} \sim E^2$ , y eso haría aparecer términos  $e^{3i\omega t}$  y  $e^{4i\omega t}$ . Lo cual nuevamente nos dice que la expansión está incompleta, y tendríamos que incluir términos  $e^{3i\omega t}$ , por ejemplo, en el lado izquierdo, llegando a la conclusión de que también aparece un modo de frecuencia  $3\omega$ . Todo esto es cierto, pero si hacemos el análisis, nos daremos cuenta de que, así como el modo de frecuencia  $2\omega$  es proporcional a  $E^2(\omega)$ , el de frecuencia  $3\omega$  lo es a  $E^3(\omega)$ , el de frecuencia  $4\omega$  lo es a  $E^4(\omega)$ , etc. Pero si vamos a ser consistentes, tenemos que ignorar estos términos de orden superior, pues para empezar sólo consideramos términos  $E^2$  en la no linealidad de la polarización (éste es un medio cuadrático). Por lo tanto, está bien ignorar estos términos, y sólo aparece hasta el segundo armónico. Si el medio tiene no linealidades de orden mayor, entonces esperamos que haya generación de armónicos de orden superior también.

- Ahora aplicamos un campo eléctrico  $E_0$  antes de propagar la onda. La no linealidad cuadrática hace aparecer términos constantes  $P_{NL}(0)$ , de frecuencia  $\omega$ ,  $P_{NL}(\omega)$ , y de frecuencia  $2\omega$ ,  $P_{NL}(2\omega)$ .

Ya sabemos que el término constante lo podemos ignorar, y que el término  $P_{NL}(2\omega)$  significa que aparece el segundo armónico. Pero notemos que ese término es proporcional a  $E(\omega)^2$ , mientras que  $P_{NL}(\omega) \sim E(\omega)$ . Por tanto, la generación del segundo armónico es un efecto no lineal de orden superior,

y lo ignoramos. Nos quedaremos con el efecto dominante,  $P_{NL}(\omega)$ .

- Por ser proporcional a  $E(\omega)$ , podemos poner dicho término al lado izquierdo de la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{NL}(\omega)}{\partial t^2} \\ &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 2\chi^{(2)} E_0 E}{\partial t^2} , \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2 + 8\pi\chi^{(2)} E_0}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 .$$

Esto significa que podemos definir un índice de refracción efectivo

$$n_{\text{eff}} = (n^2 + 8\pi\chi^{(2)} E_0)^{1/2} \simeq n \left( 1 + \frac{4\pi\chi^{(2)} E_0}{n^2} \right) ,$$

o bien

$$n_{\text{eff}} = n + \Delta n ,$$

con

$$\Delta n = \frac{4\pi\chi^{(2)} E_0}{n} .$$

- Aprendemos, entonces, que las no linealidades tienen dos tipos de consecuencias: los términos con frecuencia  $2\omega$  ( $3\omega$ ,  $4\omega$ , etc., en general) en  $P_{NL}$  son responsables de la aparición de armónicos superiores de la onda original. Los términos con frecuencia  $\omega$ , en cambio, son responsables del cambio del índice de refracción del medio, *debido a la propia onda que se está propagando*. Es decir, la onda modifica el medio a través del cual se está propagando, y esta modificación afecta de vuelta a la onda en sí: un característico efecto no lineal.
- El efecto que acabamos de discutir se llama *efecto electroóptico*, que corresponde simplemente a que un campo eléctrico intenso modifica el índice de refracción de la onda. Observemos que en el régimen lineal hay principio de superposición, y un campo externo debería ser irrelevante para la propagación de una onda. Vemos ahora que no es así. En el caso particular de un medio cuadrático como el estudiado, el efecto electroóptico se llama *efecto Pockels*.

- Mezcla de dos ondas. (Ya sabemos cómo interpretar cada término de  $P_{NL}$ , así que ahora basta con los apuntes.) Notamos, entonces, que aparece una onda de frecuencia  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Si miramos momentum, encontraremos que  $k_3 = k_1 + k_2$ . Recordando que  $\omega$  está relacionada con la energía de una onda, y  $k$  con su momentum, aprendemos que estas relaciones de *phase matching* son, en el fondo, una expresión de la conservación de energía y momentum para las ondas, lo cual es muy razonable. (Para la diferencia también, porque simplemente representa conservación de energía y momentum con los términos en distintos lados de la igualdad.)
- Sin embargo, la situación es un poco más complicada, porque en realidad la relación general para mezcla de ondas es con enteros arbitrarios multiplicando cada frecuencia, lo que tiene relación con la generación de armónicos. Entonces, dadas dos ondas, no sólo se mezclan esas dos para dar origen a una tercera con la suma de sus frecuencias, sino que armónicos de ellas (no necesariamente del mismo orden) se pueden mezclar también para dar origen a un armónico de una tercera onda.
- Medios cúbicos. Suponemos entonces que el medio respeta la simetría de inversión, y por tanto el primer término no lineal de su respuesta óptica es cúbico, no cuadrático.
- Efecto electroóptico. Ponemos  $E = E_0 + E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.$ , y debemos calcular  $E^3$ . Notamos que aparecerán muchos términos, pero que sólo nos interesan, como siempre, las primeras correcciones no lineales en  $E$ . Hay un término constante  $E_0^3$ , que ignoramos, y el siguiente término es  $3E_0^2 E(\omega)e^{i\omega t}$ . Por ser de frecuencia  $\omega$ , significa una corrección al índice de refracción, igual que para medios cuadráticos. Para medios cúbicos, este efecto se llama efecto Kerr electroóptico.
- Si no hay campo eléctrico, vemos que  $E^3$  da origen a términos de frecuencia  $\omega$  y  $3\omega$ . Todos son de orden  $E(\omega)^3$ , así que ninguno puede ser ignorado.
- Los de frecuencia  $\omega$  nos dicen que hay un cambio en el índice de refracción, llamado efecto Kerr óptico. Es análogo al efecto electroóptico, pero acá las no linealidades hacen que, en vez de verse la onda afectada (vía índice de refracción) por la presencia de un campo eléctrico externo, se ve afectada por *su propio* campo eléctrico. Este tipo de autointeracciones son características de un sistema no lineal.

- Los de frecuencia  $3\omega$  nos dicen que, para medios cúbicos, al pasar una onda se genera una nueva onda del triple de la frecuencia, es decir, hay generación del tercer armónico.

### Clase 11

- Autoenfoco. Sabemos que una onda modifica el índice de refracción del medio por el que va pasando. Sabemos que si una onda pasa por índices de refracción variables, su trayectoria se curva (como en los espejismos). Por tanto, una onda intensa podría seguir una trayectoria curva debido a efectos no lineales. Cuantifiquemos eso para una situación sencilla.
- Figura 4.6 (pero yo sacaría la línea horizontal bajo  $n(y)$ , porque  $\theta(y)$  es el ángulo que la onda tiene *mientras* pasa por el medio con índice  $n(y)$ , no antes de pasar por él).
- Encontramos la ecuación para los rayos en la aproximación paraxial. Esto es completamente general (dentro de esta aproximación).
- Para un medio no lineal, el índice cambia de la forma  $n = n_0 + n_2 I$ , y necesitamos conocer la intensidad. Supondremos un perfil de onda Gaussiano, como una aproximación a un haz real. Dentro de la misma aproximación paraxial, encontramos que el rayo satisface una ecuación armónica.
- Resolvemos la ecuación para un material de gran longitud (fibra óptica).
- Para una placa delgada, encontramos  $\tan \theta(L) = -y_0 \beta^2 L$  (signo opuesto a los apuntes, que dice que el rayo converge hacia el eje óptico). Yo haría un dibujo para mostrar que este rayo llega a una distancia  $f$  de la placa, y así la Ec. (4.70) es más clara.
- Lo que ha sucedido es que la onda, debido a los efectos no lineales, modifica el índice de refracción a su alrededor del modo preciso para enfocarse a sí misma al salir de la placa.

### Clase 12

- Solitones. (No me sentí cómodo con la discusión tal como está en los apuntes, entonces la rehice a mi manera. Esto de hacer una T. de Fourier, para luego devolverse, no me parece claro de explicar. Me hubiera gustado, sí,

discutir la aparición de la ecuación NLS en términos de derivadas de la frecuencia respecto a  $k$ , porque me parece más general, pero no logré encajarlo en la discusión que sigue. Para mejorar en el futuro.)

- Partimos notando que, si los efectos no lineales modifican el índice de refracción, podemos escribir la ecuación de onda en la forma

$$\nabla^2 E - \frac{n_{\text{eff}}^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

con

$$n_{\text{eff}} = n_0 + n_2 I = n_0 + n_2 \alpha |E|^2, \quad (2)$$

con  $\alpha$  cierta constante de proporcionalidad.

Escribamos el campo en la forma

$$E(z, t) = A(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (3)$$

La idea es tener una onda de frecuencia  $\omega_0$  (solución del sistema lineal), pero cuya amplitud varía. Suponemos entonces que los efectos no lineales se traducen en una variación de la amplitud (veremos que efectivamente es así).

La ecuación queda

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} i k_0 - A k_0^2 - \frac{1}{c^2} (n_0^2 + 2 n_0 n_2 \alpha |A|^2) \left( \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + -2 i \omega_0 \frac{\partial A}{\partial t} - \omega_0^2 A \right) = 0. \quad (4)$$

Para decir que efectivamente (3) es una onda de frecuencia  $\omega_0$  con una amplitud que varía, necesitamos que  $A(z, t)$  varíe lentamente. En particular, diremos que la escala de longitud en la que  $A(z, t)$  varía es mucho menor que la longitud de onda  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ . Estamos entonces hablando de una modulación lenta de la amplitud, debida a los efectos no lineales:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z} k_0$$

La variación temporal también diremos que es lenta, pero en este caso despreciaremos los términos

$$|A|^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \quad |A|^2 \frac{\partial A}{\partial t},$$

pensando que son el producto de dos factores pequeños,  $|A|^2$  y las derivadas temporales.

La ecuación queda:

$$2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + 2i\omega_0 \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \left( -k_0^2 + \frac{n_0^2 \omega_0^2}{c^2} + \frac{2n_0 n_2 \alpha \omega_0^2}{c^2} |A|^2 \right) A = 0 . \quad (5)$$

La onda lineal debe satisfacer la relación de dispersión

$$\omega_0 = \frac{ck_0}{n_0} .$$

Reescribimos:

$$i \left( \frac{\partial}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) A - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \beta_0 |A|^2 A = 0 , \quad (6)$$

con

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{n_0 n_2 \alpha \omega_0^2}{c^2 k_0} = \frac{n_2 k_0 \alpha}{n_0} , \\ \beta_1 &= \frac{\omega_0 n_0^2}{c^2 k_0} = \frac{n_0}{c} , \\ \beta_2 &= \frac{n_0^2}{c^2 k_0} . \end{aligned}$$

Observamos que  $\beta_1$  tiene unidades de velocidad. De hecho, es la velocidad de fase de la onda lineal original. Esto sugiere, al ver el término entre paréntesis  $(\partial_z + \beta_1 \partial_t)$ , que hay “algo” que se está propagando con velocidad  $1/\beta_1$ . Siguiendo esa idea, haremos el cambio de variables

$$\tau = t - \beta_1 z ,$$

y definimos

$$A(z, t) = A_S(z, \tau) .$$

Lo que estamos haciendo es decir que la amplitud de la envolvente de la onda se propaga con velocidad  $1/\beta_1$ , y ahora encontraremos la ecuación para dicha amplitud en el sistema de referencia comóvil con ella.

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial z} &= \frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial A_S}{\partial \tau} = \frac{\partial A_S}{\partial z} - \beta_1 \frac{\partial A_S}{\partial \tau} , \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial \tau} .\end{aligned}$$

Observamos que esto tiene precisamente el efecto de simplificar el término entre paréntesis en (6), y la ecuación finalmente queda

$$i \frac{\partial A_S}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A_S}{\partial \tau^2} - \beta_0 |A_S|^2 A_S . \quad (7)$$

La ecuación (7) se conoce como la *ecuación de Schrödinger no lineal* (NLS, Nonlinear Schrödinger Equation). En efecto, tiene la forma de una ecuación de Schrödinger (con las definiciones  $z \rightarrow t$ ,  $\tau \rightarrow x$ ), pero con un potencial que depende de la solución,  $V = -\beta_0 |A_S|^2$ . En esta dependencia del potencial con la propia solución de la ecuación reside la no linealidad de la ecuación.

La solución de esta ecuación, con condiciones de borde nulas en infinito (es decir, un estado localizado) es

$$A_S(z, \tau) = A_S^0 e^{ikz} \operatorname{sech} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) . \quad (8)$$

Al reemplazar en (7), se encuentra que (8) es solución si

$$\tau_0^2 = -\frac{\beta_2}{\beta_0 (A_S^0)^2} , \quad k = \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\tau_0^2} = -\frac{1}{2} \beta_0 (A_S^0)^2 . \quad (9)$$

Hemos encontrado entonces que, debido a los efectos no lineales, la amplitud de la onda varía de modo que su envolvente tiene la forma de una secante hiperbólica, y ese perfil se propaga con velocidad  $1/\beta_1$ . Sorprendentemente, los fenómenos no lineales se encargan de balancearse de tal modo, que dan origen a una solución con un perfil determinado que se propaga *sin deformarse*. Esto es, de algún modo, similar a las soluciones que conocíamos para ondas *lineales*. Pero además, el ancho de este perfil (relacionado con la constante  $\tau_0$ , y su velocidad de propagación (relacionada con la constante  $k$ ), dependen de su amplitud, lo cual ciertamente es un efecto no lineal.

La solución que acabamos de encontrar recibe el nombre de “solitón”. Es, en varios sentidos, similar a una partícula, como sugiere la terminación “-on”: es un estado localizado, tiene una energía definida, una velocidad definida, y se desplaza sin deformarse. Sin embargo, también tiene características de onda: cuando dos solitones se encuentran, al alejarse después de la “colisión” continúan igual que al principio, como si no se hubieran encontrado nunca.

- Se muestran animaciones de solitones tomadas de la web. Son de KdV, lo cual da la oportunidad de hablar de esta ecuación y de la tarea.
- La ecuación NLS es sólo una de muchas ecuaciones que tienen soluciones solitónicas. Otra, la primera de hecho es la ecuación Korteweg-de Vries (KdV).
- Reseña histórica de la primera observación de solitones.
- Ecuaciones de fluido en aguas poco profundas, dan origen a ecuación KdV.
- En este caso, los solitones son la perturbación en sí, no la envolvente.
- Tips sobre la tarea 4, problema numérico sobre solitones: explicar bien el propósito, concentrarse en el problema de la integración numérica, ideas para la tercera derivada espacial.

### **Clase 13**

- Comentarios rápidos sobre temas no abordados de Óptica No Lineal.
- Hay más ecuaciones solitónicas: NLS, KdV, Sine-Gordon.
- Hay más soluciones solitónicas que los solitones que vimos, que corresponden a las soluciones localizadas, es decir, con condiciones de borde nulas en infinito. Hay soluciones que toman valores distintos en  $\pm\infty$ : kinks y antikinks. Y tienen las mismas propiedades: se propagan a velocidad constante, y cuando se cruzan no pierden su identidad. Pero no son localizadas no más.
- Mario Molina y Rodrigo Vicencio trabajan en sistemas ópticos *discretos*, y en ese caso uno tiene una cadena unidimensional de sitios, por ejemplo,

y la ecuación que rige la dinámica es una ecuación similar a la NLS, pero discreta: DNLS. Y uno puede investigar qué sucede si hay impurezas, qué sucede si hay desorden (los sitios están equiespaciados), etc.

- Física de Partículas.
- Ha sido un largo y bello proceso en búsqueda de la simplicidad de la Física. Hoy en día se tiene un cuadro bastante preciso sobre cómo está construido el Universo, y que además es muy sencillo: el Modelo Estándar.
- Sólo 16 partículas y 4 interacciones entre ellas, es todo lo que se necesita para describir completamente el Universo. Si eso no es sencillez, ¿qué lo es?
- Nuestro objetivo en esta parte del curso será entender los conceptos y un poco de la matemática que hay detrás de esta descripción.
- Inicialmente, la gente se dio cuenta de que la materia estaba compuesta por partículas elementales:  $p$ ,  $n$ ,  $e^-$ ,  $\gamma$ .
- Todo bien, hasta que se descubrió el decaimiento beta. Las ecuaciones de conservación de energía y momentum predicen que el electrón tiene una energía definida, y no es lo que se observa experimentalmente, sino que se observa un rango de valores posibles para la energía del electrón, hasta un cierto valor máximo. Fermi introduce, para salvar las leyes de conservación, la idea osada de una partícula aún no descubierta, *sin carga y sin masa*, a la que llamó *neutrino*. Suponiendo eso, las leyes de conservación dan precisamente el espectro de energías medido para el electrón. Eventualmente, el neutrino fue descubierto.
- Esto es análogo al poder predictivo de las leyes de Newton (cometa Halley, descubrimiento de Urano). Uno es capaz, en aras de salvar ciertas leyes físicas (la ley de Gravitación Universal, o las leyes de conservación de energía y momentum), de inventar objetos aún no descubiertos (un planeta, una partícula), y lo impresionante es que eventualmente los experimentos muestran que ese objeto efectivamente existe.
- Luego otras, muchas otras partículas fueron descubiertas, y todo pareció ser un desorden, y eventualmente se pudo poner todo esto en orden nuevamente, y volver a entender el universo en términos de unas pocas

partículas y unas pocas interacciones. Todo, guiados por el prejuicio de que la Física debe ser sencilla.

- Las 4 interacciones elementales: gravitación, electromagnética, fuerte, débil. Intensidades relativas.
- La razón por la cual la interacción más débil de todas, la gravitacional, domina a grandes escalas, es porque es siempre atractiva. La electromagnética, en cambio, se apantalla, porque los cuerpos están compuestos de cargas positivas y negativas, y lo único que ve una estrella de otra es que tiene masa, no carga.
- Las partículas, por su parte, tienen ciertas propiedades elementales que las describen.
- Masa: la propiedad que les permite interactuar gravitacionalmente. Hay un solo “tipo” de masa, y por tanto la interacción gravitacional es siempre atractiva.
- Carga: la propiedad que les permite interactuar electromagnéticamente. Hay dos tipos, positiva y negativa, y por tanto la interacción puede ser repulsiva o atractiva.
- Spin: una propiedad que les permite interactuar con campos magnéticos externos.
- La idea es sencilla: una esfera cargada, rotando, tiene asociado un momento magnético, que le permite interactuar con un campo magnético externo. Del mismo modo, uno puede imaginarse que las partículas son esferitas rotando, y el momento magnético asociado es su “spin”. Aunque no es cierto que las partículas sean esferas rotando, uno puede quedarse con la idea de que el spin es una flechita pegada a la partícula, y que le permite interactuar con campos magnéticos.
- Stern-Gerlach: sólo dos valores para el spin de los electrones. Otras partículas pueden tener 3, 5, etc.
- Eventualmente, la gente se dio cuenta de que las partículas sólo pueden tener spin entero o semi-entero.

- Las partículas con spin semi-entero, como los electrones, protones, neutrones, se llaman fermiones. Con spin entero (fotones), se llaman bosones.
- Uno puede entender cómo interactúa una partícula con spin en un campo magnético, usando la MQ, pero la MQ tradicional no explica por qué las partículas tienen spin. Y el problema es el siguiente: la MQ tradicional se basa en la ecuación de Schrödinger, que proviene de suponer un Hamiltoniano  $p^2/2m + V(x)$ . . . ¡no relativista! ¿Podrá uno hacer una teoría cuántica, pero a partir de un Hamiltoniano *relativista*? La respuesta es sí, y la encontró Dirac. Y la ecuación que rige esta MQ relativista no es, obviamente, la de Schrödinger, sino la ecuación de . . . Dirac. Y esta ecuación de Dirac, *predice* el spin. Moraleja: el spin es un efecto puramente cuántico, y relativista. Además, la ecuación de Dirac *predice* que existen las antipartículas. Por lo tanto, las antipartículas son también un efecto cuántico y relativista.
- Por otro lado, se sabe, experimentalmente, que los fermiones satisfacen el principio de exclusión de Pauli: dos electrones no pueden estar en el mismo estado. Si tienen la misma energía, y el mismo spin, no pueden estar en el mismo lugar. El único modo de que estén en el mismo estado es que se ponga otro con spin opuesto. Por eso los electrones ocupan distintos orbitales en un átomo: uno tiene un electrón (el hidrógeno), y lo pone en el primer orbital. Después agrega otro (el helio), y lo pone en el mismo orbital, pero con el spin opuesto. Pero para poner un tercero (litio), ya hay que ocupar un orbital superior. Y así sucesivamente. No pueden estar todos los electrones en el orbital de menor energía, que es lo que les gustaría si no tuvieran spin. Y por tanto toda la Química, y la estructura de la materia al final, se debe a que los electrones son fermiones y cumplen el principio de exclusión de Pauli.
- Por su parte, los bosones se comportan totalmente diferentes: puede estar todos en el mismo estado, sin restricciones. Eso significa que, a baja temperatura, todos los bosones querrán estar en el mismo estado, en el estado de mínima energía. En algún momento, bajo cierta temperatura crítica, todo el sistema de bosones colapsará y uno tendrá una bola macroscópica de bosones, todos en el estado fundamental. Ésa es la condensación de Bose-Einstein.
- La relación entre ser fermión/bosón, y el comportamiento de ambos, se

puede demostrar, y eso es el teorema de spin-estadística.

### Clase 14

- De manera ingenua, uno puede clasificar las partículas de acuerdo a su masa:

a) Bosones sin masa ( $g, \gamma$ ).

b) Leptones (fermiones) (partículas livianas):

$$\begin{array}{ccc} e^- & \mu & \tau \\ \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{array}$$

Tres familias de leptones.

c) Mesones (bosones) (partículas de masa intermedia):  $\pi^{+,0,-}, K^{+,0}, \eta^0$ .

d) Bariones (fermiones) (partículas pesadas):  $p, n, \Lambda^0, \Sigma^{+,0,-}, \Xi^{0,-}, \Omega^-$ .

- Mesones y bariones reciben el nombre colectivo de hadrones.
- El cuadro final, entonces, es que tenemos por un lado los bosones sin masa, luego los leptones (que son insensibles a la interacción fuerte), y finalmente los hadrones (que están sometidos a las cuatro interacciones).
- Además de los hadrones mencionados hay muchos más, y en realidad por un momento el Universo, que parecía sencillo, compuesto de unas pocas partículas ( $e^-, p, n, \gamma$ ), empezó a poblarse de una gran diversidad de ellas, sin ningún orden aparente. Eventualmente la gente encontró una manera de volver a describir esto de manera sencilla.
- En el cuadro actual, los hadrones están constituidos por partículas llamadas quarks. Hay 6 quarks:

$$\begin{array}{ccc} u \text{ (up)} & c \text{ (charm)} & t \text{ (top)} \\ d \text{ (down)} & s \text{ (strange)} & b \text{ (bottom)} \end{array}$$

Bellamente, al igual que los leptones, vienen en tres familias. (Comentar que están ordenados por masa.)

- Así que el cuadro ahora es muy simple: tres familias de leptones, y tres familias de quarks. Éstos son los constituyentes de toda la materia.

- Mesones:  $q\bar{q}$ . Bariones:  $qqq$ . Todo tiene sentido, porque dos quarks deben ser más livianos que tres, por eso los mesones son más livianos que los bariones.
- Comentario sobre el origen de la palabra “quark”.
- El anterior es más o menos el cuadro general sobre las partículas existentes. Pero las partículas interactúan, tienen colisiones, tienen decaimientos. Y cada vez que una interacción ocurre, ciertas reglas tienen que cumplirse. En particular, hay ciertas cantidades físicas que deben conservarse.
- Leyes de conservación. Uno conoce algunas: energía, momentum, momento angular, carga.
- Del T. de Noether, uno sabe que cada una debe estar asociada a alguna invariancia del Lagrangiano o el Hamiltoniano. Respectivamente: traslaciones temporales, espaciales, rotaciones e... ¡invariancia de gauge!
- Lo último es particularmente interesante, porque en Electromagnetismo, para uno era una anécdota que al vector potencial uno podía agregarle un gradiente, y el campo magnético queda igual. Pero sucede que ahora, desde el punto de vista de un Lagrangiano, esta “invariancia de gauge” de las Ecuaciones de Maxwell se convierte en una simetría del Lagrangiano correspondiente, y esa simetría *debe* tener asociada una cantidad conservada, que es *justamente* la familiar carga eléctrica. Ahora, de repente, un hecho tan familiar como la conservación de la carga, tiene que ver con un hecho que, hace un par de años, en Electromagnetismo, parecía una anécdota. La invariancia de gauge, de hecho, es central, y no sólo para la Electrodinámica, sino para todas las otras interacciones... Pero más de eso más tarde.
- Otras cantidades conservadas: número leptónico.  $\mathcal{L} = 1$  para leptones,  $-1$  para antileptones,  $0$  para no leptones.
- Ejemplo:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

$\mathcal{L} = 0 = 1 + (-1)$ . Proceso permitido, la conversión de un fotón en un par electrón-positron.

$$\gamma \rightarrow e^- + p$$

Uno podría pensar en que es posible, porque se conserva la carga, pero  $\mathcal{L} = 0$  inicialmente, y  $\mathcal{L} = 1$  al final, luego no es posible. Y de hecho, no se observa.

En el fondo, se trata de contar el número de leptones, restar el de antileptones, y eso tiene que conservarse.

- Número bariónico.  $b = 1$  para bariones,  $-1$  para antibariones,  $0$  para no bariones. En los mismos procesos anteriores, el número bariónico se conserva en el primer decaimiento, y no en el segundo, consistente con el hecho de que uno se observa y el otro no.

En el fondo, se trata de contar el número de bariones, restar el de antibariones, y eso tiene que conservarse.

- Spín isotópico (o spín isobárico, o isospín).
- Consideramos sólo partículas con interacción fuerte (hadrones). Observemos las masas de algunos de ellos: piones, eta, protón y neutrón.
- Si se ordenan por masa, se puede observar que se pueden agrupar claramente en grupos con masas muy parecidas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Singletes} & : \eta^0, \Omega^-, \Lambda^0. \\ \text{Dobletes} & : (p, n), (K^+, K^0), (\Xi^0, \Xi^-). \\ \text{Tripletes} & : (\pi^+, \pi^-, \pi^0), (\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0). \end{aligned}$$

- Decimos que una partícula tiene spín isotópico  $\tau$ , si está en un multiplete de masa con  $2\tau + 1$  partículas. Vemos, entonces, que  $\tau$  puede tener valores  $0, 1/2, 1, \dots$ . En particular,  $\tau_{\eta^0} = 0$ ,  $\tau_p = \tau_n = 1/2$  y  $\tau_\pi = 1$ .
- (Lo anterior, y todo lo que sigue sobre spín isotópico, sonará muy esotérico, aunque en unos meses más, cuando vean spín en Mecánica Cuántica, debería ser completamente evidente que ésta es la manera de hacerlo.)
- Podemos imaginar el spín isotópico como un vector de cierta longitud, y que tiene  $2\tau + 1$  proyecciones respecto a un eje “z”, donde cada orientación corresponde a una partícula del multiplete. Estas proyecciones  $\tau_z$  toman valores entre  $-\tau$  y  $\tau$ , que difieren en 1:  $-\tau, -\tau + 1, \dots, \tau - 1, \tau$ .

- Para  $\tau = 0$  existe sólo una orientación posible (el vector tiene longitud 0), y por tanto hay una sola partícula en el multiplete. Ej.:  $\eta^0$ .
- Para  $\tau = 1/2$  hay dos orientaciones posibles (dibujo), que corresponden a  $\tau_z = -1/2$  y  $\tau_z = 1/2$ . Luego, para  $\tau = 1/2$  hay dos partículas posibles. Por convención, asignamos los  $\tau_z$  en orden creciente de carga. Por ejemplo, para el doblete  $(p, n)$ , asignamos  $\tau_z^n = -1/2$ , y  $\tau_z^p = 1/2$ .
- Para  $\tau = 1$  hay tres orientaciones posibles (dibujo), que corresponden a  $\tau_z = -1, 0, 1$ . Usando la convención anterior, y notando que los piones forman un triplete, asignamos  $\tau_z^{\pi^-} = -1$ ,  $\tau_z^{\pi^0} = 0$ ,  $\tau_z^{\pi^+} = 1$ .
- Suma de spín isotópico.
- Dadas dos partículas de isospín  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , el isospín total del sistema,  $\tau$ , puede ser cualquiera de los siguientes valores, entre  $|\tau_1 - \tau_2|$  y  $\tau_1 + \tau_2$ , inclusive:

$$|\tau_1 - \tau_2|, |\tau_1 - \tau_2| + 1, \dots, (\tau_1 + \tau_2) - 1, \tau_1 + \tau_2 .$$

- Las proyecciones en el eje  $z$ , en tanto, se suman aritméticamente, como siempre.
- Ejemplo:  $p + p$ .

*Paso 1:* Cada protón tiene  $\tau_1 = \tau_2 = 1/2$ , luego los valores posibles de  $\tau$  son:

$$\tau = 0, 1 .$$

*Paso 2:* Por otra parte, cada protón tiene  $\tau_{z1} = \tau_{z2} = 1/2$ , luego

$$\tau_z = 1 .$$

*Paso 3:* Ahora revisamos las posibilidades para  $\tau$ , y notamos cuáles son las posibilidades de  $\tau_z$  para cada una:

- Si  $\tau = 0$ , entonces  $\tau_z = 0$ .
- Si  $\tau = 1$ , entonces  $\tau_z = -1, 0, 1$

De lo anterior se sigue que, la única manera de que todo calce, es que  $\tau = 1$  (es el único que permite que  $\tau_z = 1$ ).

- Todo esto suena complicado, pero vemos que hay una manera sistemática de proceder.
- Bueno, esto tan exótico que es el spín isotópico, se conserva también. En realidad, no siempre, y aquí uno se da cuenta que hay que empezar a tener cuidado, porque no todo es tan fácil como antes. Algunas leyes de conservación pueden no cumplirse a veces.
- En particular, el spín isotópico total se conserva en interacciones fuertes. No necesariamente en interacciones débiles o electromagnéticas.
- $\tau_z$  se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas, no necesariamente en interacciones débiles.

### Clase 15

- Ejemplo:  $p + n$ .
- Como en el ejemplo anterior,  $\tau_1 = \tau_p = 1/2$ , y  $\tau_2 = \tau_n = 1/2$ , de modo que el isospín total es  $\tau = 0, 1$ .
- Pero ahora,  $\tau_{nz} = -1/2$ , luego  $\tau_z = \tau_{pz} + \tau_{nz} = 0$ .
- Revisando ahora las posibilidades para  $\tau$ , notamos que  $\tau = 0$  implica  $\tau_z = 0$ , y  $\tau = 1$  implica  $\tau_z = -1, 0, 1$ . Ambas posibilidades contienen al verdadero  $\tau_z = 0$ , luego, en este caso, no podemos decir nada más: el isospín total puede ser  $\tau = 0$  ó  $\tau = 1$ , y su proyección en  $z$  es  $\tau_z = 0$ .
- Nos queda aún otra cantidad conservada: la *extrañeza*  $\mathcal{S}$ . Para definirla, diremos que la carga eléctrica de una partícula se puede escribir de la siguiente manera:

$$q = e \left( \tau_z + \frac{b}{2} + \frac{\mathcal{S}}{2} \right) ,$$

donde  $e$  es la carga del electrón.

- Ejemplo:  $\pi^- + p \rightarrow n + \Lambda^0$ .
- Despejamos  $\mathcal{S}$  de la expresión anterior:

$$\mathcal{S} = 2 \left( \frac{q}{e} - \tau_z - \frac{b}{2} \right) .$$

- $\pi^-$ : Sabemos que  $\tau_z = -1$  (es la partícula de menor carga en un triplete de masa),  $b = 0$  (no es un barión, sino un mesón), y su carga es  $q/e = -1$ , de modo que  $\mathcal{S}_{\pi^-} = 0$ .
- $p$ : En este caso,  $q/e = 1$ ,  $\tau_z = 1/2$  (es la partícula de mayor carga en un doblete de masa),  $b = 1$  (es un barión). Luego  $\mathcal{S}_p = 0$ .
- $n$ :  $q/e = 0$ ,  $\tau_z = -1/2$  (la partícula de menor carga en un doblete de masa),  $b = 1$ . Luego  $\mathcal{S}_n = 0$ .
- $\Lambda_0$ :  $q/e = 0$  (como sugiere su supraíndice),  $\tau_z = 0$  (la única partícula en un singlete de masa),  $b = 1$  (es un barión). Luego  $\mathcal{S}_{\Lambda^0} = -1$ .
- Entonces la extrañeza total en el decaimiento es  $\mathcal{S}_{\text{inicial}} = 0$ , y la final  $\mathcal{S}_{\text{final}} = -1$ . La extrañeza no se conserva.
- Sin embargo, el decaimiento anterior *es posible*. La razón: la extrañeza se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas. En interacciones débiles no necesariamente se conserva, pero se permiten cambios de extrañeza  $\Delta\mathcal{S} = \pm 1$ . Así que la reacción anterior es posible, si es a través de interacciones débiles.
- Notemos, en todo caso, que el número bariónico no se conserva tampoco.
- Como hemos visto, las interacciones débiles rompen varias de las conservaciones. Esto está relacionado con el hecho de que sean débiles, y con el hecho de que están mediadas por partículas con masa. (Más de esto, cuando hablemos de las interacciones, que no hemos hecho en detalle hasta ahora.)
- Con todas las leyes de conservación anteriores nos sentiremos contentos por ahora. Serán suficientes para analizar la posibilidad o no de un determinado decaimiento.
- No son las únicas. Hay una en particular muy importante, la simetría CPT. C significa Conjugación de Carga: cambiarlas de signo; P significa Paridad: cambiar, en la función de onda, el signo de la coordenada de posición; T significa Inversión Temporal: invertir el sentido del tiempo. La simetría CPT significa que una teoría física es invariante si se realizan estas tres transformaciones. En otras palabras, nuestro universo, y un universo en que todas las cargas cambian de signo (es decir, cambiando materia por

antimateria), las posiciones se invierten respecto a algún plano imaginario, y el tiempo se invierte, evolucionarían del mismo modo.

- A pesar de que no profundizaremos en lo anterior, nos interesa destacar el proceso de paridad, que será útil en lo que sigue. Paridad es una propiedad de la función de onda de la partícula, y puede ser positiva (si la función de onda no cambia de signo al invertir el espacio), negativa (si cambia de signo), o no tener paridad definida (si no ocurre nada de lo anterior).
- Por ejemplo,  $p$  y  $n$ . Nosotros habíamos dicho que, como tiene esencialmente la misma masa, podríamos hacer la adivinanza de que son en realidad la misma partícula, y que sólo porque hay interacción electromagnética se pueden distinguir y tienen distinta masa. Pero esta idea es aún más fuerte, porque no sólo tienen igual masa (esencialmente), sino también (ver tabla) igual spin ( $1/2$ ) e igual paridad (positiva). Todo esto sugiere de verdad que en realidad, la única razón por la cual son partículas distintas es porque existe la interacción electromagnética. Pues bien, llevemos estas ideas al extremo, y veamos adónde nos dejan.
- Para ello, primero debemos definir un nuevo concepto, la *hipercarga*:

$$Y = b + \mathcal{S} .$$

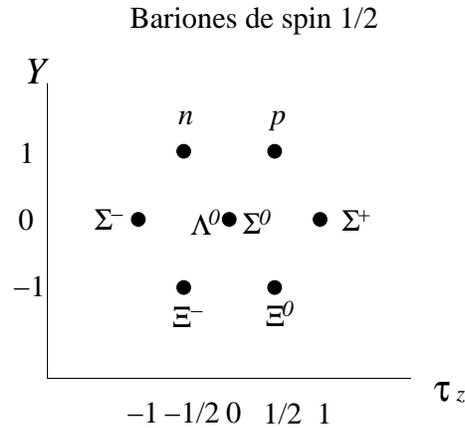
(En realidad,  $Y = b + \mathcal{S} + C + B' + T$ , donde  $C$  es el encanto (*charm*),  $B'$  la *bottomness* y  $T$  la *topness*) de la partícula, pero para todas las partículas que vamos a examinar,  $C = B' = T = 0$ , y no necesitamos discutir esto de momento.)

- La hipercarga se conserva, al igual que  $b$  y  $\mathcal{S}$ , en interacciones fuertes.
- Con ello,

$$q = e \left( \tau_z + \frac{Y}{2} \right) .$$

- Tenemos suficiente información para calcular la hipercarga de todas las partículas. Por ejemplo, para el protón y el neutrón,  $Y = 1 + 0 = 1$ .
- Ahora vamos a graficar las distintas partículas que conocemos en diagramas  $Y$  versus  $\tau_z$  (conocidos como *diagramas de peso*).

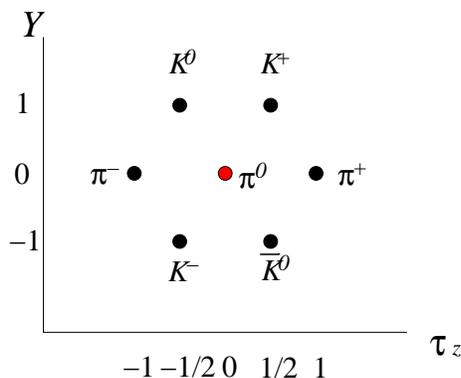
- Notemos (ver tabla) que los 8 bariones más pesados [desde el doblete ( $p, n$ ) al doblete ( $\Xi^-, \Xi^0$ )] tienen igual spin ( $1/2$ ) e igual paridad (positiva), lo cual sugiere que todos pertenecen a un mismo grupo, a un mismo multiplete. Grafiquémoslos:



(Es mejor ver estos gráficos en Xfig, porque ahí se puede poner una grilla para visualizar mejor las distancias entre partículas. En la versión actual, no hemos dibujado la grilla en el dibujo y no se ven en el PostScript, por lo tanto.)

- Esto *no puede ser casualidad*: los 8 bariones más pesados se distribuyen bellamente en un hexágono. Para ser más precisos, en los vértices de triángulos todos iguales entre sí (de base 1 y altura 1), que a su vez forman un hexágono. Esto es extraordinariamente sugerente, y nos dice que quizás hay algo profundo en lo que estamos haciendo.
- Dado el éxito anterior, veamos si podemos hacer lo mismo con otros grupos de partículas. Tomemos los mesones de spin 0, desde el triplete de piones hasta los kaones, todos los cuales tienen paridad negativa. ¿Tendremos suerte esta vez?:

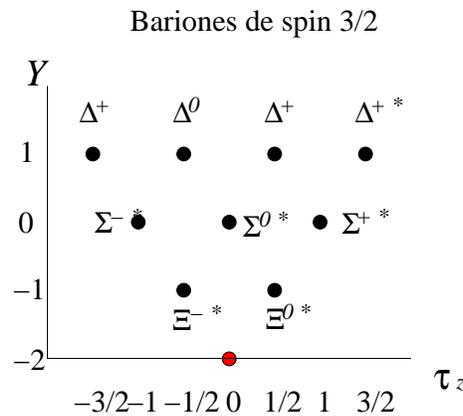
### Mesones de spin 0



- Bueno, realmente impresionante. Exactamente *el mismo hexágono*, con partículas en cada uno de sus vértices. Esto debería convencernos de que lo que estamos haciendo tiene sentido. Bueno, salvo por un detalle: en el hexágono anterior, teníamos 8 partículas, pero aquí hemos logrado colocar sólo 7. (Por eso el vértice central está marcado de rojo, porque ahí nos falta una partícula comparada con la figura anterior.) Pero hemos llegado tan lejos, es tan no trivial que se forme en ambos casos un hexágono exactamente igual tomando grupos de partículas distintas, que uno realmente se sentiría tentado a pensar que la Naturaleza no nos puede engañar tanto, y que, bueno, quizás *existe* una partícula adicional, que nunca hemos visto, y que debería ocupar el lugar faltante. De hecho, podemos decir muchas cosas sobre ella, porque sabemos que, si tenemos razón, debería estar al centro. Por lo tanto,  $\tau_z = 0$  e  $Y = 0$ . Lo cual dice que  $q = 0$ , o sea, una partícula neutra. Además debería ser un mesón, de spin 0 y paridad negativa, como todas las otras partículas ya ubicadas en el hexágono. Por último, como es una única partícula faltante, debería pertenecer a un singlete de masa, es decir, no debería haber ninguna otra partícula con masa parecida a ella. Sabemos *muchas* cosas, 7 características de ella de hecho, sin haberla visto antes, sólo intuyendo que la Naturaleza no nos puede estar engañando tanto y que todo tiene que ser lindo. Bueno, este fue precisamente el razonamiento de Gell-Mann y Nishijima, que en 1968 predijeron la existencia de una nueva partícula, con las características mencionadas. Y lo más perturbador de todo es que... ¡existe! Fue descubierta en 1972, y recibió el nombre de partícula  $\eta$ .
- Lo anterior es un ejemplo exactamente equivalente a la predicción de Halley

de que un cometa volvería en 76 años; a la predicción de que Neptuno debía existir, a partir de las anomalías en la órbita de Urano; a la predicción de Fermi de que el neutrino debía existir, a partir de la no conservación del momentum en el decaimiento beta. Es decir, si tenemos real fe en las leyes de la Física que conocemos, si somos realmente coherentes con eso, entonces deberíamos ser capaces de predecir la existencia de planetas y partículas, y decir exactamente cómo son y qué hacer para observarlos.

- Ya con tanto éxito a cuestas, sigamos. Veamos los bariones de spin 3/2:

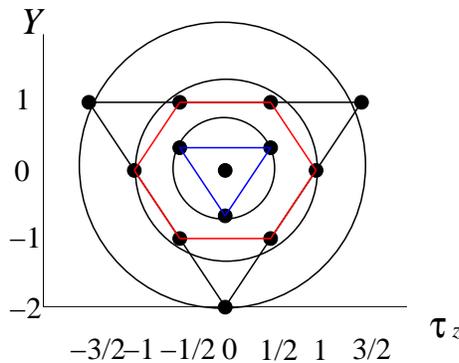


- Bueno, no es lo mismo. Pero no es un desorden. De hecho es algo bonito, un triángulo. Formado por los mismos triángulos elementales que constituían los hexágonos anteriores. Casi. Porque falta el vértice inferior, donde no tenemos ninguna partícula. Pero, igual que antes, sería demasiada mala suerte que se formara una figura tan bonita, y justo faltara un punto. No puede ser. Debería haber una partícula ahí también. Con  $\tau_z = 0$ ,  $Y = -2$ ,  $b = 1$  (es un barión),  $S = -2 - 1 = -3$ ,  $q/e = \tau_z + Y/2 = -1$  (partícula cargada negativamente).

Uno puede incluso estimar la masa. Para ello, notamos que las masas de la fila superior, con los bariones  $\Delta$ , y las de la fila del centro, de los bariones  $\Sigma$ , difieren aproximadamente en  $m_\Sigma - m_\Delta \sim 145$  MeV; y la fila del centro y la inferior difieren aproximadamente en  $m_\Xi - m_\Sigma \sim 147$  MeV. Por lo tanto, uno adivina que la diferencia de masa entre la partícula desconocida y los bariones  $\Xi$  debería ser de unos 145 MeV. Pero  $m_{\Xi^*} = 1528$  MeV, luego la masa de la partícula desconocida debería ser  $m = 1528 + 145 \sim 1673$  MeV.

¿Será posible que estemos en lo correcto nuevamente? Bueno, esta partícula fue predicha en 1961, por Gell-Mann nuevamente, y... ¡existe! Fue descubierta en 1964, y fue llamada  $\Omega^-$ , y su masa es  $m_{\Omega^-} = 1686 \pm 12$  MeV, muy cerca de la predicción.

- Con todos estos éxitos, uno se entusiasma naturalmente. ¿Cuán lejos podremos llegar? Observemos las figuras que hemos obtenido, los hexágonos y el triángulo, y para verlos más claramente dibujémoslos simultáneamente, con algunas líneas auxiliares:



- El hexágono de los bariones de spin  $1/2$  está en rojo, y el triángulo de los bariones de spin  $3/2$  está en negro. Como ayuda visual, hemos dibujado algunos círculos auxiliares. Tanto el hexágono como el triángulo están inscritos en sendos círculos concéntricos. Por otro lado, ya hemos notado que ambos están formados por triángulos elementales, de base  $\Delta\tau_z = 1$  y altura  $\Delta Y = 1$ , tales que hay partículas en cada uno de los vértices de estos triángulos. De alguna forma, el triángulo es el ladrillo fundamental de todas estas partículas. ¿Será posible que podamos tener una figura aún más interna que el hexágono, formada por un único triángulo? Para verlo, trazamos un círculo, concéntrico a los demás, tales que intersecte las abscisas  $\tau_z = \pm 1/2$ . Eso, porque sabemos que las partículas sólo pueden tener spin isotópico entero o semientero, por tanto, si van a existir partículas, deberían estar sobre estas abscisas. Esa condición determina un único círculo posible, y es el que hemos trazado en la figura anterior (esto es importante: los argumentos que hemos dado están bastante restringidos, no hay muchas maneras de extrapolar lo que hemos hecho, y eso es importante para notar que estas especulaciones siguen una línea definida, no una pura casualidad). Marcamos entonces el triángulo inscrito en este círculo

(marcado en azul en la figura), y ponemos “partículas” en cada vértice. Por construcción, las partículas de arriba tendrán spin isotópico  $\pm 1/2$ , y la inferior, 0. Además, como el centro del círculo está en  $Y = \tau_z = 0$ , podemos mostrar que las dos partículas de arriba tendrán  $Y = 1/3$ , y la de abajo  $Y = -2/3$ . Observar que la base de este triángulo mide  $\Delta\tau_z = 1$  y su altura es  $\Delta Y = 1$ , por lo tanto es precisamente un triángulo elemental, como todos los que constituyen el hexágono rojo y el triángulo negro.

Con toda esta información, podemos calcular la carga que tendrían estas partículas, y el resultado es sorprendente. Para la partícula de arriba a la izquierda, por ejemplo:

$$q = e \left( \tau_z + \frac{Y}{2} \right) = e \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{3}e .$$

Bueno, ¿pero no nos habían dicho que la carga del electrón es la carga elemental? ¿Que todas las partículas tienen carga igual a un múltiplo entero de  $e$ ? Ciertamente, estamos yendo demasiado lejos.

Sigamos. Para la partícula de arriba a la derecha,

$$q = e \left( \tau_z + \frac{Y}{2} \right) = e \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3}e .$$

Y para la de abajo:

$$q = e \left( \tau_z + \frac{Y}{2} \right) = e \left( 0 - \frac{2}{6} \right) = -\frac{1}{3}e .$$

- En cuanto a su masa, podemos suponer, por analogía a los resultados anteriores, que los dos quarks de arriba formarán un doblete de masa, es decir tendrán masa parecida, y el de abajo formará un singlete.
- Toda la especulación anterior puede parecer demasiado, pero, una vez más, ¡no nos hemos equivocado! Fue Gell-Mann (quién más), quien predijo la existencia de estas partículas de carga fraccionaria, y los bautizó como *quarks*. Hoy en día, la existencia de los quarks está validada experimentalmente, dando otro gran apoyo al formalismo que hemos ido desarrollando (bueno, que Gell-Mann desarrolló). Gell-Mann nos propone que estos quarks existen, y que son las partículas verdaderamente elementales, que forman a todos los hadrones.

- El modelo de quarks permitió, finalmente, poner orden en el aparentemente caos de tantas partículas descubiertas gracias a los aceleradores de partículas.
- Por ejemplo, con cargas  $2/3$  y  $-1/3$ , no hay muchas maneras de formar partículas de carga  $-1$ ,  $0$  ó  $1$ , que son las que uno ve. Ello lleva a la propuesta de que los hadrones pueden estar formados por dos o tres quarks. Como tres quarks pesan más que dos, entonces las partículas constituidas por dos quarks deberían ser los mesones, y las constituidas por tres quarks deberían ser los bariones.
- Lo anterior, a su vez, sugiere que, como los bariones tienen número bariónico  $1$ , y los mesones, cero, entonces los quarks deberían tener asociado un número bariónico también fraccionario,  $1/3$ . Si eso fuera así, los bariones deberían estar formados por tres quarks ( $b = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$ ), y los mesones por un par quark-antiquark ( $b = 1/3 - 1/3 = 0$ ). Todo calza perfecto.
- Los tres quarks que hemos predicho ahora, corresponden a los quarks *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ), y *strange* ( $s$ ). El protón estaría compuesto por  $uud$ , el neutrón por  $udd$ . En cuanto a los mesones,  $\pi^-$  por ejemplo, sería  $u\bar{d}$ .
- Todo de repente tiene sentido. Por ejemplo, este concepto tan raro que es la extrañeza, ahora se reduce a que una partícula pueda o no tener un quark  $s$ . Obvio. Ni el protón ni el neutrón tienen quark  $s$ , por lo tanto es evidente que su extrañeza es cero. Y que los decaimientos de partículas por interacciones débiles hagan cambiar la extrañeza en  $\pm 1$ , bueno, significa simplemente que se ha agregado o quitado un quark  $s$ .
- En el análisis anterior, nos faltan 3 quarks, pues se han descubierto 6. Los tres predichos,  $u$ ,  $d$  y  $s$ , son los más livianos. Faltan los siguientes,  $c$  (carga  $2e/3$ ),  $t$  (carga  $2e/3$ ) y  $b$  (carga  $-e/3$ ), y los tres forman singletes de masa. Pero por ahora, es suficiente con lo que hemos dicho.
- La próxima clase redondearemos algunas ideas, y conversaremos acerca de las interacciones, de las que no nos hemos preocupado hasta ahora.