Capítulo 5

Trabajo y Energía

Marzo 2003

5.1. Trabajo y energía para movimientos en una dimensión

Consideremos una partícula de masa m, restringida a moverse a lo largo del eje $\hat{z}$, siendo $z(t)$ y $v(t)$ la posición y velocidad de la partícula a medida que transcurre el tiempo. En particular, sean z_i y v_i la posición y velocidad de la partícula en el instante t_i, y z_f y v_f la las mismas magnitudes en el instante t_f. Supongamos además que, a medida que la partícula se traslada, ejercemos sobre ella una fuerza $F(z)$, fuerza que podría depender de la posición z.

Analicemos varios casos:

a) Si la partícula, excepto por la fuerza que le estamos aplicando, es libre, entonces acelerará. Si la fuerza $F(z) = F_0$ es constante (es decir, no depende de la posición), entonces la aceleración también lo será, teniéndose $F_0 = ma_0$. De acuerdo a la cinemática de un objeto uniformemente acelerado, en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, la posición y velocidad de la partícula cambiarán de acuerdo a las relaciones

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) = v(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}a_0\,(\Delta t)^2$$

y

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = a_0\,\Delta t\ .$$

Multipliquemos ahora la primera ecuación por F_0, y usemos, consecutivamente, la segunda ley de Newton y la segunda ecuación. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned}
F_0\,\Delta z &= F_0\,v(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}F_0 a_0\,(\Delta t)^2 \\
&= m\,a_0\,v(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}m\,(a_0\,\Delta t)^2 \\
&= m\,v(t)\,[\,v(t + \Delta t) - v(t)\,] + \frac{1}{2}m\,[\,v(t + \Delta t) - v(t)\,]^2
\end{aligned}$$

$$F_0\,\Delta z = \frac{1}{2}m\,v^2(t+\Delta t) - \frac{1}{2}m\,v^2(t)\ .$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier Δt, en particular para $t = t_i$ y $t + \Delta t = t_f$, en cuyo caso

$$F_0\ \cdot\ (z_f - z_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\ .$$

La combinación $\frac{1}{2}mv^2$ aparece en la mecánica con mucha frecuencia, siendo útil bautizarla y designarla con un símbolo: se le llama *energía cinética* y se suele denotar con la letra K o T. La última ecuación nos indica que el cambio de energía cinética de una partícula libre (excepto por la fuerza que se le está aplicando) es igual al producto de esa fuerza y el desplazamiento que realiza. A este producto (entre la fuerza y el desplazamiento) se le llama *trabajo*; para denotarlo es usual usar la letra W. O sea, tenemos

$$W_{z_i \longrightarrow z_f} = K_f - K_i\ .$$

b) Si la fuerza no es constante, entonces subdividamos la trayectoria de la partícula en N intervalos de tamaño Δz. Denotemos las distintas posiciones por z_1, z_2, z_3, ..., z_N, z_{N+1}, siendo $z_i = z_1$ y $z_f = z_{N+1}$. Si en cada intervalo j la fuerza se mantiene relativamente constante, podemos usar el resultado de la parte a), o sea,

$$W_{z_j \longrightarrow z_{j+1}} = F(z_j)\ \cdot\ (z_{j+1} - z_j) = F(z_j)\ \cdot\ \Delta z = K_{j+1} - K_j\ .$$

Sumando la contribución de todos los intervalos se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} F(z_j)\ \cdot\ \Delta z &= (K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) + (K_4 - K_3) + \cdots + (K_{N+1} - K_N) \\ &= K_{N+1} - K_1\ \ ,\end{aligned}$$

o sea,

$$W_{z_i \longrightarrow z_f} = \sum_{j=1}^{N} F(z_j)\ \cdot\ \Delta z = K_f - K_i\ .$$

La expresión anterior es exacta en el límite $N \longrightarrow \infty$, de modo que el tamaño de los intervalos Δz se torna infinitesimalmente pequeño (en cuyo caso se denota por dz). En ese límite la sumatoria se remplaza por una "S" estilizada (llamada *integral*), teniéndose

$$W_{z_i \longrightarrow z_f} = \int_i^f F(z)\ \cdot\ dz = K_f - K_i\ .$$

c) Supongamos ahora que la partícula no es libre, sino que está inmersa en un campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{z}$. Levantemos la partícula desde z_i hasta z_f, partiendo desde el reposo y volviendo a dejarla en reposo. Elevamos la partícula aplicando una fuerza de manera que ésta suba con una velocidad constante. Mientras la partícula va subiendo, su aceleración es nula, luego también la fuerza neta que actúa sobre ella. De lo anterior se desprende que la fuerza que debemos ejercer para elevar la partícula es $F(z) = +mg$. El trabajo que nosotros realizamos es, por lo tanto,

$$W_{z_i \longrightarrow z_f} = +mg \cdot (z_f - z_i) \ .$$

En este caso, el trabajo realizado por nosotros sobre la partícula no se manifiesta en un cambio de su energía cinética. Lo que cambia es la "potencialidad" de la partícula para realizar trabajo o de adquirir energía cinética.

En efecto, al dejar caer la partícula sin restricciones desde z_f hasta z_i, adquirirá una velocidad que, de acuerdo a las ecuaciones de la cinemática de la caída libre, es $v_f = \sqrt{2g(z_f - z_i)}$. Para esta velocidad, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2g(z_f - z_i) = mgz_f - mgz_i \ ,$$

resultado que coincide con el obtenido mas arriba.

Otra forma en que puede manifestarse esta "potencialidad" de la partícula consiste en hacer que ella realice trabajo, por ejemplo, permitiendo que ella "baje" al punto inicial z_i de manera que, por medio de un sistema de poleas, eleve otra masa.

De acuerdo a lo desarrollado más arriba, también en este ejemplo podemos expresar el trabajo $W_{z_i \longrightarrow z_f}$ como una diferencia de cierta magnitud evaluada en el punto final menos la misma magnitud evaluada en el punto de partida:

$$W_{z_i \longrightarrow z_f} = U(z_f) - U(z_i) \ ,$$

donde la *energía potencial* para la partícula m en el campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{z}$, viene dada por

$$U(z) = U_0 + mgz \ .$$

U_0 es una constante y corresponde a la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra en $z = 0$. En la mecánica clásica el valor de U_0 no tiene mayor importancia, ya que lo único relevante resultan ser diferencias de energía potencial entre dos puntos. Esto permite elegir $U_0 = 0$, si eso resulta conveniente y simplifica las ecuaciones.

Resumiendo: En el presente ejemplo, al elevar la masa en presencia de un campo gravitacional (y sin modificar su energía cinética), el trabajo realizado se transforma en un cambio de *energía potencial*. La energía potencial se designa usualmente con la letra U o V.

d) Consideremos un resorte de constante de restitución k, acostado sobre una superficie horizontal sin roce y con un extremo empotrado en una pared (ver figura 5.1). Supongamos además que el sistema inicialmente se encuentra en reposo, con el resorte teniendo su largo natural.

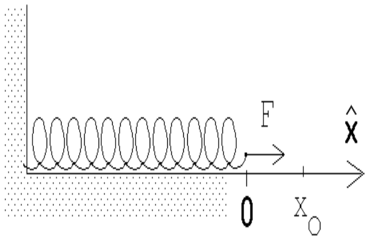


Figura 5.1

Evaluemos el trabajo que debemos realizar para alargar (lentamente) el resorte en una magnitud x_0. La fuerza que debemos aplicar para lograr nuestro objetivo ahora no es constante, sino que aumenta a medida que el resorte se estira:

$$\vec{F}(x) = kx\,\hat{x} \quad .$$

(Esta fuerza es la opuesta a la que el resorte ejerce sobre la masa, que, de acuerdo a la *Ley de Hooke*, es $-kx\hat{x}$). El trabajo que debemos realizar para alargar el resorte, desde $x = 0$ hasta $x = x_0$, viene dado por

$$W_{0\longrightarrow x_0} = \int_{x=0}^{x=x_0} F(x)\cdot dx = \int_0^{x_0} kx\,dx = k\int_0^{x_0} x\,dx \quad .$$

Ya sabemos que la integral $\int f(x)\,dx$ no es otra cosa que el área bajo la curva del gráfico de la función $f(x)$. Para el presente caso, la función corresponde a una recta que pasa por el origen (ver figura 5.2), siendo el área bajo la curva $\frac{1}{2}x_0^2$.

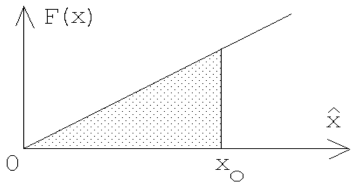


Figura 5.2

Luego, el trabajo que debe realizarse para expandir el resorte hasta x_0 es

$$W_{0\longrightarrow x_0} = \frac{1}{2}\,kx_0^2 \quad .$$

(Se obtiene el mismo resultado si, en lugar de alargarlo, el resorte se comprime en una magnitud x_0).

También en este ejemplo, el trabajo realizado por nosotros sobre la partícula no se manifiesta en un cambio de su energía cinética, sino lo que cambia es el estado del sistema. En el nuevo estado, el sistema tiene la “potencialidad” (al permitir que el resorte vuelva a su largo natural) de realizar trabajo, o de entregarle a la partícula adosada al resorte una energía cinética.

Si la energía potencial de un resorte la definimos por

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad ,$$

donde $x = 0$ corresponde a la posición de equilibrio del resorte y x es la magnitud en que éste se comprime o se alarga, entonces nuevamente

$$W_{0 \longrightarrow z_0} = U(z_0) - U(0) \quad .$$

(La constante aditiva U_0 en la expresión para la energía potencial nuevamente no aparece en el resultado final; la podríamos haber elegido igual a cero.) La figura 5.3 muestra el gráfico $U(x)$ correspondiente a la energía potencial de un resorte.

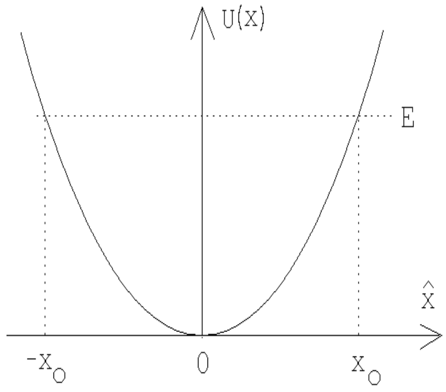


Figura 5.3

e) Consideremos ahora una partícula que se mueve a lo largo de una recta (el eje $\hat{x}$) sobre una mesa y supongamos que, además de la fuerza que nosotros ejercemos sobre ella, la única otra fuerza se debe al roce (cinético). La fuerza de roce es $f_r = mg\mu_c$ (pero note que ésta aparece sólo cuando la partícula se está moviendo y observe además que la dirección en que apunta siempre es contraria a la dirección de movimiento). El trabajo que debemos realizar para empujar la partícula, partiendo desde el reposo desde x_i, hasta x_f (donde nuevamente la dejamos en reposo), es

$$W = f_r \cdot (x_f - x_i) = (mg\mu_c) \cdot (x_f - x_i) \quad .$$

En este caso, sin embargo, el trabajo que realizamos no se manifiesta en un cambio de algo que podríamos denominar energía potencial.

Hay dos problemas que aparecen cuando hay roce y que hace que la situación sea distinta que en los dos últimos casos:

i) En primer lugar, el trabajo que debe hacerse para llevar la partícula desde x_i hasta x_f, cuando hay roce, depende del "camino" que uno elija para ello y, por lo tanto, el trabajo no se puede escribir como una magnitud que sólo dependa del punto inicial y final. En efecto, supongamos que x_f está a la derecha de x_i. Ya vimos que, al llevar la partícula directamente desde x_i a x_f, el trabajo que debemos realizar es $W = mg\mu_c \cdot (x_f - x_i)$. Pero si antes la empujamos hacia la izquierda en una distancia L, y recién desde ahí la empujamos al punto final x_f, el trabajo sería $W = mg\mu_c \cdot (2L + x_f - x_i)$. O sea, el trabajo no sólo depende del punto inicial y final sinó que también del camino.

ii) Otra característica del trabajo que se hace contra el roce es que éste no es recuperable como energía mecánica sin una máquina térmica. Mas aún, en caso de tener una, la recuperación del trabajo realizado sólo es parcial. El trabajo realizado por nosotros contra la fuerza de roce se transforma y se disipa como calor.

Los ejemplos unidimensionales anteriores sugieren lo siguiente:

Definición: El *trabajo* realizado por una fuerza $F(z)$ que actúa sobre alguna partícula es

$$W = \sum_j F(z_j) \cdot (z_{j+1} - z_j) = \int F(z)\, dz \quad ,$$

donde la suma (o integral) se realiza a lo largo de la trayectoria que recorre la partícula.

El trabajo W que se entrega a un sistema, cuando no hay roce, se manifiesta en un cambio de la energía del sistema. Hasta el momento hemos identificado las siguientes formas de energía:

a) Energía cinética de una partícula de masa m. Esta viene dada por

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad ,$$

y se debe al movimiento de la partícula. Cuando la partícula está en reposo, su energía cinética es cero.

b) Energía potencial. Esta es una energía que se debe a la posición de la partícula. La energía potencial sólo aparece cuando la partícula no es libre, sino que está sometida a un *campo de fuerzas*. La expresión para la energía potencial depende del campo de fuerzas. Hasta el momento hemos analizado dos casos:

   i) Campo gravitacional uniforme, $\vec{F}(z) = m\vec{g} = -mg\hat{z}$, en cuyo caso la energía potencial es

   $$U(z) = mg \cdot (z - z_0) \ ,$$

   donde z_0 es un lugar que arbitrariamente hemos fijado como el cero de la energía potencial.

   ii) Campo de fuerzas de un resorte, $\vec{F}(x) = -kx\hat{x}$, en cuyo caso la energía potencial es

   $$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad .$$

Cuando hay roce, parte (o toda) la energía entregada al sistema (por medio del trabajo), puede disiparse. Esta energía se manifiesta en un aumento de la temperatura de las superficies que rozan entre sí. En este caso, el trabajo W se transforma en calor Q.

Conservación de la energía:

Al entregarle a una partícula un trabajo W, entonces

$$W = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) + Q \quad , \tag{5.1}$$

o sea, el cambio de la energía cinética, más el cambio de la energía potencial, más la energía disipada como calor es igual al trabajo (energía) aplicado al sistema.

La ecuación de conservación de la energía hay que manejarla con precaución, pues no se puede estar seguro de que uno haya identificado todas las posibles formas de energía. De hecho, a medida que avancemos en el estudio de la física, en varias oportunidades nos veremos forzados a reinterpretar esa ecuación o agregarle términos adicionales.

La ecuación (5.1) también se puede reescribir de la siguiente manera:

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W - Q \ .$$

A la suma $K + U$ suele llamarse *energía mecánica* y denotarse con la letra E.

5.2. Trabajo para un movimiento en tres dimensiones

Consideremos ahora una partícula libre de masa m que se mueve en el espacio tridimensional y cuya posición y velocidad en el instante t son $\vec{r}$ y $\vec{v}$, respectivamente. Apliquemos sobre esa partícula, durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt, una fuerza $\vec{F}$.

De acuerdo a la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad .$$

Durante el intervalo de tiempo infinitesimal dt, la partícula se desplaza una distancia

$$d\vec{r} = \vec{v}\ dt \quad .$$

Haciendo el producto punto de los vectores que aparecen en las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot \vec{a}\ dt \quad .$$

Evaluemos la velocidad al cuadrado en el instante $t + dt$. Se tiene

$$\begin{aligned}
v^2(t+dt) &= \vec{v}(t+dt) \cdot \vec{v}(t+dt) \\
&= (\vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,dt) \cdot (\vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,dt) \\
&= \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)\,dt + \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t)\ (dt)^2 \\
&= v^2(t) + 2\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)\ dt + (\text{términos del orden de } (dt)^2)\ ,
\end{aligned}$$

o sea,

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)\ dt = \frac{1}{2} v^2(t+dt) - \frac{1}{2} v^2(t)\ .$$

Con este resultado y la expresión deducida más arriba, obtenemos que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v^2(t+dt) - \frac{1}{2} m v^2(t)\ .$$

La última ecuación nos indica que el cambio de energía cinética de una partícula sobre la cual actúa una fuerza durante el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$ (pero por lo demás es libre), es igual al producto punto de esa fuerza y el desplazamiento realizado por la partícula en ese mismo intervalo. Lo anterior sugiere definir el *trabajo*, en el caso tridimensional, como el producto punto del vector fuerza y el vector desplazamiento.

Si el movimiento no ocurre durante un intervalo de tiempo infinitesimal, sino entre dos instantes t_i y t_f, podemos usar la ecuación anterior siempre que el intervalo se divida en muchos intervalos pequeños y luego se sumen los trabajos y los cambios en la energía cinética de cada uno de los intervalos. De esta manera se obtiene

$$W = \int_i^f \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v^2(t_f) - \frac{1}{2} m v^2(t_i)\ .$$

Este resultado es el análogo tridimensional de la situación considerada en la sección anterior, en las partes a) y b), para el movimiento unidimensional.

Definición: El *trabajo* realizado por una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ que actúa sobre alguna partícula viene dado por

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\ \cdot\ d\vec{r}\ ,$$

donde la integral se evalúa a lo largo del camino recorrido por la partícula.

Volvamos a analizar el concepto *energía potencial* para una partícula inmersa en un campo gravitatorio uniforme. Consideremos un objeto de masa m, en un campo gravitatorio constante $\vec{g} = -g\hat{z}$ (el eje $\hat{z}$ apuntando hacia arriba), y evaluemos el trabajo que debemos realizar para trasladarlo (lentamente) desde el origen hasta el punto $P:\ (x_0, z_0)$ (ver figura 5.4).

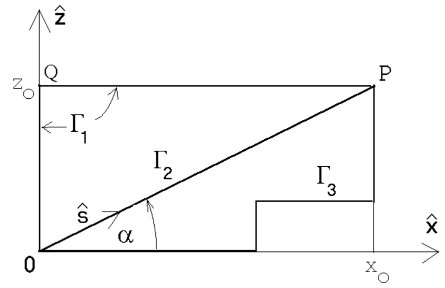


Figura 5.4

Para llevar a cabo nuestro cometido podemos usar distintos caminos. Supongamos que usamos el camino Γ_1, o sea, primero elevamos el objeto desde $z = 0$ hasta $z = z_0$ y luego lo trasladamos hacia el lado, hasta llegar al punto P. Durante el primer tramo la fuerza que debemos realizar para elevar el objeto (con velocidad uniforme) es $\vec{F} = mg\hat{z}$, siendo el desplazamiento también a lo largo del eje $\hat{z}$, es decir, $d\vec{r} = dz\ \hat{z}$. Luego, para este primer tramo, el trabajo que debemos realizar es

$$W_{0\to Q} = \int_{z=0}^{z=z_0} mg\, dz = mg \int_{z=0}^{z=z_0} dz = mg\, z_0 \quad .$$

Para el segundo tramo la fuerza sigue siendo $\vec{F} = mg\hat{z}$; el desplazamiento, sin embargo, ahora es a lo largo del eje $\hat{x}$, es decir, $d\vec{r} = dx\ \hat{x}$. El producto punto entre la fuerza y el desplazamiento es cero (por ser uno ortogonal al otro). Luego, para trasladar el objeto desde Q a P no se requiere realizar ningún trabajo. Concluimos que el trabajo total, a lo largo del camino Γ_1, es

$$W_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = mgz_0 \quad .$$

Evaluemos ahora el trabajo que debemos realizar para llevar el mismo objeto desde el origen al punto P a lo largo del camino Γ_2. La fuerza que debemos aplicar sigue siendo $\vec{F} = mg\hat{z}$; el desplazamiento, sin embargo, es a lo largo de la dirección del vector unitario $\hat{s}$, o sea, $d\vec{r} = ds\,\hat{s}$. Luego se tiene que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (mg\ \hat{z}\,) \cdot (ds\ \hat{s}) = mg \sin\alpha\ ds \quad .$$

Concluimos que el trabajo total, a lo largo del camino Γ_2, viene dado por

$$W_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = mg(\sin\alpha) \int_{\Gamma_2} ds = mgL \sin\alpha \quad ,$$

donde L es el largo del camino. Pero $L \sin\alpha = z_0$, luego los trabajos a lo largo del los caminos Γ_1 y Γ_2 son iguales.

No es difícil demostrar que también el trabajo que se debe realizar para llevar el objeto desde el origen al punto P a lo largo del camino Γ_3 es igual a mgz_0. En efecto, para trasladar el objeto a lo largo de tramos horizontales no se requiere hacer trabajo, mientras que para los tramos verticales el trabajo siempre es mgh, donde h es la diferencia de altura del tramo vertical.

Eligiendo el cero de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra en el origen, su energía potencial cuando se encuentre a una altura z será

$$U(x, z) = mgz \quad ,$$

siendo ésta independiente del valor x.

Cuando un *campo de fuerza* tiene la propiedad de que el trabajo realizado para llevar (lentamente) una partícula entre dos puntos cualesquiera, es independiente del camino usado para unir tales puntos, entonces el campo de fuerzas se dice que es *conservativo*. El campo gravitacional es un ejemplo de un campo conservativo.

La fuerza de roce es un ejemplo de una fuerza no conservativa. Al empujar un cajón de masa M por el suelo de una habitación de un lugar a otro, el trabajo realizado será proporcional al largo L del camino que para ello se elige, siendo $W = \mu_c M g L$. Al no ser el roce una fuerza conservativa, no se puede introducir una energía potencial para esta fuerza (ya que no existe una función que sólo dependa de los puntos final e inicial, y cuya diferencia sea igual al trabajo). El trabajo que se realiza contra la fuerza de roce se transforma en calor. La reconversión de energía calórica a energía mecánica puede hacerse sólo recurriendo a alguna máquina y, aun así, no en forma completa.

Unidades

En el sistema internacional de unidades SI, la unidad del trabajo (o, lo que es lo mismo, de la energía) es el *Joule*, que se abrevia como [J]:

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \cdot \text{metro} \quad ,$$

o sea,

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \quad .$$

Al *trabajo por unidad de tiempo* se denomina *potencia*. En el sistema SI, la unidad de la potencia se denomina *watt* [W] y corresponde a 1 Joule por segundo, es decir,

$$1 \ \text{W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} \ .$$

Ejemplo: Considere un motor eléctrico de 0.4 KW (esto corresponde a aproximadamente al motor de una juguera). ¿Cuánto tiempo tardaría tal motor, mediante un sistema de poleas, en levantar un automóvil de 600 kg en un metro?

Solución: El trabajo requerido para levantar el automóvil es

$$W = m\, g\, h = 600 \ \cdot \ 9{,}81 \cdot 1 \ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \sim 6000 \text{ J} \quad .$$

El motor es capaz de entregar 400 J por segundo (estamos suponiendo una eficiencia de un 100 %), luego, para realizar un trabajo de 6000 J tardará $6000/400 = 15$ s.

5.3. Ejemplos

A continuación ilustremos los conceptos anteriores aplicándolos en algunos problemas concretos.

Ejemplo 1

Considere un bloque de masa M que incide con velocidad v_0 sobre un resorte (ver figura 5.5) y lo comprime. ¿Cuál será la máxima compresión que en algún instante llega a tener el resorte?

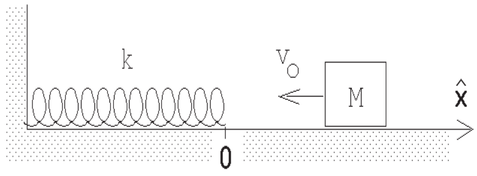


Figura 5.5

El bloque, al comprimir el resorte, realiza trabajo. Este trabajo, que se transforma en energía potencial del resorte, lo hace a costa de su energía cinética. La máxima compresión se logra cuando el bloque llega a estar en reposo. En ese caso, toda la energía cinética se habrá transformado en energía potencial, o sea,

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \ .$$

En la ecuación anterior, x_0 es la máxima compresión que llega a tener el resorte. Despejando x_0 se encuentra que

$$x_0 = \sqrt{\frac{M}{k}}\, v_0 \ .$$

Ejemplo 2

Un bloque de masa m resbala por un plano inclinado, partiendo del reposo desde una altura h. Sea α el ángulo de elevación y μ el coeficiente de roce cinemático entre el bloque y el plano. ¿Con qué velocidad llegará el bloque al pie del plano inclinado?

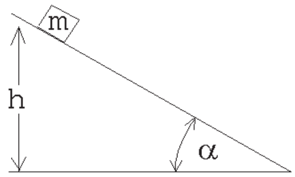


Figura 5.6

Inicialmente el bloque tiene sólo una energía potencial $U = mgh$ (el cero de la energía potencial lo hemos elegido en la base del plano inclinado). Al llegar el bloque abajo, éste tiene sólo energía cinética $K = mv_f^2/2$. Usando el principio de conservación de la energía se tiene que la energía cinética final debe ser igual a la energía potencial inicial menos la energía disipada por el roce. Esta última es $Q = \mu\, m\, g\, (\cos\alpha)\, L = \mu\, m\, g\, h/\tan\alpha$. Se tiene

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - \mu mgh/\tan\alpha \ ,$$

o sea,

$$v_f^2 = 2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right) \quad .$$

La ecuación anterior es válida si $\mu \leq \mu_e \leq \tan\alpha$. Si la condición anterior no se cumple la partícula no resbala. Observe cómo, en el límite $\alpha = 90°$, la velocidad v_f tiende al resultado de la caída libre.

Ejemplo 3

Suponga que la energía potencial de una partícula de masa m viene dada por la expresión

$$U(z) = a\left[\frac{1}{3}z^3 - b^2\,z\right] \quad ,$$

donde a y b son ciertas constantes positivas. Encuentre el campo de fuerza $F(z)$ que da origen a tal energía potencial.

Sea $F(z)$ la fuerza que el campo ejerce sobre la partícula. Para llevar lentamente la partícula desde el origen al punto z deberemos ejercer sobre la partícula una fuerza de igual magnitud pero sentido opuesto. Por consiguiente, el trabajo que debemos realizar es

$$W(z) = -\int_0^z F(z)\,dz \quad .$$

Este trabajo es igual a la diferencia de la energía potencial entre el origen y el lugar z, o sea, $U(z) - U(0)$. Como $U(0) = 0$, podemos igualar $W(z)$ con $U(z)$, obteniéndose

$$U(z) = -\int_0^z F(z)\,dz = a\,\left[\frac{1}{3}\,z^3 - b^2\,z\right] \quad .$$

Como el proceso de integración es el "inverso" del proceso de derivación (ver figura 5.7), se tiene que la fuerza debe ser *menos la derivada de la energía potencial*, o sea,

$$F(z) = -\frac{dU(z)}{dz} \quad . \tag{5.2}$$

Usando esta relación se encuentra que para el presente problema, el campo de fuerzas es

$$F(z) = a\left[b^2 - z^2\right] \quad .$$

Es importante señalar que siempre *la derivada de la energía potencial es (menos) la fuerza que el campo conservativo ejerce sobre la partícula.*

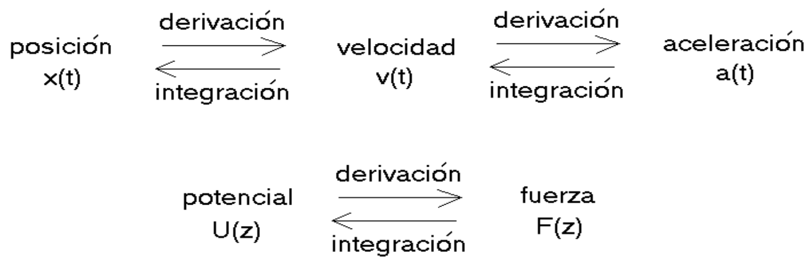


Figura 5.7

Ejemplo 4

Una partícula en un campo de fuerzas se dice que se encuentra *en equilibrio* si la fuerza sobre ella es nula. Para una partícula cuya energía potencial es (la misma del ejemplo anterior)

$$U(z) = a\left[\frac{1}{3}z^3 - b^2\,z\right] \ ,$$

la fuerza $F(z)$ es nula cuando $z = \pm b$. Note que esos puntos siempre correponden a máximos o mínimos de la energía potencial (ver figura 5.8).
Se dice que un sistema en equilibrio es *estable* si al alejarlo levemente del punto de equilibrio la fuerza que aparece lo acelera nuevamente hacia dicho punto. De lo contrario, el equilibrio es inestable.

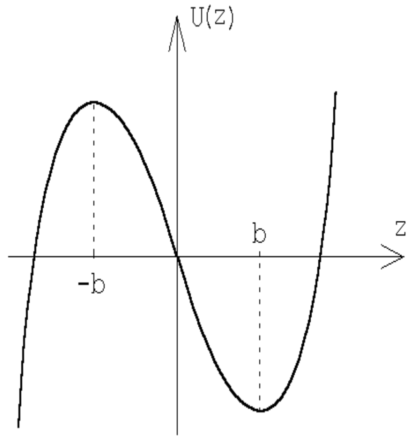


Figura 5.8

Para el caso mostrado en la figura 5.8, la partícula se encontrará en equilibrio estable si está en reposo en el lugar $z = b$, e inestable si se encuentra en $z = -b$.

Supongamos que la partícula de masa m se encuentra en el punto de equilibrio estable y que en cierto instante la sacamos levemente de su punto de equilibrio, para dejar que luego se mueva en el campo de fuerza. Demostremos que la fuerza que el *campo* ejerce sobre la partícula es en magnitud proporcional al desplazamiento pero en sentido opuesto. Efectivamente, si alejamos la partícula una distancia $+\Delta$ desde el punto de equilibrio estable $z = b$, (con $\Delta \ll b$), entonces la fuerza que aparece es

$$F(b+\Delta) = a\left[b^2 - (b+\Delta)^2\right] = -a(2b\Delta + \Delta^2) \simeq -2ab\Delta \ \ .$$

Notemos que la fuerza asociada al potencial en la vecindad del mínimo actúa en forma análoga a la ley de Hooke que gobierna el comportamiento de un resorte: al alejar la partícula de la posición de equilibrio aparece una fuerza que es proporcional al desplazamiento, pero en el sentido contrario. Al soltar la partícula (desde el reposo) en el lugar $z = b + \Delta$, la partícula oscilará en torno al punto de equilibrio igual como si estuviera adosada a un resorte. El período de oscilación de una masa adosada a un resorte con constante de restitución k es $T = (2\pi)\sqrt{m/k}$. En el presente ejemplo, $2ab$ juega el papel del coeficiente de restitución k, luego el período de las oscilaciones será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2ab}} \quad .$$

5.4. Problemas

1. Una masa de 2 kg se lleva desde un punto A al punto B. Los vectores de posición de los puntos A y B son:

$$\vec{x}_A = (\hat{x} + 3\hat{z}) \ \text{m}$$

$$\vec{x}_B = 5\hat{x} \ \text{m}$$

   Todo el sistema está inmerso en un campo gravitatorio constante $-g\hat{z}$. Encuentre el trabajo realizado por la gravedad a lo largo de cada uno de los tres caminos indicados en la figura adjunta.

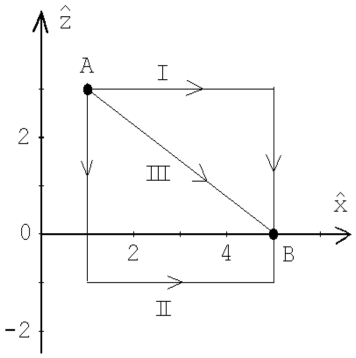


Figura 5.9

2. Una bomba de agua debe elevar 200 litros de agua por minuto desde un pozo, cuyo nivel de agua está a 6 m de profundidad, para luego lanzarla con una velocidad de 9 m/s. Suponiendo que no hay pérdidas de energía de ningún tipo, ¿qué trabajo por minuto debe realizar el motor que acciona la bomba? ¿Cuál es la potencia del motor?

   (Una máquina que realiza un trabajo de 1 Joule = 1 kg m^2/s^2 por segundo, tiene una potencia de 1 Watt = 1 [W].)

3. Sobre una partícula de masa $m = 0{,}25$ kg, que se mueve a lo largo del eje $\hat{x}$, actúa una fuerza $\vec{F} = F(x)\,\hat{x}$, donde la magnitud $F(x)$ depende de la posición x del modo indicado en la figura 5.10.

a) Determine el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula si ella se traslada desde $x = 0$ a $x = 3$ m.

b) Si la partícula en el instante $t = 0$ se encuentra en reposo en $x = 2$ m, ¿qué velocidad tendrá al llegar a $x = 6$ m?

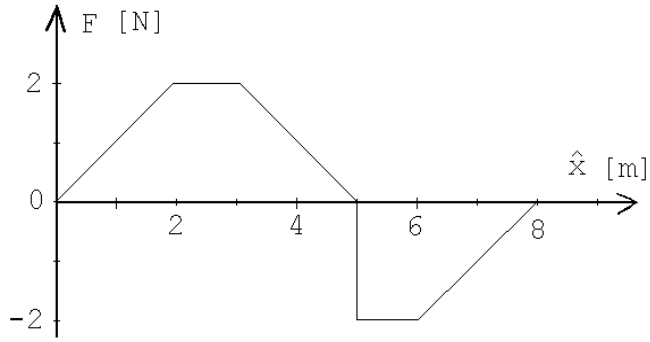


Figura 5.10

Respuestas: a) 4 J; b) v=4 m/s.

4. El sistema mostrado en la figura adjunta se "abandona", partiendo del reposo, cuando el bloque de masa m_1 está a una distancia d por encima del suelo. Desprecie el roce.

   a) Encuentre la aceleración de la masa mayor. ($m_1 > m_2$.)

   b) Usando el resultado de la parte (a), encuentre la velocidad con que la masa mayor llega al suelo.

   c) Suponiendo que todo el trabajo realizado sobre el sistema se transforma en energía cinética, calcule la velocidad de la masa mayor justo antes de que choque contra el suelo.

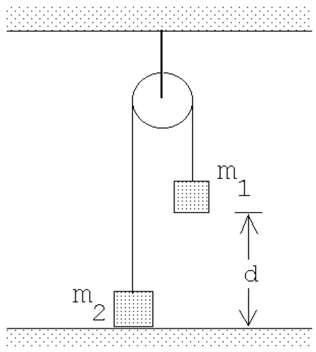


Figura 5.11

5. Considere un cuerpo compuesto de N masas m_j, situados en los lugares $\vec{r}_j$, con $j = 1, 2, 3, \ldots, N$. Demuestre que la energía potencial de tal cuerpo, en un campo gravitacional constante, se puede evaluar suponiendo que toda su masa $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ está concentrada en su *centro de masas*, dado por

$$\vec{r}_{\rm cm} \equiv \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N\right) \quad .$$

6. Un bloque cuya masa es $m = 6$ kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado rugoso, partiendo del reposo. El ángulo de elevación del plano es $\alpha = 60°$ y los coeficientes de roce estático y cinemático son 0.2 y 0.18, respectivamente.

   a) Describa todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y determine el trabajo realizado por cada una de ellas, si el bloque se desliza 2 m (a lo largo del plano).

   b) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque?

   c) ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer una distancia de 2 m?

   Resuelva el problema dos veces: la primera suponga que el *sistema* consiste sólo del bloque y, por lo tanto, las fuerzas de roce son parte de las fuerzas externas; la segunda vez suponga que el sistema consiste del bloque y el plano inclinado, en cuyo caso la disipación de energía por las fuerzas de roce deben considerarse como calor.

7. Se desea levantar lentamente una masa M hasta una altura h, usando el sistema de poleas mostrado en la figura adjunta.

   a) ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse?

   b) ¿Qué trabajo se realiza?

   c) ¿Cuál es el cambio en energía potencial de la masa?

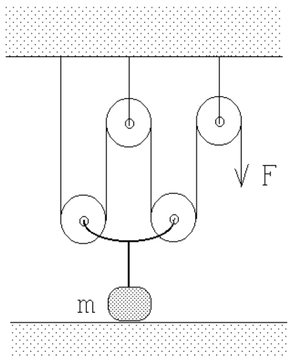


Figura 5.12

8. Un bloque de $m = 5$ kg se sujeta contra un resorte de constante $k = 1000\tilde{\text{N}}/\text{m}$, comprimiéndolo en $d_0 = 8$ cm. Al dejar el bloque en libertad, el resorte al expandirse empuja el bloque a lo largo de una superficie horizontal rugosa con coeficiente de roce cinemático $\mu = 0{,}2$.

   a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque mientras el resorte se extiende desde la posición comprimida hasta la posición de equilibrio?

   b) ¿Cuál es el trabajo realizado por el roce sobre el bloque cuando éste recorre los 8 cm hasta la posición de equilibrio?

   c) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando el resorte pasa por su posición de equilibrio?

   d) Si al pasar por la posición de equilibrio el bloque se despega del resorte, ¿qué distancia alcanzará a recorrer antes de detenerse?

   e) Si el bloque se mantiene sujeto al resorte, ¿cuál es la extensión máxima que llegará a tener el resorte?

9. Un péndulo de masa m colgado de un hilo de largo ℓ, se eleva hasta formar un ángulo $\theta_0 = 90°$ con la normal y luego se deja en libertad.

   a) Encuentre la energía cinética de la masa pendular cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio.

   b) Demuestre que la tensión de la cuerda, para $\theta = 0°$, es 3 veces el peso de la masa pendular.

10. Considere el campo de fuerza dado por

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = F_0\,\hat{x} + F_0\,\frac{x}{a}\,\hat{y} \ .$$

Evalúe el trabajo que debe realizarse para llevar una partícula de masa m desde el origen hasta el punto A a lo largo de los dos caminos indicados en la figura adjunta. El campo de fuerzas ¿es conservativo?

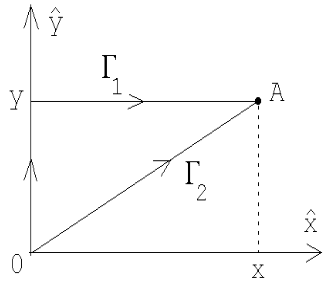


Figura 5.13

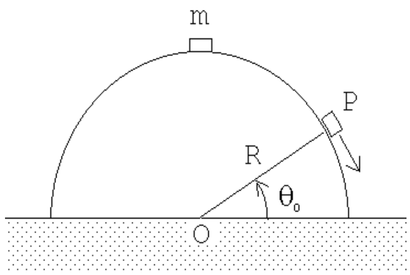
11. Una caja, de masa 10 Kg, descansa sobre la cubierta horizontal de una mesa. El coeficiente de fricción entre la caja y la superficie de la mesa es 0,4. En cierto instante se aplica sobre ella una fuerza $\vec{F} = F_0\,\hat{x}$, adquiriendo la caja una aceleración constante $\vec{a} = 2\,\hat{x}$ [m/s^2].

   a) Determine F_0.

   b) Determine el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ cuando la caja se ha trasladado una distancia de 5 m.

   c) Evalúe la diferencia entre el trabajo realizado sobre la partícula y el calor Q disipado por el roce. Demuestre que esta diferencia coincide con la energía cinética final de la caja.

12. Una masa m resbala, sin roce y debido a la gravedad, por la superficie de una semiesfera de radio R. La masa parte desde la cúspide sin velocidad inicial. Sea P el punto en el cual la masa se separa de la semiesfera. Encuentre el ángulo de elevación θ_0 del punto P.



Respuesta: $\sin\theta_0 = 2/3$.

Figura 5.14

13. Sobre una cinta transportadora caen 5 kg de material por segundo ($\Lambda = dm/dt =$ 5 kg/s). Suponiendo que no hay pérdidas de energía de ningún tipo en todo el sistema que impulsa la cinta transportadora, encuentre la fuerza F que debe aplicarse para mantener la cinta trasladándose con una velocidad constante v_0 = 3 m/s. ¿Cuál es la mínima potencia que debe tener el motor para hacer avanzar la cinta transportadora?

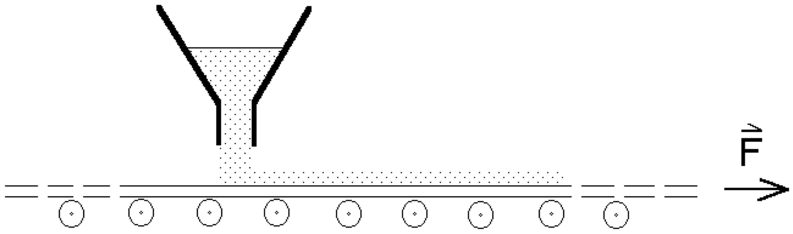


Figura 5.15

Respuesta: $$P = \frac{dW}{dt} = \Lambda v_0^2 = 45 \text{ W} .$$

14. Considere dos masas m unidas por una varilla de largo L que no tiene peso. Inicialmente el sistema está apoyado en una pared, formando un ángulo θ_0 con la normal (vea figura 5.16). El sistema comienza a resbalar sin roce debido a la gravedad. ¿A qué altura la masa # 1 se separa de la pared vertical?

Respuesta: $h = 2h_0/3$, donde $h_0 = L \sin\theta_0$ es la altura inicial.

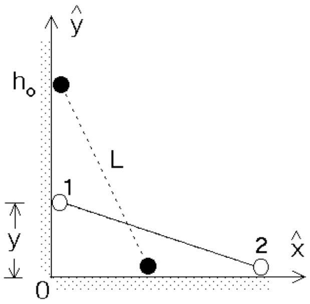


Figura 5.16

15. Una moneda se desliza sobre un tramo horizontal pulido. Luego entra en un tramo cilíndrico convexo de radio R=1 m. La moneda pierde contacto con la superficie cilíndrica a un ángulo de 30° con respecto a la vertical medido desde el vértice del cilindro. Calcule la rapidez con que se desplazaba la moneda en el tramo horizontal.

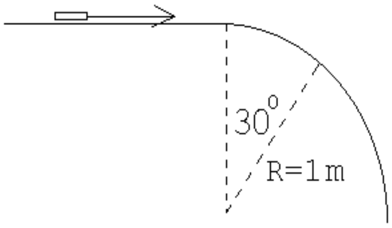


Figura 5.17

16. La fuerza electrostática que ejerce una carga eléctrica Q sobre otra carga q viene dada por la así llamada *Ley de Coulomb*:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{r^2}\,\hat{r} \;\; ,$$

donde $\vec{r} = r\,\hat{r}$ es el vector de posición de q respecto a Q. Notemos que si las dos cargas tienen el mismo signo la fuerza entre las cargas es repulsiva.
Considere una carga Q fija en el origen y una carga q, que inicialmente se encuentra en el lugar $\vec{r}_0$.

a) Encuentre el trabajo que debe realizarse para trasladarla desde $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}_1$.

b) Repita la parte a) para varios caminos simples y demuestre que siempre obtiene el mismo resultado (en otras palabras, el campo de fuerzas es conservativo).

c) Demuestre que la energía potencial (electrostática) de la carga q viene dada por

$$U(r) = +\frac{qQ}{r} \;\; .$$

¿En qué lugar se ha elegido el cero para la energía potencial?

17. Considere una carga Q fija en el origen y otra carga q, del mismo signo, que se acerca a Q a lo largo de la recta que las une. Si q tiene una energía cinética K cuando la separación entre las cargas es muy grande (infinita), encuentre la mínima distancia a la que q se acercará a Q.

Para resolver este problema use el resultado para la energía potencial obtenido en el problema anterior.

18. Considere la configuración de cargas mostrada en la figura 5.18. Las cargas $+Q$ están fijas en los lugares $x = \pm a$, $y = z = 0$ mientras que la carga $+q$ puede deslizarse sólo a lo largo del eje $\hat{x}$.

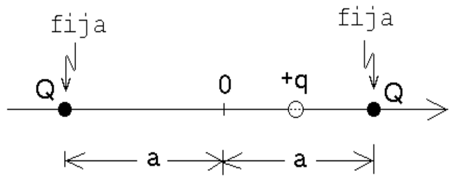


Figura 5.18

a) Encuentre una expresión para la fuerza $F(x)$ que actúa sobre la carga $+q$.

b) Encuentre la energía potencial $U(x)$ y grafíquela. (Especifique claramente dónde eligió el cero para la energía potencial.)

c) ¿Se comportará este sistema como un oscilador armónico para pequeños desplazamientos de q en torno al origen? (Un sistema se comporta como un oscilador armónico si, al desplazar el sistema de su posición de equilibrio, aparece una fuerza proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario —ejemplo, ley de Hooke.)

19. Considere una partícula de masa m y carga $-q$ restringida a moverse a lo largo del eje $\hat{x}$. Además, dos cargas $+Q$ se ubican fijamente sobre el eje $\hat{y}$ a una distancia a del origen, tal como lo muestra la figura 5.19.

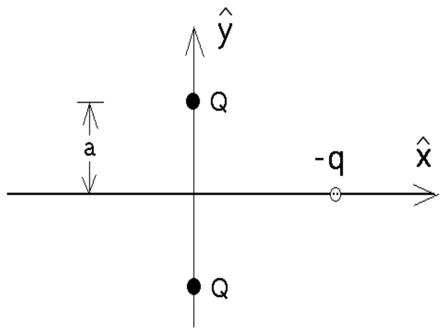


Figura 5.19

a) Encuentre la energía potencial $U(x)$ del sistema de cargas en función de x.

(b) Encuentre la fuerza electrostática $F(x)$ que actúa sobre la carga $-q$.

(c) Evalúe la derivada $-dU(x)/dx$ y demuestre que ésta coincide con $F(x)$.

(d) ¿Con qué velocidad pasará la partícula por el origen si parte desde el infinito con velocidad cero?

(e) ¿Se comportará este sistema como un oscilador armónico para pequeños desplazamientos de q en torno al origen? Si su respuesta es afirmativa, encuentre el período del movimiento periódico.

Respuestas:

$$a)\quad U(x) = \frac{-2Qq}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad ; \quad b) \quad \vec{F}(x) = -\frac{2Qqx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\hat{x} \quad ; \quad d) \quad v = \sqrt{\frac{4Qq}{ma}}\ .$$

20. Un bloque de 2 Kg, situado a una altura de 1 m, se desliza por una rampa curva y lisa, partiendo del reposo. Al terminarse la rampa, el bloque resbala 6 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo.

a) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte inferior de la rampa?

b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de roce sobre el bloque?

c) ¿Cuánto vale el coeficiente de roce cinemático entre el bloque y la superficie horizontal?

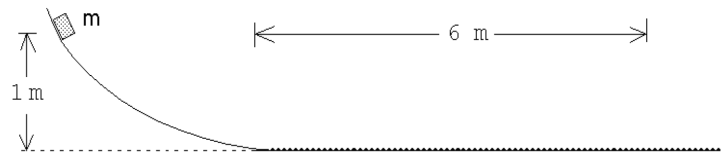


Figura 5.20

21. En un parque de entretenciones un carro de masa $m = 100$ kg se desliza (sin roce) por una rampa desde una altura h, ingresando a un *loop* de radio $R = 3$ m. La altura h es la mínima que se requiere para que el carro no se salga de la vía. Emergiendo del *loop* el carro ingresa a la región de frenado, donde en un trayecto de largo L, el coeficiente de roce cinemático es $\mu_c = 0,2$. Sin embargo, el carro no alcanza a detenerse durante la primera pasada sinó que pasa de largo y después de colisionar con un resorte de constante $k = 500\tilde{\mathrm{N}}/\mathrm{m}$, vuelve a ingresar a la región de frenado quedando en reposo al centro de ella (o sea, en el punto C, ver figura 5.21).

    a) Encuentre la velocidad del carro en el punto B.

    b) Encuentre h.

    c) Encuentre L.

    d) Encuentre la máxima compresión que alcanza a tener el resorte.

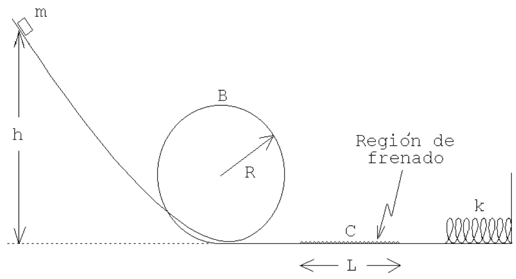


Figura 5.21

22. Una partícula de masa m se mueve sobre una mesa rugosa a lo largo de un círculo de radio R. La partícula está amarrada a un extremo de un hilo de largo R, cuyo otro extremo está fijo al centro del círculo. La velocidad de la partícula inicialmente es v_0. Debido al roce con la mesa, la partícula se irá frenando. Después de completar una vuelta, su velocidad es $v_0/2$.

    a) Encuentre el trabajo realizado por la fricción durante una vuelta. Exprese el resultado en función de m, v_0 y R.

    b) Encuentre el valor del coeficiente de roce cinemático.

    c) ¿Cuántas vueltas dará la partícula antes de detenerse?

23. Una masa m se cuelga de dos resortes *en serie*, de constantes de restitución k_1 y k_2, tal como se muestra en la figura 5.22a. Encuentre la frecuencia de oscilación para pequeñas vibraciones (verticales) de la masa m.
    Repita el cálculo para el caso en que los dos resortes están *en paralelo* (ver figura 5.22b).

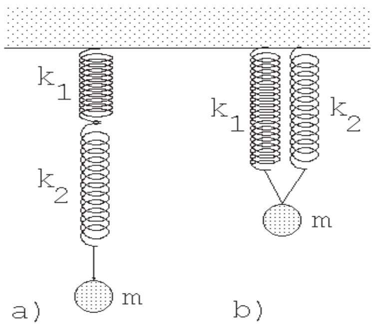


Figura 5.22

24. Supongamos que la función energía potencial $U(x)$ en función de x, para una partícula que sólo se puede mover a lo largo del eje $\hat{x}$, viene dada por el gráfico mostrado en la figura 5.23

    a) Identifique los puntos de equilibrio e indique si son estables o inestables.

    b) ¿Para qué valor de x la fuerza tiene su valor (módulo) máximo?

    c) Describa en palabras el movimiento, a medida que transcurre el tiempo, de una partícula de energía total E_1. (Especifique claramente las condiciones iniciales que está suponiendo.)

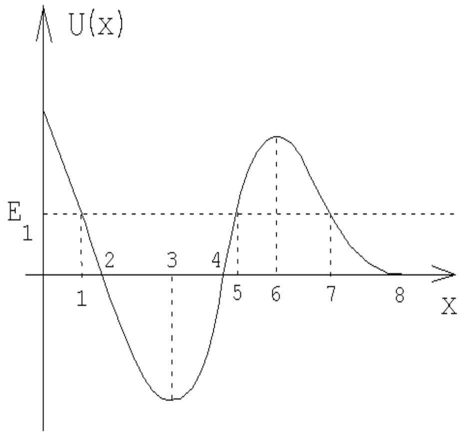


Figura 5.23

25. Suponga que la energía potencial entre dos átomos de una molécula diatómica viene aproximadamente dada por la expresión

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right] \quad ,$$

donde r es la separación entre los átomos y a y U_0 son constantes.

a) Grafique la energía potencial.

b) ¿Para qué separación r los átomos estarán en equilibrio? ¿El equilibrio es estable o inestable?

c) Suponga que los átomos tienen la misma masa m_0. ¿Con qué frecuencia vibrará la molécula al alejar el sistema levemente de su posición de equilibrio?

d) Si la molécula está en su estado de equilibrio, ¿cuál es la mínima energía que habría que entregarle a la molécula para disociarla, es decir, separarla en sus dos átomos constituyentes?

26. La fuerza gravitatoria entre dos masas m_1 y m_2 viene dada por

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad ,$$

donde G es la así llamada constante gravitatoria y $\vec{r} = r\hat{r}$ es el vector que une los centros de masa de ambas masas. El valor experimental de G es

$$G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11} \;\; \mathrm{m^3/s^2\,kg} \quad .$$

a) Demuestre que el trabajo que debe hacerse para alejar las dos masas desde una separación r_1 a una separación r_2 $(r_2 > r_1)$, viene dado por

$$W = Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) .$$

b) A partir del resultado anterior, demuestre que si el cero de la energía potencial se elige en $r = \infty$, entonces la energía potencial en función de la distancia entre las dos masas viene dada por

$$U(r) = -\frac{Gm_2m_1}{r} .$$

c) Suponga ahora que $m_1 = M_T$ es la masa de la tierra y $m_2 = m$ es la masa de un objeto pequeño. Si tal objeto se encuentra sobre la superficie terrestre y se eleva una pequeña distancia h, demuestre que la energía potencial cambia en $\Delta U = mgh$. Note que de esta manera usted ha encontrado una expresión para la aceleración de gravedad g en términos del radio de la tierra R_T, la masa M_T y la constante de gravitación G.

d) Encuentre la masa de la tierra suponiendo que el radio de la tierra es aproximadamente 6380 km. (Ignore la rotación de la tierra.)

e) Encuentre la velocidad de escape, es decir, la velocidad mínima que debe impartirse a una masa m (inicialmente en reposo sobre la superficie terrestre) para que ella pueda alejarse del campo gravitatorio de la tierra. (Ignore la rotación de la tierra.)

f) ¿Hasta qué distancia máxima se podrá alejar el pequeño objeto si su velocidad inicial es la mitad de la velocidad de escape?

27. Un bloque de masa M se apoya sobre un platillo de masa m sujeto a un resorte vertical de constante k y largo natural ℓ_0. Al colocar el platillo con la masa M sobre el resorte este se comprime teniendo, en equilibrio, un largo $\overline{\ell}$.

Comprimamos ahora el resorte otro poco de manera que inicialmente se encuentra contraído a un largo $\ell < \overline{\ell}$. En cierto instante se suelta el resorte, permitiendo que éste se expanda.

a) Evalúe $\overline{\ell}$.

b) Demuestre que el si el resorte en algún instante supera el largo natural ℓ_0, entonces el bloque se separa del platillo.

c) ¿Cuál es el mínimo valor de la contracción $(\ell_0 - \ell)$ que debe tener el resorte antes de soltarlo para que el bloque alcance a separarse del platillo?

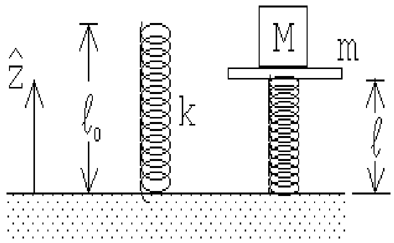


Figura 5.24

d) Encuentre la altura máxima alcanzada por el bloque (en todos los casos, cuando se separa y cuando no se separa del platillo).

Respuesta: c) $(\ell_0 - \ell) = 2g(M + m)/k$.

28. En una feria de entretenciones hay un juego que consiste en que los participantes abordan un carro en el punto P (ver figura 5.25), caen en caída libre una altura h hasta el punto A, luego recorren un cuarto de circunferencia (AB) de 2 m de radio y una recta (BC) de 5 m, todo esto sin roce. En el punto C se ingresa a una zona de 8 m de largo con coeficiente de roce $\mu_c = 0{,}5$. Como zona de seguridad, hay una distancia (DE) de 5 m sin roce, concluyendo la pista en un gran resorte cuya constante elástica es $k = 6 \times 10^4 \tilde{\text{N}}/\text{m}$. La masa del carro, con los pasajeros, es de 500 Kg.

   a) Calcule hasta cuántos metros por sobre el punto A se puede dejar caer el carro para que éste se detenga en la zona de desaceleración CD.

   Suponga ahora que el operador del juego sube el carro hasta 8 m sobre A y lo deja caer desde allí.

   b) Encuentre el lugar en que el carro quedará sin velocidad (por primera vez).
   c) Encuentre el lugar en que el carro quedará finalmente en reposo.
   d) Calcule el trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte para detener el carro (por primera vez).
   e) Calcule la aceleración del carro en el instante en que el resorte lo detiene.

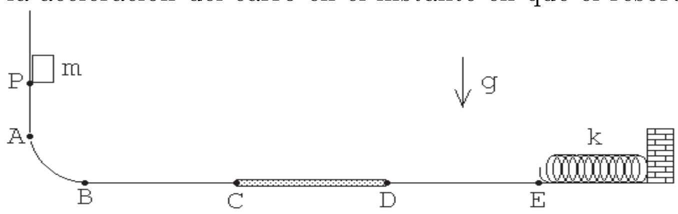


Figura 5.25

29. Considere el montaje mostrado en la figura adjunta. Suponga que las dos masas tienen el mismo valor y que ℓ_0 coincide con el largo natural del resorte cuya constante de restitución es $k = 5mg/\ell_0$. Suponga además que la masa desliza sin roce sobre la superficie y que en el instante mostrado en la figura el sistema se encuentra momentáneamente en reposo.

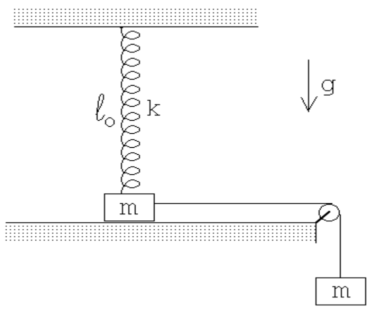


Figura 5.26

a) Demuestre que cuando la masa que se deliza por la superficie se haya desplazado en una cantidad $x = 3\ell_0/4$ hacia la derecha, esta se levantará de la superficie.

b) Demuestre que en el momento en que la masa se separa del plano la velocidad es $v = \sqrt{19g\ell_0/32}$.

30. Considere dos pequeñas masas iguales m unidos mediante cuerdas ideales de longitud $\ell = 1,5$ m, como se indica en la figura adjunta. El sistema rota con velocidad angular uniforme ω. El ángulo que la cuerda atada al brazo (de longitud $L = 4$ m) forma con la vertical es de 60°. Encuentre el ángulo ϕ que la otra cuerda hace con la vertical y encuentre la razón entre las tensiones de cada cuerda.

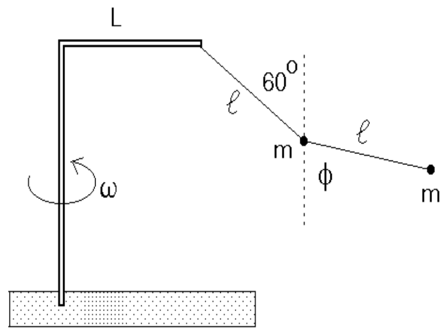


Figura 5.27

31. Dos cuerpos A y B, de masas m y $2m$, respectivamente, se unen mediante una cuerda ideal. El cuerpo A posa sobre una mesa de superficie áspera (coeficiente de roce μ_c) mientras que B se deja caer como se muestra en la figura 5.28. No hay roce entre la cuerda y el punto de contacto con el borde de la mesa. Calcule el ángulo θ formado por la cuerda que sostiene la masa B y la horizontal cuando el bloque A comienza a resbalar. El largo de la cuerda entre el borde de la mesa y el cuerpo B es L.

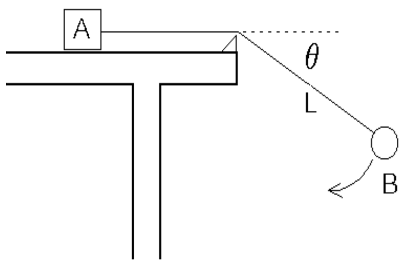


Figura 5.28

32. Dos monos, llamados *Patín* y *Logo*, de igual masa m están agarrados de una cuerda que pasa por encima de una polea (sin roce), frente al Museo del Louvre. Habiendo escuchado el rumor de que en el museo hay una famosa pintura de una supuesta congénere con una enigmática sonrisa, el mono Patín decide subir por la cuerda hasta una posición que le permita mirarla por la ventana. Para ello debe remontar una altura h.

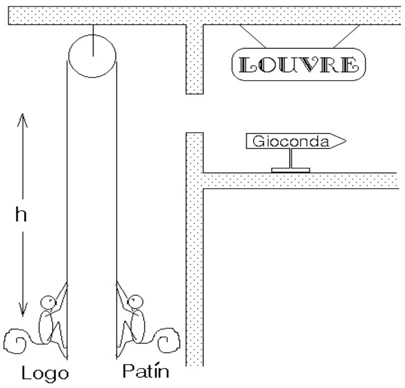


Figura 5.29

a) Analice como el movimiento del mono Patín afecta la posición del mono Logo.

b) Calcule el trabajo que debe realizar el mono Patín para llevar a cabo su propósito.

33. Considere dos masas m unidas por un hilo de largo $2L$, que caen con el hilo estirado en forma horizontal. Después de caer una distancia L el centro del hilo choca con un clavo, correspondiendo de ahí en adelante la trayectoria de las dos masas a un movimiento circular. Si el hilo se corta cuando la tensión llega tener el valor $\tau_{max} = 7mg/2$, encuentre el ángulo ϕ que en ese instante forma el hilo con la horizontal (ver figura 5.30).

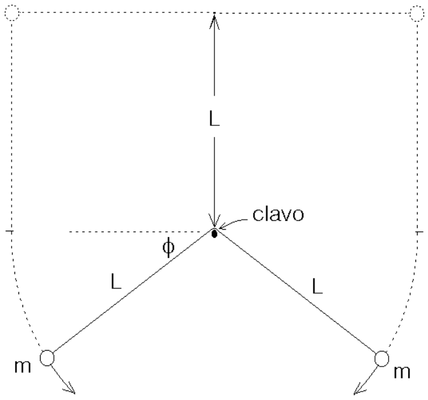


Figura 5.30

5.5. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 12

Cuando la masa m haya resbalado hasta formar un ángulo θ con la horizontal, la energía potencial (gravitatoria) habrá cambiado en

$$\Delta U_{\text{pot}} = mg\,\Delta h = mg(R - R\sin\theta)\ .$$

Como no hay roce, este cambio de energía potencial debe coincidir con la energía cinética que adquiere la masa m, o sea, debe cumplirse la relación

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\,(1 - \sin\theta)\ .$$

Esto nos permite encontrar la velocidad v de la masa en función de θ:

$$v = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta)}\ .$$

La masa m recorre un arco de círculo de radio R, luego la fuerza centrípeta (que apunta en la dirección $-\hat{r}$) es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}\ .$$

(También hay una fuerza tangencial que, sin embargo, aquí no es necesario evaluar.) Las únicas fuerzas reales que actúan sobre m son la normal $N\hat{r}$ y el peso $-mg\hat{z}$. (Nuevamente hemos elegido al eje $\hat{z}$ apuntando hacia arriba.) La componente radial de la fuerza neta es $(N - mg\sin\theta)\,\hat{r}$. Esta debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$-\frac{mv^2}{R} = N - mg\sin\theta\ .$$

Despejando N se obtiene

$$\begin{aligned} N &= mg\sin\theta - \frac{mv^2}{R} = mg\sin\theta - \frac{1}{R}2mgR(1-\sin\theta) \\ &= mg\,(3\sin\theta - 2) \end{aligned}$$

La masa m inicia su movimiento en el ápice, en cuyo caso $\theta = 90°$, siendo la fuerza normal que ejerce la semiesfera sobre la masa $N = mg$. A medida que transcurre el tiempo, θ disminuye y luego también N. Cuando $\sin\theta = 2/3$, la fuerza normal se hace cero, siendo ese el lugar en que la masa m se separa de la semiesfera.

Solución al problema 14

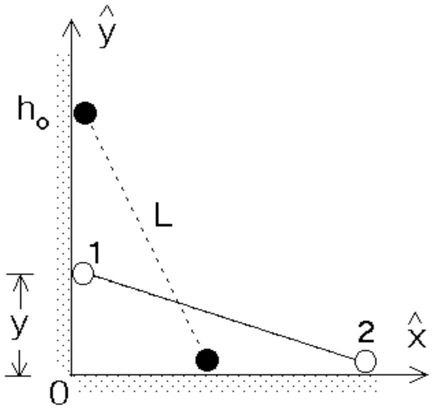


Figura 5.31

Supongamos por un momento que la partícula 1 nunca se despega de la pared. Cuando la partícula 1 haya bajado desde h_0 hasta una altura y, entonces, por conservación de energía

$$mg(h_0 - y) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\ .$$

Sabemos que $x^2+y^2 = L^2$. Derivando esta relación se deduce que $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$, o sea,

$$\dot{y} = \dot{x}\frac{x}{y}\ .$$

Sustituyendo esto en la ecuación de conservación de la energía se encuentra la relación

$$mg(h_0 - y) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{L^2}{y^2}\ .$$

De esta última ecuación podemos despejar la velocidad de la partícula 2 en función de la altura a la que se encuentra la partícula 1:

$$\dot{x}^2 = \frac{2g}{L^2}\,(h_0 - y)\,y^2\ .$$

La velocidad de la partícula 2 depende de y. Observemos que la rapidez con que se mueve la partícula 2 es nula cuando $y = h_0$ y también cuando $y = 0$, luego en algún lugar entremedio debe tener un máximo.

Encontremos el valor $y = h$ para el cual $\dot{x}$ tiene su máximo. Para ello debemos encontrar el máximo de la función $f(y) = (h_0 - y)y^2$. Igualando la derivada de $f(y)$ a cero se encuentra

$$2h_0 y - 3y^2 = 0 \; .$$

Despejando y se encuentra $y = h = 2h_0/3$. Es claro que cuando la partícula 1 llegue a esa altura, se desprenderá de la pared (si es que no hay un mecanismo que evite que eso ocurra). La razón es la siguiente: el único elemento que ejerce una fuerza horizontal sobre el sistema (las dos masas con la varilla) es la la pared vertical. Mientras $y > h$ la partícula 2 acelera (la rapidez $\dot{x}$ aumenta) en la dirección $+\hat{x}$, luego la pared debe ejercer sobre el sitema una fuerza en esa dirección. Cuando $y < h$ entonces la partícula 2 desacelera ($\dot{x}$ vuelve a disminuir); eso implica que la pared ejerce una fuerza en la dirección $-\hat{x}$ sobre el sistema, lo que a su vez sólo es posible si existe algún mecanismo que *sujete* a la partícula 1 a la pared vertical. Si tal mecanismo no existe, entonces la partícula 1 se separa de la pared.

Solución al problema 18

De acuerdo a la ley de Coulomb, las cargas Q de la izquierda y de la derecha ejercen sobre q una fuerza

$$\vec{F}_1 = \frac{qQ}{(a+x)^2}\hat{x}$$

y

$$\vec{F}_2 = -\frac{qQ}{(a-x)^2}\hat{x} \; ,$$

respectivamente. La fuerza total $\vec{F}(x)$ que actúa sobra la carga q es la suma vectorial de las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, por lo tanto,

$$\vec{F}(x) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = qQ \left[\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} \right] \hat{x} \; .$$

Para encontrar la energía potencial también podemos evaluar primero la energía potencial de q con cada una de las cargas Q separadamente, para luego hacer la suma (escalar) de ellas. La energía potencial de una carga q a una distancia r de otra carga Q viene dada por (ver problema 14) $U(r) = qQ/r$. Usando esta expresión se encuentra que la energía potencial de la carga q, cuando ésta se encuentra en el lugar x, es:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = \frac{qQ}{|a+x|} + \frac{qQ}{|a-x|} \; .$$

La energía potencial es cero cuando $x \longrightarrow \pm\infty$. La figura 5.32 muestra un gráfico de la función $U(x)$.

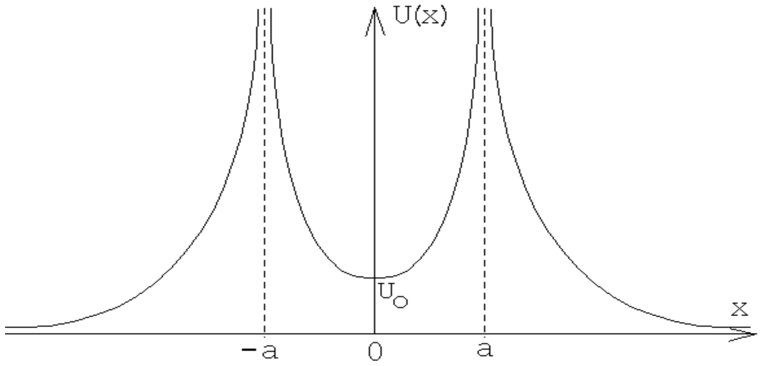


Figura 5.32

De la figura se deduce que $x = 0$ es un punto de equilibrio estable del sistema. Para pequeños desplazamientos, o sea para $|x| \ll a$, se tiene

$$\begin{aligned} U(x) &= qQ\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{qQ}{a}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-1} + \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1}\right] \\ &\simeq \frac{qQ}{a}\left[\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)\right] \\ &= \frac{2qQ}{a} + \frac{2qQ}{a^3}\,x^2 = U_0 + \frac{2qQ}{a^3}\,x^2 \,. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se deduce que, para pequeños desplazamientos de q desde el origen, la energía potencial es cuadrática (es decir, similar a la expresión que se tenía para una masa adosada a un resorte).
La fuerza que actúa sobre q al desplazarla levemente de su posición de equilibrio es

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{4qQ}{a^3}\,x \,.$$

Esta fuerza es análoga a la ley de Hooke: es proporcional y apunta en sentido contrario al desplazamiento. El papel de la constante de restitución k lo juega $4qQ/a^3$. Luego, al desplazar la carga q levemente de su punto de equilibrio, ésta oscilará *armónicamente* con un período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{4qQ}}\,,$$

donde m es la masa de la carga q.

Solución al problema 25

La figura adjunta muestra el gráfico de la energía potencial. Para $r > a$ la pendiende es positiva, para $r = a$ es nula, mientras que para $r < a$ es negativa. La fuerza entre los dos átomos de la molécula es $-dU(r)/dr$. Cuando la derivada es nula (para $r = a$), la fuerza también es nula, luego la separación $r = a$ corresponde a un punto de equilibrio. Para $r > a$, $dU(r)/dr > 0$ y, por consiguiente, $F(r) < 0$. En palabras: si la separación de los dos átomos de la molécula es mayor que a, entonces la fuerza entre ellas será atractiva.

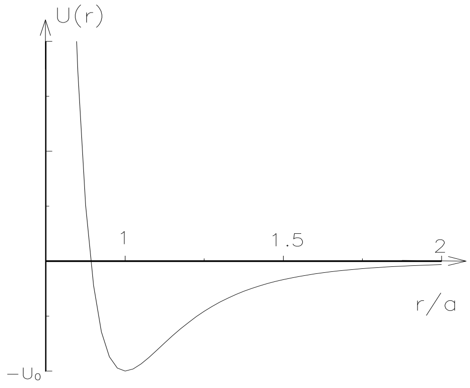


Figura 5.33

Lo contrario ocurre para $r < a$: en ese caso $dU(r)/dr < 0$ y por consigiente $F(r) > 0$, o sea, la fuerza que aparece tratará de alejar a los dos átomos (aumentar r). Resumiendo, cada vez que el sistema se desplaza de su posición de equilibrio, aparece una fuerza que trata de llevar al sistema nuevamente a su posición de equilibrio. (Es precisamente esto último lo que caracteriza a un punto de equilibrio estable.)

Sea $\vec{F}_{12}$ la fuerza que actúa sobre el átomo 1 debido al átomo 2 y $\vec{F}_{21}$ la fuerza que actúa sobre el átomo 2 debido al átomo 1. Por supuesto que, de acuerdo al principio de acción y reacción (tercera ley de Newton) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Sea O un origen y $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ los vectores de posición de cada uno de los átomos (ver figura 5.34).
Las ecuaciones de movimiento, de acuerdo a la segunda ley de Newton, son:

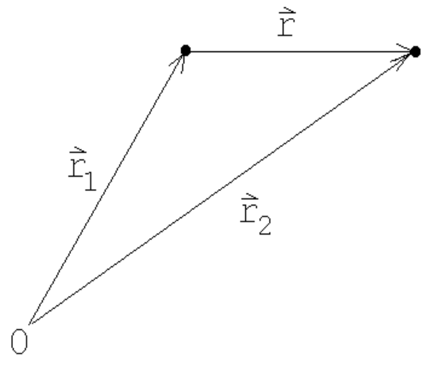


Figura 5.34

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

y

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \ .$$

Restando una de la otra se obtiene

$$m_0 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = \vec{F}_{21} - \vec{F}_{12} = 2\vec{F}_{21} \ . \tag{5.3}$$

La fuerza que actúa sobre la partícula 2 debida a la partícula 1 es

$$\vec{F}_{21} = -\frac{dU(r)}{dr}\,\hat{r}\ ,$$

donde $r = |\,\vec{r}\,| = |\,\vec{r}_2 - \vec{r}_1\,|$. Como estamos suponiendo que la molécula no rota, se tiene que el vector unitario $\hat{r}$, que apunta a lo largo de la línea que une a ambos átomos, no variará a medida que transcurre el tiempo. Se tiene entonces que

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ = r\hat{r}$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1\ = \ddot{r}\,\hat{r}\ .$$

Sustituyendo la última ecuación en (5.3) se obtiene

$$m_0\ddot{r}\,\hat{r} = 2\vec{F}_{21}\ . \tag{5.4}$$

Evaluemos $\vec{F}_{21}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= -\frac{dU(r)}{dr}\,\hat{r} \\ &= 12\frac{U_0}{a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^6 - 1\right]\,\left(\frac{a}{r}\right)^7\ \hat{r}\ .\end{aligned}$$

Escribamos r de la forma $r = a+s$. De esta manera, $s = 0$ corresponderá a la molécula en su posición de equilibrio. Si los átomos se desplazan sólo levemente de su posición de equilibrio, entonces $|s| << a$. En este caso

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= 12\frac{U_0}{a}\left[\left(\frac{a}{a+s}\right)^6 - 1\right]\,\left(\frac{a}{a+s}\right)^7\ \hat{r} \\ &= 12\frac{U_0}{a}\left[\left(1+\frac{s}{a}\right)^{-6} - 1\right]\,\left(1+\frac{s}{a}\right)^{-7}\ \hat{r} \\ &\simeq 12\frac{U_0}{a}\left[1 - 6\frac{s}{a} - 1\right]\,\left(1 - 7\frac{s}{a}\right)\ \hat{r} \\ &\simeq -72\frac{U_0}{a^2}\,s\ \hat{r} + o(s^2)\ .\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sutituyendo este resultado en (5.4), se obtiene

$$m_0\ddot{r}\,\hat{r} = -72\frac{U_0}{a}s\,\hat{r}\ .$$

Cancelando a ambos lados $\hat{r}$ y usando el hecho que $\ddot{r} = \ddot{s}$, se tiene

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0\ , \tag{5.6}$$

con
$$\omega_0^2 = 72\frac{U_0}{a^2 m_0} \ .$$
La ecuación diferencial (5.6) corresponde a la de un oscilador armónico. Ya sabemos que en ese caso, la magnitud s (el alejamiento de un átomo de su posición de equilibrio) realizará oscilaciones armónicas, siendo el período de tales oscilaciones

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{a^2 m_0}{18\, U_0}} \ .$$

De la figura 5.33 también se deduce que para disociar a la molécula, es decir, para separar los átomos a una distancia $r \longrightarrow \infty$, se debe entregar al sistema una energía al menos igual a U_0.

Solución al problema 28

a) Si la masa m parte de una altura h, entonces su energía (antes de entrar a la región de desaceleración) es
$$E = \frac{1}{2}mv^2 = mgh \ .$$
Al atravezar toda la zona de desaceleración, la energía disipada en calor es $Q = \mu_c mg\ \overline{CD}$. Para que la masa m quede en reposo en D, toda su energía debe ser disipada como calor, o sea,
$$mgh = \mu_c mg\, \overline{CD} \ .$$
Despejamos h:
$$h = \mu_c \overline{CD} = 0,5\ \cdot\ 8\ \ [\mathrm{m}] = 4\ \ [\mathrm{m}] \ .$$
c) Ahora $h = 8$ [m]. La mitad de la energía se disipará durante la primera pasada por la región de desaceleración y el resto se disipará en la segunda pasada. El carro m quedará finalmente en reposo en el punto C.
b) Después de emerger de la región de desaceleración por primera vez, la energía del carro será $E_1 = mgh/2$. Esta tendrá que ser la energía potencial del resorte cuando esté comprimido con el carro detenido:

$$\frac{mgh}{2} = \frac{1}{2}kx_0^2 \ ,$$

donde x_0 es la compresión máxima del resorte. El carro se detendrá por primera vez a una distancia x_0 a la derecha del punto E. Despejando x_0 se encuentra (con $g = 10$ [m/s^2]),

$$x_0 = \sqrt{\frac{mgh}{k}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 10 \cdot 8}{6 \cdot 10^4}}\ [\mathrm{m}] = 0,816\ [\mathrm{m}] \ .$$

d) El trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte para detener el carro es igual a la energía con que incidió sobre el resorte, $mgh/2 = 500 \cdot 10 \cdot 8/2$ [J]= 20000 [J].

También podemos encontrarla evaluando la integral

$$W = \int_0^{x_0} kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x_0} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\,6 \cdot 10^4 \cdot (0{,}816)^2 \text{ [J]} \,.$$

e) La fuerza que ejerce el resorte cuando está comprimido es $-kx_0\,\hat{x}$, donde $\hat{x}$ apunta hacia la derecha. La aceleración del carro, por lo tanto, será

$$\vec{a} = -\frac{kx_0}{m}\,\hat{x} = -97{,}92 \text{ [m/s}^2\text{]} \,,$$

aproximadamente 10 veces la aceleración de gravedad.

Solución al problema 33

Después de chocar el hilo con el clavo y al formar un ángulo ϕ con la horizontal, la energía potencial de cada masa habrá disminuído en $mgL\,(1+\sin\phi)$. Esta será la energía cinética que tendrá cada masa, es decir,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL\,(1+\sin\phi) \,.$$

Esta relación nos permite encontrar la velocidad $v = v(\phi)$:

$$v^2 = 2gL\,(1+\sin\phi) \,.$$

Como cada masa está recorriendo un círculo sabemos que la fuerza radial neta (la fuerza centrípeta) que se está ejerciendo sobre ella es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{mv^2}{L}\hat{r} = -2mg\,(1+\sin\phi)\,\hat{r} \,.$$

Las únicas fuerzas *"reales"* que están siendo ejercidas sobre cada masa son la fuerza debido a la tensión del hilo y la fuerza de gravedad:

$$\vec{F}_{\text{real}} = -\tau\hat{r} - mg\,\hat{z} \,.$$

La componente radial de esta fuerza es $-\tau + mg\sin\phi$. Esta debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$-\tau + mg\sin\phi = -2mg\,(1+\sin\phi) \,.$$

El hilo se corta si el ángulo ϕ es tal que $\tau = 7mg/2$. Llamando ϕ_0 a ese ángulo se tiene

$$-\frac{7}{2}mg + mg\sin\phi_0 = -2mg\,(1+\sin\phi_0) \,.$$

A partir de esta relación se encuentra que $\sin\phi_0 = 0{,}5$, o sea, $\phi_0 = 30°$.