

## Capítulo 7

# Torque, centro de masas y equilibrio

### 7.1. Producto vectorial

Para lo que sigue, necesitamos introducir una nueva operación entre dos vectores, llamada *producto vectorial* o *producto cruz*.

**Definición:**

Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores. Entonces definimos el vector  $\vec{C}$ , que es el producto vectorial de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , por:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \gamma \hat{C}, \quad (7.1)$$

donde  $\gamma$  es el ángulo (más pequeño) entre los dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y  $\hat{C}$  es un vector unitario perpendicular al plano engendrado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

Hay dos vectores unitarios que son perpendiculares al plano engendrado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Por convención debe usarse el que se obtiene usando la *regla de la mano derecha*.

**Regla de la mano derecha:** Empuñe la mano y estire el dedo pulgar. Oriente los dedos empuñados de manera que apunten a lo largo del ángulo  $\gamma$  (desde  $\vec{A}$  hacia  $\vec{B}$ ); entonces el pulgar indica la dirección y sentido del vector  $\vec{C}$ .

De la definición se desprende que el producto cruz de dos vectores es otro vector. Notemos que la definición del vector  $\vec{C}$  es independiente de cualquier sistema de coordenadas. Es inmediato que

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} &= 0, \\ \hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} &= \hat{z}, \\ \hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} &= \hat{x} \end{aligned}$$

y

$$\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}.$$

Una característica importante del producto cruz es que no es conmutativo, sino anti-conmutativo; en efecto, de la definición se observa inmediatamente que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

El producto cruz es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad .$$

y

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C} \quad .$$

Evaluemos el producto cruz entre los dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en términos de sus coordenadas. Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z},$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \\ &= A_xB_x\hat{x} \times \hat{x} + A_xB_y\hat{x} \times \hat{y} + A_xB_z\hat{x} \times \hat{z} + A_yB_x\hat{y} \times \hat{x} + A_yB_y\hat{y} \times \hat{y} + \\ &\quad + A_yB_z\hat{y} \times \hat{z} + A_zB_x\hat{z} \times \hat{x} + A_zB_y\hat{z} \times \hat{y} + A_zB_z\hat{z} \times \hat{z} \\ &= (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z} + (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} \end{aligned}$$

Considere el paralelogramo engendrado por dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  (ver figura 7.1). El área de tal paralelogramo viene dado por

$$\text{Área} = |\vec{A} \times \vec{B}| \quad .$$

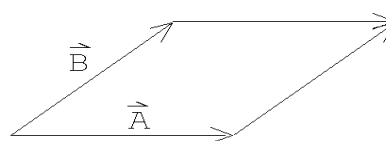


Figura 7.1

Ilustremos el uso del producto cruz con dos problemas.

**Problema 1:** Sean  $P_1 = (2,1,5)$ ,  $P_2 = (5,2,8)$  y  $P_3 = (4,8,2)$  las coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule su área.

**Solución:** El vector que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$  es

$$\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z} \quad ,$$

mientras que el vector que une los puntos  $P_1$  y  $P_3$  es

$$\vec{B} = 2\hat{x} + 7\hat{y} - 3\hat{z} \quad .$$

Ahora observe que el módulo del producto vectorial de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es igual al doble de área del triángulo, por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Área del } \triangle &= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{2} |-24\hat{x} + 15\hat{y} + 19\hat{z}| \simeq 17,04 \end{aligned}$$

**Problema 2:** Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores unitarios en el plano  $x, y$ , que forman ángulos  $-\alpha$  y  $\beta$  con el eje  $\hat{x}$ , respectivamente (ver figura 7.2). Evalúe el producto cruz de estos vectores de dos maneras, una vez usando la definición y la segunda vez usando la expresión en términos de las coordenadas cartesianas, y de esta manera encuentre una expresión para  $\sin(\alpha + \beta)$ .

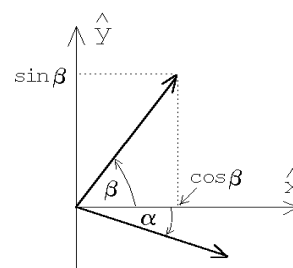


Figura 7.2

**Solución:** El ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es  $\alpha + \beta$ , luego

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| |\sin(\alpha + \beta)| = \sin(\alpha + \beta).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}| &= |(\cos \alpha \hat{x} - \sin \alpha \hat{y}) \times (\cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y})| \\ &= |(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \hat{z}| = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores concluimos que

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.$$

**Ejercicios:**

1. Encuentre un vector unitario  $\hat{A}$  que sea simultáneamente perpendicular a los vectores  $\vec{u} = 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$  y  $\vec{v} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$ . ¿Cuántos vectores unitarios  $\hat{A}$  existen con esta propiedad?
2. Sea  $\vec{A} = \hat{x} + 3\hat{z} - 2\hat{y}$ . Encuentre un vector en el plano  $\hat{x}, \hat{y}$  que sea perpendicular a  $\vec{A}$ .
3. Verifique la expansión del producto vectorial triple:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

por expansión directa en coordenadas cartesianas.

4. Considere los vectores  $\vec{A} = \hat{x} + \hat{y}$ ,  $\vec{B} = \hat{y} + \hat{z}$  y  $\vec{C} = \hat{x} - \hat{z}$ .
  - a) Evalúe el producto escalar triple  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ .
  - b) Evalúe  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ .
  
5. Encuentre un vector que sea perpendicular al plano que pasa por los puntos  $P_1 = (1, 1, 1)$ ,  $P_2 = (1, 2, 3)$  y  $P_3 = (2, 3, 1)$ .  
 Respuesta:  $\vec{C} = \alpha(-4\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z})$  con  $\alpha$  un número real no nulo.
  
6. Encuentre un vector que apunte a lo largo de la intersección de los planos engendrados por los vectores  $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y}$ ,  $\vec{B} = \hat{x} - 3\hat{y}$  y  $\vec{C} = \hat{z} + 2\hat{x} - \hat{y}$ ,  $\vec{D} = \hat{y} + 2\hat{z}$ , respectivamente.

## 7.2. Torque

Considere un objeto (por ejemplo, una barra) que en cierto instante se encuentra en reposo. Que la fuerza total sobre la barra sea nula, y por lo tanto (usando la segunda ley de Newton) su aceleración sea nula, no significa que ésta no empezará a moverse. Una situación de ese tipo se muestra en la figura 7.3. La fuerza total (es decir, la suma vectorial de las dos fuerzas aplicadas sobre la barra) es nula y efectivamente la barra como un todo no se trasladará; sin embargo, las dos fuerzas paulatinamente harán que la barra rote.

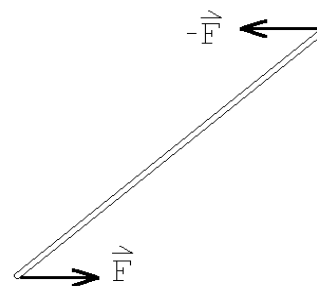


Figura 7.3

Consideremos ahora la palanca mostrada en la figura 7.4. Ignoremos por un momento el peso de la palanca. ¿Qué fuerza debemos hacer para mantener la palanca en equilibrio? Ya en la antigüedad los griegos conocían la respuesta:

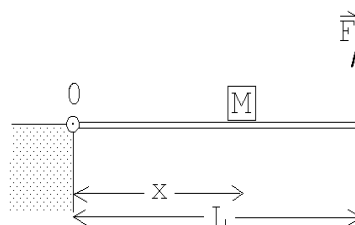


Figura 7.4

$$F = Mg \frac{x}{L} .$$

La ley que describe los resultados empíricos de este tipo de situaciones, llamada *ley de las palancas*, se puede enunciar fácilmente si se introduce el concepto de torque.

**Definición:** El torque  $\vec{\tau}$  que genera una fuerza  $\vec{F}$  respecto a un punto  $P$  es

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F},$$

donde  $\vec{r}$  es el vector que va desde el punto  $P$  hasta el lugar donde se aplica la fuerza  $\vec{F}$ .

El torque es la magnitud responsable de hacer girar a los objetos. El torque apunta en la dirección del eje de giro y en el sentido dado por la regla de la mano derecha (si los dedos empuñados indican el sentido de la rotación entonces el pulgar extendido apunta a lo largo del eje de giro).

Note que el torque que ejerce una fuerza depende de la posición del punto  $Q$  donde ésta se aplica y del  $P$  respecto al cual estamos evaluando el torque. Una fuerza  $\vec{F}$ , respecto a puntos distintos, ejerce torques distintos.

En el objeto mostrado en la figura 7.5 se aplica una fuerza en el punto  $Q$ . La magnitud del torque se puede evaluar multiplicando el tamaño de la fuerza por el brazo. El brazo es la distancia entre el punto  $P$  y recta que indica la dirección de  $\vec{F}$  que pasa por el punto  $Q$ . Con respecto al punto  $P_1$  el módulo del torque producido por la fuerza  $\vec{F}$  es  $Fa$ , donde  $F = |\vec{F}|$  y  $a$  es el brazo. El vector  $\vec{\tau}$  apunta normal a la hoja de papel en dirección del lector. Respecto al punto  $P_2$  el torque generado por la fuerza  $\vec{F}$  es nulo, ya que el brazo es nulo.

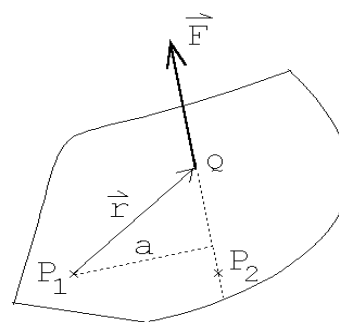


Figura 7.5

El conocimiento empírico que se tiene sobre palancas, y en general, sobre objetos en equilibrio (es decir, objetos que no aceleran ni comienzan a rotar) permite enunciar la siguiente ley (que complementa a la primera ley de Newton):

*Si el torque neto ejercido por las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, respecto a un punto  $P$ , es nulo, entonces el cuerpo no cambiará su estado rotacional (o sea, si no estaba rotando en torno a  $P$ , no comenzará a rotar en torno a ese punto y si estaba rotando con cierta velocidad angular, seguirá rotando con la misma velocidad angular).*

**Ejercicio:** Demuestre que para la situación mostrada en la figura 7.4, el torque neto, en torno al punto  $O$ , ejercido por las tres fuerzas que actúan sobre la palanca, es nulo. (Ignore el peso de la palanca.)

### 7.3. Centro de masas

La evaluación del torque debido al peso de un objeto se simplifica considerablemente si se introduce el concepto de *centro de masas*, que ya mencionado en el capítulo anterior.

Consideremos dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , unidas por una barra de masa despreciable, dentro de un campo gravitacional  $\vec{g} = -g\hat{z}$ . Evaluemos el torque neto debido al peso de las masas en torno al punto  $P$ .

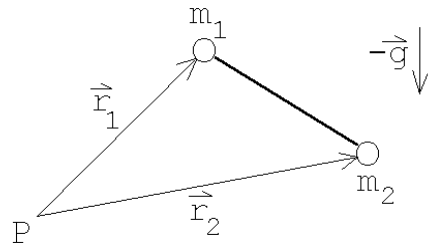


Figura 7.6

Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r}_1 \times (-m_1 g \hat{z}) + \vec{r}_2 \times (-m_2 g \hat{z}) \\ &= \frac{(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{M} \times (-M g \hat{z}) \end{aligned}$$

Sea  $M = m_1 + m_2$  y definamos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) ,$$

entonces

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{\text{cm}} \times (-M g \hat{z}) .$$

O sea, una vez conocido el vector de posición del centro de masas  $\vec{r}_{\text{cm}}$ , podemos evaluar el torque debido a la fuerza de gravedad suponiendo que la masa total del objeto se encuentra en ese lugar.

El concepto *centro de masas* ha aparecido en varias oportunidades. Definémoslo y analicemos algunas de sus propiedades:

Para  $N$  masas discretas  $\{m_j\}_j$  en los lugares  $\{\vec{r}_j\}_j$ , la posición del centro de masas viene dada por

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j ,$$

con  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ . Para el caso de una lámina (en el plano  $x, y$ , con el origen en ese mismo plano) de densidad superficial  $\sigma(x, y)$ , la posición del centro de masas viene dada por

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_{\text{lámina}} (x\hat{x} + y\hat{y}) \sigma(x, y) dx dy .$$

Para un cuerpo sólido de densidad  $\rho(x, y, z)$ , la posición del centro de masas viene dada por

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_{\text{cuerpo}} \vec{r} \rho(x, y, z) dx dy dz .$$

Los siguientes seis ejercicios se refieren a importantes propiedades del *centro de masas*.

**Ejercicios:**

1. A pesar de que el vector *centro de masas*  $\vec{r}_{\text{cm}}$  dependa del origen que se elija para evaluarlo, la posición del centro de masas es independiente de la elección del origen.

Sea  $\vec{r}_{\text{cm}}$  el vector posición del centro de masas de un objeto evaluado usando un sistema de referencia cuyo origen es  $O$  y  $\vec{r}'_{\text{cm}}$  el resultado que se obtiene usando otro sistema de coordenadas cuyo origen es  $O'$ . Demuestre que

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \vec{r}'_{\text{cm}} + \vec{a}' ,$$

donde  $\vec{a}$  es el vector que une los dos orígenes.

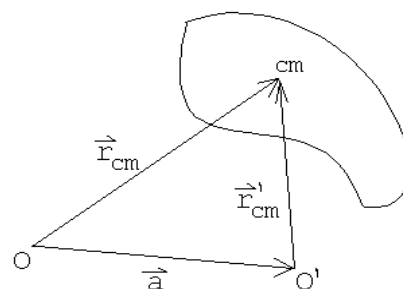


Figura 7.7

2. Considere tres masas  $m_1 = m_0$ ,  $m_2 = 3m_0$  y  $m_3 = 6m_0$ , ubicadas en los lugares

$$\vec{r}_1 = \hat{x} + 3\hat{y} , \quad \vec{r}_2 = -\hat{x} + 2\hat{z} \quad \text{y} \quad \vec{r}_3 = 5\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z} ,$$

respectivamente. Encuentre la posición del centro de masas usando los dos procedimientos siguientes:

- a) Usando la fórmula

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_j m_j} .$$

- b) Encontrando primero el centro de masas del subsistema formado por las partículas 1 y 2 solamente y luego encontrando el centro de masas de este subsistema con la partícula # 3.
- c) Formule en palabras una generalización (importante) de este resultado.

3. Convéncese de que si un objeto tiene ejes y planos de simetría, entonces el centro de masas se ubica en tales planos y ejes. Por ejemplo, de acuerdo a este resultado, en una esfera, un cilindro recto, etc., el centro de masas se ubicará al centro de tales objetos.
4. Considere un cuerpo compuesto de  $N$  masas  $m_j$ , situados en los lugares  $\vec{r}_j$ , con  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ . Demuestre que la energía potencial de tal cuerpo, en un campo gravitacional constante, se puede evaluar suponiendo que toda su masa  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$  está concentrada en su centro de masas.
5. Considere un cuerpo compuesto de  $N$  masas  $m_j$ , situados en los lugares  $\vec{r}_j$ , con  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ . Demuestre que para evaluar el torque total respecto a un punto  $P$  debido a la fuerza de gravedad (constante), basta suponer que toda la masa del cuerpo está concentrada en el centro de masas.
6. Considere un sistema que consiste de dos masas  $m$  y  $M$  puntuales separadas por una distancia  $a$ . Demuestre que la posición del centro de masas del sistema se ubica sobre la recta que las une, encontrándose más cercano a la masa mayor.

#### 7.4. Evaluación numérica del centro de masas de un semicírculo

**Problema:** Encontrar numéricamente el centro de masas de una lámina semicircular de radio  $R$  y densidad superficial uniforme  $\sigma_0$ .

**Solución:** Dividamos el semicírculo en  $N$  franjas de ancho  $dz = R/N$  y luego aproximemos las franjas por rectángulos (ver figura 7.8). El centro de masa del rectángulo  $j$  se encontrará en el lugar

$$\vec{r}_j = \left( j dz - \frac{1}{2} dz \right) \hat{z} = \frac{R(j - 1/2)}{N} \hat{z} \quad j = 1, \dots, N \quad .$$

El área del rectángulo  $j$  viene dada por

$$\begin{aligned} A_j &= (\text{ancho}) \cdot (\text{largo}) \\ &= dz \cdot 2x_j \\ &= 2 \cdot \frac{R}{N} \cdot \sqrt{R^2 - R^2(j-1)^2/N^2} \\ &= 2 \left( \frac{R}{N} \right)^2 \sqrt{N^2 - (j-1)^2} \end{aligned}$$



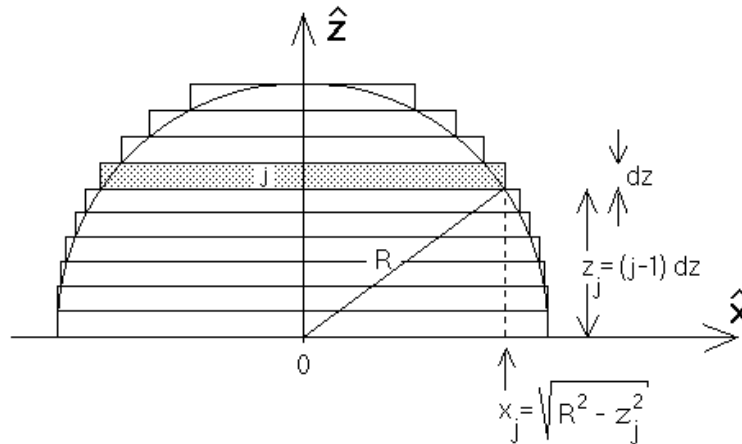


Figura 7.8

Encontremos ahora el centro de masas de los centros de masas de todos los rectángulos. Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= \frac{\sum_j \vec{r}_j \cdot (\text{masa de rectángulo } j)}{(\text{masa del semicírculo})} \\ &= \sum_j \left( \frac{R(j-1/2)}{N} \hat{z} \sigma_0 2 \left( \frac{R}{N} \right)^2 \sqrt{N^2 - (j-1)^2} \right) \frac{1}{\sigma_0 \frac{1}{2} \pi R^2} \\ &= \frac{4R}{\pi N^3} \sum_{j=1}^N \left( \sqrt{N^2 - (j-1)^2} (j-1/2) \right) \hat{z} \\ &= f(N) R \hat{z} , \end{aligned}$$

donde

$$f(N) \equiv \frac{4}{\pi N^3} \sum_{j=1}^N \left( \sqrt{N^2 - (j-1)^2} (j-1/2) \right) .$$

El valor exacto para  $\vec{R}_{cm}$  se obtiene para valores grandes de  $N$ .

Para valores de  $N$  no demasiado grandes podemos evaluar  $f(N)$  con una calculadora (hágalo para  $N = 1$  y  $N = 2$  y compare su resultado con el de la tabla). Para valores grandes de  $N$  debemos hacer un pequeño programa y usar una computadora. Un pequeño programa en BASIC que permite evaluar  $f(N)$  (para  $N = 500$ ) es:

```

PI = 3.1415926
N = 500
S = 0
FOR J = 1 TO N
S = S + SQR(N*N - (J - 1)*(J - 1)) * (J - 0.5)
NEXT J
F = 4*S / (PI*N*N*N)
PRINT N , F
    
```

$N$	$f(N)$	Error relativo %
1	0.6366	50
2	0.5826	35
3	0.5344	26
5	0.4972	17
10	0.4642	9.4
20	0.4456	5.0
50	0.4334	2.1
100	0.4390	1.1
200	0.4268	0.56
500	0.4254	0.24
1000	0.42490	0.12
Exacto	0.4244	

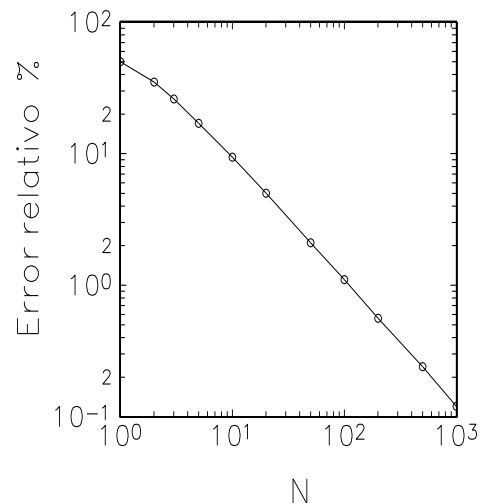


Figura 7.9

Los resultados que arroja este programa para distintos valores de  $N$ , se presentan en la tabla adjunta. Recurriendo al cálculo integral, es posible encontrar el resultado exacto, es decir, el valor de  $f(\infty)$ ; éste resulta ser  $4/(3\pi) = 0,4244\dots$  En la figura 7.9 se muestra un gráfico del error relativo entre el valor numérico y el valor exacto en función de  $N$ . A partir de  $N = 100$  el error es menor que un 1%.

Nota: El método numérico empleado aquí para resolver el problema no es el más eficiente. La bondad del método empleado radica en su simpleza.

**Ejercicio:** Use un procedimiento análogo para calcular la posición del centro de masas de una semiesfera de radio  $R$  y densidad de masa (uniforme)  $\rho_0$ .

## 7.5. Equilibrio

Un cuerpo (objeto o sistema), que en cierto instante está en reposo, seguirá en reposo si la fuerza neta que actúan sobre él es nula y además el torque neto de estas fuerzas (respecto a cualquier punto), también es nulo. Un cuerpo que está en reposo y continúa en ese estado se dice que está en *equilibrio*.

### Leyes de equilibrio:

Para que un cuerpo esté en equilibrio es necesario que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- i) La fuerza neta sobre el objeto debe ser nula.
- ii) El torque neto sobre el objeto debe ser nulo.

Consideremos un objeto (cuerpo rígido) formado por  $N$  masas  $\{m_j\}$  ubicadas en los lugares  $\{\vec{r}_j\}$  (respecto a un origen  $O$ ) y unidas por barras rígidas sin masas (ver figura 7.10). Sea  $\vec{F}_j$  la fuerza externa que actúa sobre cada una de las masas  $m_j$ .

A continuación, usando esta figura, demostraremos dos resultados importantes:

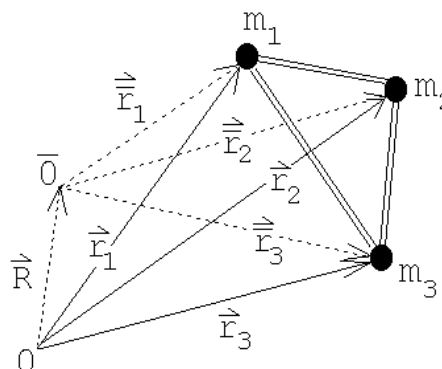


Figura 7.10

*Si la fuerza neta sobre un cuerpo es cero entonces el torque neto es independiente del punto respecto del cual se evalúa. En particular, si el torque es nulo respecto a un punto, también lo será respecto a cualquier otro punto.*

Demostración:

Sean  $\{\vec{r}_j\}$  y  $\{\vec{r}_j^{\bar{O}}\}$  los vectores de posición de las masas  $\{m_j\}$  respecto a un origen  $O$  y  $\bar{O}$ , respectivamente. Sea además  $\vec{R}$  el vector que une los puntos  $O$  y  $\bar{O}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j \\ &= \sum_j (\vec{R} + \vec{r}_j^{\bar{O}}) \times \vec{F}_j \\ &= \sum_j \vec{R} \times \vec{F}_j + \sum_j \vec{r}_j^{\bar{O}} \times \vec{F}_j \\ &= \vec{R} \times \sum_j \vec{F}_j + \vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{0} + \vec{\tau} = \vec{\tau}. \end{aligned}$$

El otro resultado importante es el siguiente:

*Si la fuerza neta  $\vec{F}_{tot}$  que actúa sobre un cuerpo de masa  $M$  no es nula, entonces el punto del cuerpo que es acelerado de acuerdo a la segunda ley de Newton es el centro de masas. O sea, se tiene que:*

$$\vec{F}_{tot} = M\vec{r}_{cm}.$$

Demostración:

En primer lugar notemos que las barras que unen las distintas masas en la figura 7.10 transmiten fuerzas. Sea  $\vec{F}_{ij}$  la fuerza que ejerce la masa  $m_j$  sobre la masa  $m_i$ . Debido al principio de acción y reacción  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ .

La fuerza que ejercen todas las demás partículas sobre la masa  $m_i$  viene dada por  $\sum_j \vec{F}_{ij}$ . Por lo tanto, la ecuación de movimiento para la partícula  $i$  viene dada por

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} .$$

Sumando todas las ecuaciones (o sea, sumando sobre  $i$ ) se obtiene

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} .$$

Debido al principio de acción y reacción, la última suma (sobre  $i$  y  $j$ ) es nula, luego

$$M \frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{tot}} .$$

Pero

$$\frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} = \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}} ,$$

luego

$$\vec{F}_{\text{tot}} = M \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}} .$$

Debido a la importancia de este resultado lo reiteramos en palabras: La fuerza neta que actúa sobre un objeto acelera al objeto como un todo. El lugar geométrico que cumple con la segunda ley de Newton es el centro de masas. O sea, para analizar el movimiento traslacional, toda la masa se puede pensar como si estuviese concentrada en el centro de masas, siendo éste también el lugar en que se aplica la fuerza neta.

Corolario: Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es nula, entonces el centro de masas del cuerpo se traslada con velocidad uniforme (o nula).

Observe que no es necesario especificar el punto respecto al cual se está evaluando el torque neto, ya que, de acuerdo a los resultados expuestos anteriormente, si la fuerza neta es nula y el torque es nulo respecto a un punto, también lo será con respecto a cualquier otro punto.

Ilustremos el uso de las leyes del equilibrio resolviendo un problema.

### Problema:

Una escalera de masa  $m$  y largo  $L$  se encuentra apoyada contra una pared lisa (o sea, no hay roce entre la escalera y la pared), formando un ángulo  $\alpha$  con ella. Una persona de masa  $M$  se encuentra sobre la escalera. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de roce estático que debe existir entre el suelo y la escalera para que la escalera no resbale, independientemente de la altura a la que se encuentra la persona?

**Solución:**

Introduzcamos el sistema de coordenadas mostrado en la figura adjunta. Para que el sistema se encuentre en equilibrio, la fuerza total sobre la escalera debe ser nula. Hay cuatro fuerzas actuando sobre la escalera:

- i) El peso de la escalera  $-mg\hat{z}$ ; esta fuerza se aplica en el centro de masas de la escalera.
- ii) El peso de la persona  $-Mg\hat{z}$ .
- iii) La reacción que ejerce la pared sobre la escalera. Como la pared es lisa (no hay roce) tal fuerza es perpendicular a la pared:  $\vec{F}_p = -F_p\hat{x}$ .
- iv) La reacción del suelo sobre la escalera. Esta es  $\vec{F}_s = F_N\hat{z} + f_r\hat{x}$ , donde  $F_N$  es la fuerza normal y  $f_r$  es la fuerza de roce.

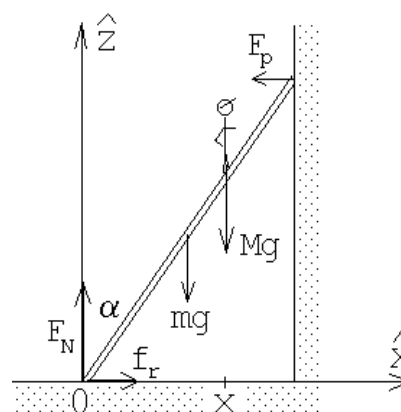


Figura 7.11

La condición de que la fuerza total sea nula nos da la relación:

$$-mg\hat{z} - Mg\hat{z} - F_p\hat{x} + F_N\hat{z} + f_r\hat{x} = \vec{0}.$$

De aquí se deducen las ecuaciones

$$F_N = (m + M)g \quad (7.2)$$

y

$$f_r = F_p. \quad (7.3)$$

Evaluemos el torque total en torno al origen. Como la escalera está en equilibrio, el torque neto debe ser nulo. Se tiene:

$$Mgx \hat{y} + mg \frac{L}{2} \sin \alpha \hat{y} - F_p L \cos \alpha \hat{y} = \vec{0},$$

o sea,

$$F_p = \frac{g(Mx + m \frac{L}{2} \sin \alpha)}{L \cos \alpha}. \quad (7.4)$$

De las ecuaciones (7.3) y (7.4) se encuentra que la fuerza de roce viene dada por

$$f_r = \frac{g(2Mx + mL \sin \alpha)}{2L \cos \alpha}.$$

El valor máximo de la fuerza de roce se obtiene cuando la persona sube hasta la parte más alta de la escalera ( $x = L \sin \alpha$ ). En ese caso la fuerza de roce es

$$f_r = g \left( M + \frac{m}{2} \right) \tan \alpha.$$

La fuerza de roce  $f_r$  debe ser menor que el máximo posible, que es  $\mu_e F_N$ , o sea, se debe cumplir la relación

$$g \left( M + \frac{m}{2} \right) \tan \alpha \leq \mu_e F_N = \mu_e (M + m) g .$$

De aquí se deduce que el menor valor posible que puede tener  $\mu_e$  para que la escalera no resbale es

$$\mu_e^{\min} = \frac{2M + m}{2(M + m)} \tan \alpha .$$

## 7.6. Problemas

1. Al moverse una carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}$  en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$ , actúa sobre la partícula una fuerza (la así llamada “Fuerza de Lorentz”) dada por

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) .$$

Supongamos que para determinar la dirección y magnitud de un campo magnético constante, un investigador realiza dos experimentos, midiendo en cada uno de ellos la fuerza que actúa sobre una carga:

- a) Primero hace pasar la carga  $q$  a través del campo magnético con velocidad  $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ . El investigador mide una fuerza  $\vec{F} = F_0 \cdot (2\hat{z} - 4\hat{y})$ .
- b) Luego hace pasar la carga  $q$  con velocidad  $\vec{v} = v_0 \hat{z}$ , midiendo una fuerza  $\vec{F} = F_0 \cdot (\hat{y} - 2\hat{x})$ .

A partir de estos resultados encuentre el campo magnético  $\vec{B}$  (en función de  $v_0$ ,  $F_0$  y  $q$ ).

Respuesta:

$$\vec{B} = \frac{F_0}{qv_0} (\hat{x} + 2\hat{y} + 4\hat{z}) .$$

2. Considere una partícula cuya carga eléctrica y masa es  $q$  y  $m$ , respectivamente. La partícula se mueve en un campo magnético homogéneo  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Si en el instante  $t = 0$  la partícula se encuentra en el origen ( $\vec{r}(0) = \vec{0}$ ) y su velocidad en ese instante es  $\vec{v}(0) = v_0 \hat{x}$ , encuentre el vector de posición  $\vec{r}(t)$  en función del tiempo. (La fuerza que el campo magnético ejerce sobre la partícula viene dada por la *fuerza de Lorentz*; ver problema anterior.) Indicación: recuerde lo que sabe sobre el movimiento circular uniforme.
3. Demuestre que la posición del centro de masas de una lámina triangular de densidad uniforme se ubica en el lugar donde se cortan las tres transversales de gravedad del triángulo.

4. En cinco de los seis vértices de un hexágono regular hay una masa  $m_0$ . Encuentre la posición del centro de masas.

5. Encuentre la posición del centro de masas de una lámina de densidad (de masa) uniforme  $\sigma_0$  y que tiene la forma indicada en la figura adjunta.

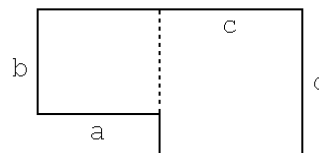


Figura 7.12

6. Encuentre la posición del centro de masas de un disco de densidad superficial  $\sigma_0$  y que tiene un agujero circular como se indica en la figura adjunta.

Respuesta: El centro de masas del disco con agujero queda al lado opuesto de la perforación y a una distancia  $a = r^2d/(R^2 - r^2)$  del centro del disco de radio  $R$ .

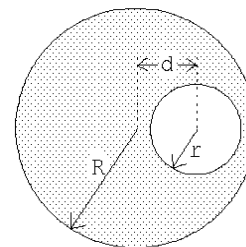


Figura 7.13

7. La figura muestra un letrero luminoso de masa  $m$  que cuelga de una barra (de masa despreciable) que se mantiene horizontal con la ayuda de una cuerda. Calcule la tensión de la cuerda y la fuerza ejercida por la barra contra la pared.

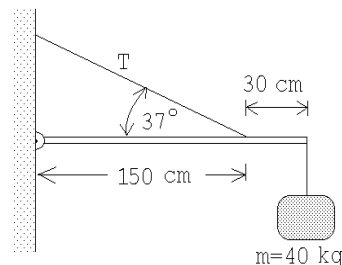


Figura 7.15

8. Considere una estructura formada por dos barras uniformes de largos  $a$  y  $b$ , unidas de modo que forman un ángulo recto y que cuelga con hilo desde el cielo (ver figura adjunta). Determine el ángulo  $\alpha$  de la estructura cuando ella se encuentra en equilibrio.

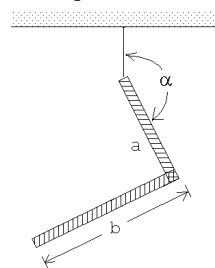


Figura 7.14

9. Describa un procedimiento que permita determinar experimentalmente la posición del centro de masas de una lámina plana irregular con densidad desconocida (y no necesariamente uniforme).

(Observe que al colgar un cuerpo de un punto  $P$  y estar éste en equilibrio, el centro de masas siempre debe estar sobre la normal que pasa por  $P$ .)

10. Una barra, cuya masa es de 10 Kg y tiene tres metros de largo, se dobla en  $45^\circ$  a 1 m de uno de los extremos y se cuelga como se indica en la figura adjunta. La estructura se encuentra en equilibrio gracias a una masa  $M$  que se cuelga en uno de los extremos.

- a) Encuentre la tensión  $T$  y el valor de  $M$ . ¿El equilibrio es estable o inestable?
- b) Conteste nuevamente las mismas preguntas de la parte a), pero asumiendo ahora que la barra al lado izquierdo, en lugar de estar doblada hacia abajo en  $45^\circ$ , está doblada hacia arriba en  $45^\circ$ .

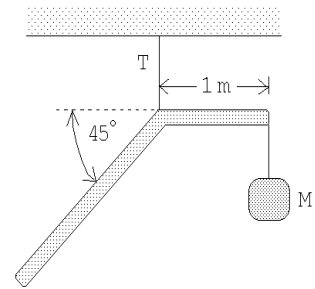


Figura 7.16

11. Considere una lámina triangular uniforme, de masa  $M = 5$  Kg, que está sujeta a una pared con una articulación y colgada del cielo con una cuerda, tal como se muestra en la figura adjunta. Encuentre la tensión  $T$  de la cuerda.

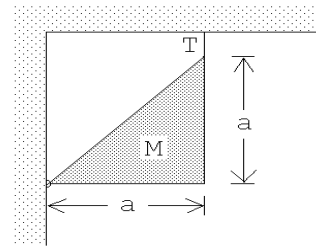


Figura 7.17

12. Encuentre la posición de equilibrio de una varilla de largo  $L$  colocada dentro de un pocillo. Considere al pocillo como una semiesfera de radio  $R$  y asuma que entre éste y la varilla no hay roce.

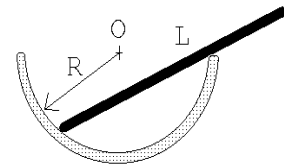


Figura 7.18

13. ¿Se podrá fomar una torre con ladrillos (suelos), uno encima de otro (ver figura), de manera que el ladrillo de más arriba esté desplazado en más de una unidad con respecto al de más abajo, sin que la torre se desplome?

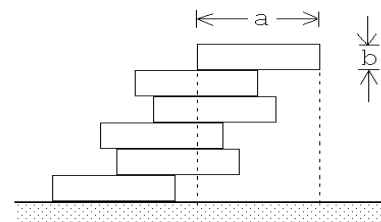


Figura 7.19

Indicación: Comience el análisis con los ladrillos superiores.



14. Tres tambores del mismo radio están arrumbados como se indica en la figura adjunta. Encuentre el mínimo coeficiente de roce estático que debe existir entre los tambores y también entre los tambores y el suelo de manera que el sistema no se derrumbe.

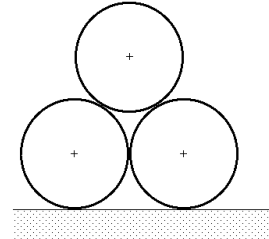


Figura 7.20

15. Un triángulo equilátero, de lado  $a = 10$  cm y masa  $M = 10$  kg se sujeta en forma rígida a una polea de radio  $R = 4$  cm. El triángulo actúa de contrapeso para mantener en equilibrio a una masa  $m = 1$  kg que cuelga de un hilo enrollado en la polea (ver figura 7.18)

- a) Encuentre el valor del ángulo  $\beta$  que mantiene el sistema en equilibrio. ( $\beta$  es el ángulo entre la normal y la altura del triángulo.)
- b) ¿Cuál es el máximo valor de  $m$  para el cual el sistema se mantendrá en equilibrio?

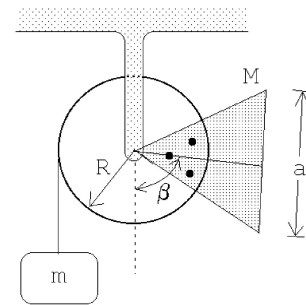


Figura 7.21

16. De una pieza metálica cuadrada, de densidad superficial uniforme  $\sigma_0$ , se recorta un triángulo isósceles de manera tal que la lámina resultante quede en equilibrio en cualquier posición si se sujeta desde el punto  $P$ . ¿Cuál es la altura del triángulo?

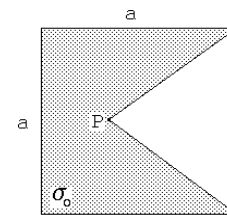


Figura 7.22

17. Una barra de masa  $M$  y largo  $L$ , que puede pivotar libremente en torno a  $O$ , se mantiene en equilibrio con una masa  $m$  y una cuerda, tal como se muestra en la figura adjunta. Encuentre el ángulo  $\alpha$  para el caso en que  $m/M = 0,5$ . ¿El equilibrio es estable o inestable?

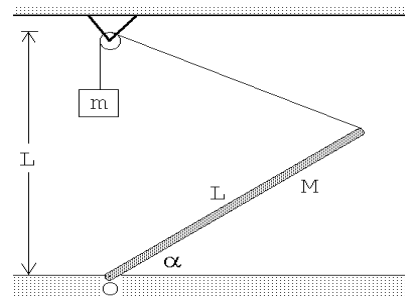


Figura 7.23

18. Considere un puente cuyo armazón consiste de 14 soportes de largo  $a$ . (En la figura se observan los 7 soportes de uno de los lados.) Asuma que los soportes sólo transmiten fuerzas a lo largo de ellos, o sea, en cada unión sólo se transmiten fuerzas y no torques. Encuentre la tensión adicional (al generado por el peso del puente) que debe soportar cada soporte si por el centro del puente pasa un camión de peso  $W$ .

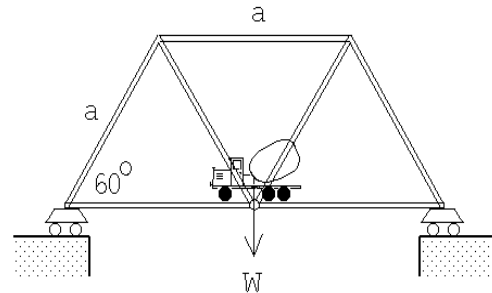


Figura 7.24

Especifique en cada caso si la tensión es de compresión o de tracción.

19. Una cadena de masa  $M$  y largo  $L$  se encuentra apoyada (en equilibrio) sobre un cono recto cuyo ángulo entre la normal y el manto es  $\alpha$ . Encuentre la tensión de la cadena. Indicación: Aplique las leyes de equilibrio a un pequeño trozo (infinitesimal) de cadena.

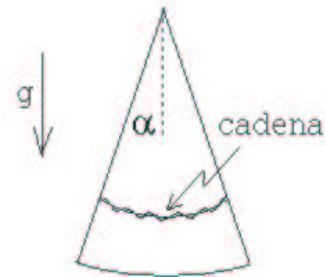


Figura 7.25

20. Un objeto formado por tres láminas cuadradas de lado  $a$ , homogéneas y de igual densidad, descansa sobre una superficie horizontal apoyado en dos pivotes colocados en los vértices del cuadrado inferior (ver figura 7.26).

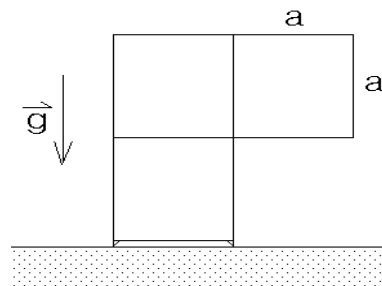


Figura 7.26

- a) Encuentre la posición del centro de masas.
- b) Calcule la razón de la magnitud de las fuerzas de reacción de cada pivote.
21. Una regla 'T' de masa  $M$ , largo  $a$  y barra transversal  $b$  posa sobre un plano horizontal pulido como se indica. Calcule las reacciones normales en cada punto de contacto con el suelo.

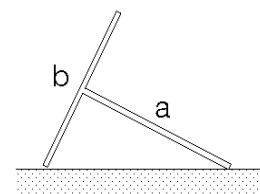


Figura 7.27

22. Considere una semiesfera homogénea de radio  $R$ . Demuestre que el centro de masas de la semiesfera está ubicado sobre el eje de simetría y a una distancia  $b = 3R/8$  de la base.

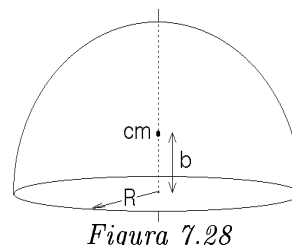


Figura 7.28

23. Considere una semiesfera homogénea de radio  $R$  que se encuentre sobre un plano inclinado. Existe un roce estático que evita que la semiesfera se deslice por el plano. Determine el máximo ángulo de inclinación  $\beta$  que puede tener el plano para que la semiesfera no se “de vuelta”.

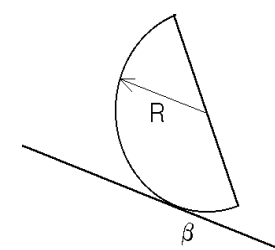


Figura 7.29

24. Considere una semiesfera de radio  $R$ , hecha de un material de densidad  $\rho_0$ , que se encuentra con la parte curva sobre una superficie horizontal (ver figura adjunta). El centro de masas de una semiesfera homogénea queda sobre el eje de simetría a una distancia  $b = 3R/8$  de la base.

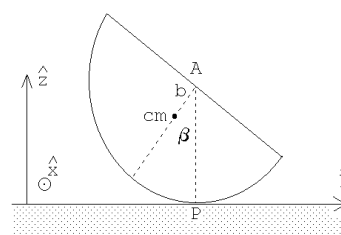


Figura 7.30

- Encuentre la magnitud y dirección del torque, respecto al punto de apoyo, ejercido por la fuerza de gravedad cuando la semiesfera se ladea en un ángulo  $\beta$ . Observe que el torque que aparece trata de hacer volver a la semiesfera a su posición de equilibrio (o sea, la posición de equilibrio es estable).
- Coloquemos ahora un cilindro homogéneo hecho del mismo material, del mismo radio  $R$  y altura  $h$ , sobre el cilindro. Determine la posición del centro de masas del sistema compuesto.
- Describa en palabras la condición que debe satisfacer la posición del centro de masas para que la posición de equilibrio del sistema compuesto siga siendo estable.
- Encuentre la altura límite del cilindro para la cual el sistema compuesto pierde su estabilidad.

25. Considere una semiesfera de radio  $R$ , hecha de un material de densidad  $\rho_0$ , que se encuentra sobre una superficie horizontal y apoyada contra una pared tal como se muestra en la figura adjunta. El centro de masas de una semiesfera homogénea queda sobre el eje de simetría y a una distancia  $b = 3R/8$  de la base. Suponga que, entre la semiesfera y el suelo el coeficiente de roce estático es  $\mu = 3/16$ , mientras que entre la pared y la semiesfera el roce es nulo.

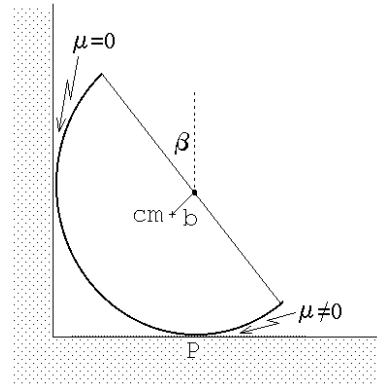


Figura 7.31

- Haga un diagrama de cuerpo libre para la semiesfera.
- Encuentre la magnitud y dirección del torque, respecto al punto de apoyo  $P$ , ejercido por la fuerza de gravedad cuando la semiesfera está ladeada en un ángulo  $\beta$ .
- Encuentre la fuerza de roce entre la semiesfera y el suelo.
- Encuentre el ángulo de inclinación máximo  $\beta_{\max}$  posible para que la esfera no resbale.
- Coloquemos ahora un cilindro homogéneo, hecho del mismo material, del mismo radio  $R$  y de altura  $h$  sobre el cilindro. Determine la posición del centro de masas del sistema compuesto. (1 punto)
- Encuentre la altura límite  $h_{\max}$  del cilindro a partir de la cual, para  $h > h_{\max}$ , el sistema compuesto se da vuelta (es decir, pierde su estabilidad).

26. Una semiesfera homogénea de masa  $M$  y radio  $R$  se ha cortado en dos mitades. El sistema se dispone con las dos mitades, cara a cara, y con la superficie de corte vertical. A fin de que las mitades no se separen, una cuerda sin roce y con masas iguales en sus extremos, es dispuesta como se indica en la figura. Determine las masas mínimas a atar en los extremos de la cuerda para que las mitades permanezcan juntas.

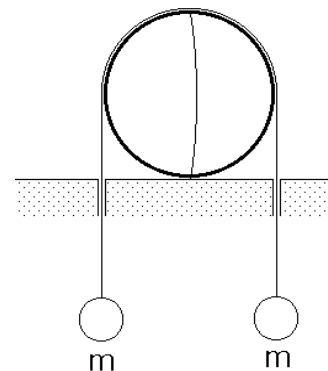


Figura 7.32

27. En los extremos de una barra de masa despreciable se adhieren bolas de mas  $m$  y  $2m$ , respectivamente. El sistema posa sobre un tiesto de fondo esférico resbaloso, de radio igual al largo de la barra. Calcule el ángulo que la barra forma con la vertical.

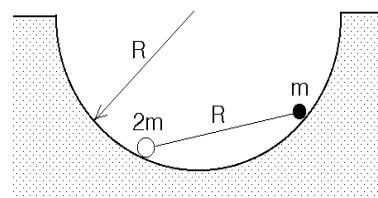


Figura 7.33

28. Un vaso cilíndrico (abierto por arriba), de radio basal  $a$  y altura  $b$ , hecho de un material de densidad superficial uniforme, posa sobre un plano inclinado y no resbala gracias a un tope fijo en el plano. Demuestre que el centro de masas se ubica a lo largo del eje y a una distancia  $b^2/(a + 2b)$  de la base. Determine el ángulo de inclinación máximo del plano de modo que el vaso no vuelque.

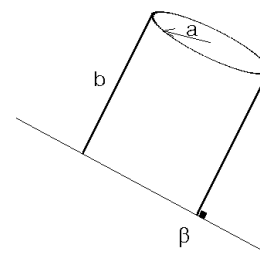


Figura 7.34

29. En la figura se muestra un cilindro de masa  $M$  y radio  $R$ , el cual se ata a la muralla mediante una cuerda. Alrededor de un calado que se le ha hecho al cilindro se enrolla una cuerda ideal. De la cuerda cuelga una masa  $m$  por determinar. Si el coeficiente de roce entre el suelo y el cilindro es  $\mu$ , determine la masa máxima a colgar para que el cilindro no rote.

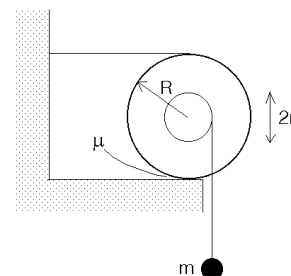


Figura 7.35

30. Un semicilindro de radio  $R$  y peso  $W$  se encuentra en equilibrio estático sobre un plano horizontal, con un pequeño bloque de peso  $Q$  sobre él. El bloque está ligado mediante un resorte ideal de largo natural  $\ell_0 = R$  y constante elástica  $k$  a un punto  $A$  en el borde (ver figura). Suponga que no hay roce entre la superficie del cilindro y la masa de peso  $Q$ . Determine el ángulo  $\alpha$  de equilibrio. Considere conocida la distancia  $D$  a la que se encuentra el centro de masas del punto  $O$ . Analice con cuidado que pasa cuando  $Q$  es pequeño.

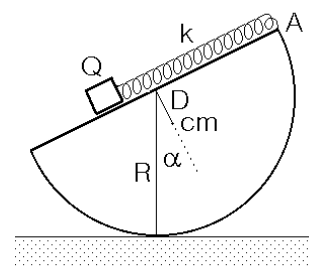


Figura 7.36

## 7.7. Solución a algunos de los problemas

### Solución al problema 12

Elijamos el origen y los ejes tal como se muestra en la figura adjunta. Sea  $\alpha$  el ángulo que la varilla forma con la horizontal, o sea, el ángulo  $ABO$  es  $\alpha$ . Por ser  $AOB$  un triángulo isósceles, se tiene que el ángulo  $AOB$  también es  $\alpha$ .

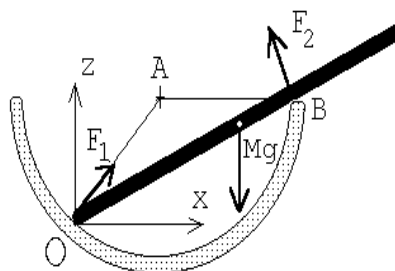


Figura 7.37

Como no hay roce entre las superficies de contacto, las fuerzas de reacción debe ser perpendiculares a las superficies de contacto. En otras palabras: la fuerza de reacción  $\vec{F}_1$  en  $O$  será a lo largo del “radio”  $OA$ , mientras que la fuerza de reacción  $\vec{F}_2$  en  $B$  será perpendicular a la varilla. Que la fuerza total horizontal sobre la varilla sea cero nos da la relación

$$F_1 \cos(2\alpha) = F_2 \sin \alpha . \quad (7.5)$$

La relación correspondiente para la componente vertical es

$$Mg = F_2 \cos \alpha + F_1 \sin(2\alpha) . \quad (7.6)$$

Para que la varilla esté en equilibrio también el torque total (respecto a  $O$ ) debe ser nulo. La fuerza  $F_1$  no ejerce torque (ya que su brazo es cero); el peso ejerce un torque  $\vec{\tau}_g = Mg(L/2) \cos \alpha \hat{y}$ , mientras que el torque generado por  $\vec{F}_2$  es  $\vec{\tau}_2 = -F_2 2R \cos \alpha \hat{y}$ . De esta manera la condición de que el torque total sea nulo nos da la relación

$$Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 2F_2 R \cos \alpha . \quad (7.7)$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. De la última ecuación se deduce inmediatamente que

$$F_2 = \frac{MgL}{4R} . \quad (7.8)$$

De la ecuación (7.5) se encuentra

$$F_1 = F_2 \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} . \quad (7.9)$$

Usando (7.8) y (7.9) en (7.6), se tiene

$$Mg = \frac{MgL}{4R} \left[ \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} \right] ,$$

o sea,

$$\Gamma \equiv \frac{4R}{L} = \cos \alpha + \frac{2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} .$$

La última relación es una ecuación de segundo grado para  $\cos \alpha$ ; resolviéndola se encuentra finalmente

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\Gamma^2}}{4\Gamma} .$$

**Solución al problema 14**

La figura adjunta muestra las fuerzas que actúan sobre los tambores (las flechas con líneas llenas son fuerzas que actúan sobre el tambor inferior, mientras que las flechas con líneas segmentadas corresponden a fuerzas que actúan sobre el tambor superior). Observe que no hay una fuerza horizontal entre los dos tambores inferiores. Observe también que el ángulo  $\alpha$  entre la horizontal y la recta que une a los centros de un tambor inferior con el tambor superior es de  $60^\circ$ , luego  $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$  y  $\cos \alpha = 1/2$ .

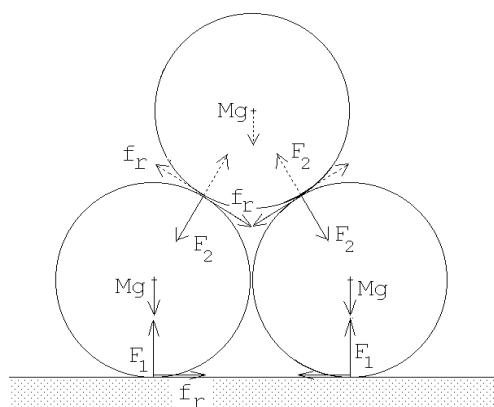


Figura 7.38

La únicas fuerzas que producen un torque sobre el tambor inferior (respecto a su centro) son las dos fuerzas de roce. Como el torque total sobre el tambor inferior debe ser nulo se deduce que ambas fuerzas de roce deben tener la misma magnitud; llamémosla  $f_r$ .

La fuerza neta vertical sobre uno de los tambores inferiores debe ser nula; esto nos da la relación

$$F_1 - Mg - F_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - f_r \frac{1}{2} = 0 .$$

La relación correspondiente a las fuerzas horizontales es

$$f_r + f_r \frac{\sqrt{3}}{2} - F_2 \frac{1}{2} = 0 .$$

Como  $2F_1$  debe ser igual al peso total de los tres tambores se tiene

$$F_1 = \frac{3}{2}Mg .$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas (en realidad la tercera ecuación ya es la solución de una de las incógnitas). Para las otras dos incógnitas  $f_r$  y  $F_2$  se encuentra

$$f_r = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) Mg$$

y

$$F_2 = \frac{1}{2}Mg .$$

Si  $\mu_1$  es el coeficiente de roce estático entre el tambor inferior y el suelo, y  $\mu_2$  es el coeficiente de roce entre los tambores inferior y superior, entonces, para que el sistema no se derrumbe, debe cumplirse

$$f_r \leq \mu_1 F_1 \quad \text{y} \quad f_r \leq \mu_2 F_2 .$$

De estas desigualdades se deduce, finalmente, que

$$\mu_1 \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad \mu_2 \geq 2 - \sqrt{3} .$$

**Solución al problema 19**

El radio del círculo que forma la cadena es

$$R = \frac{L}{2\pi} .$$

Consideremos un trozo de cadena de largo infinitesimal  $R d\theta$ . Debido a la curvatura, la tensión  $T$  ejerce sobre el pequeño trozo de cadena una fuerza neta  $F_T$  hacia el centro  $O$  (ver figura 7.39a):

$$\vec{F}_T = -2T \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \hat{r} = -T d\theta \hat{r} .$$

No hay roce entre la cadena y el cono, luego la fuerza que el cono ejerce sobre la cadena es perpendicular al manto. Sea  $F_N$  la magnitud de esta fuerza. De la la figura 7.39b se desprende que

$$\vec{F}_N = F_N \cos \alpha \hat{r} + F_N \sin \alpha \hat{z} .$$

Por último, la otra fuerza que actúa sobre el trozo de cadena, debido a la gravedad, es

$$\vec{F}_g = -\frac{d\theta}{2\pi} Mg \hat{z} .$$

Como el trozo de cuerda está en reposo, la suma de las tres fuerzas debe ser nula, es decir,

$$\vec{F}_T + \vec{F}_N + \vec{F}_g = -T d\theta \hat{r} + F_N \cos \alpha \hat{r} + F_N \sin \alpha \hat{z} - \frac{d\theta}{2\pi} Mg \hat{z} = 0 .$$

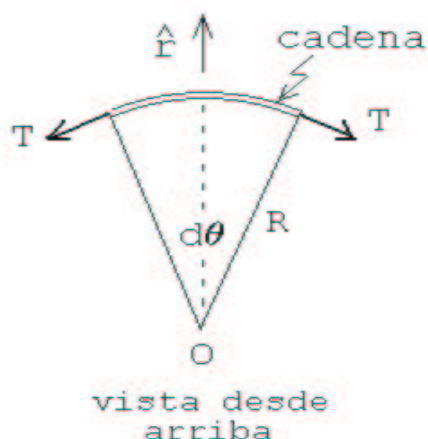


Figura 7.39a

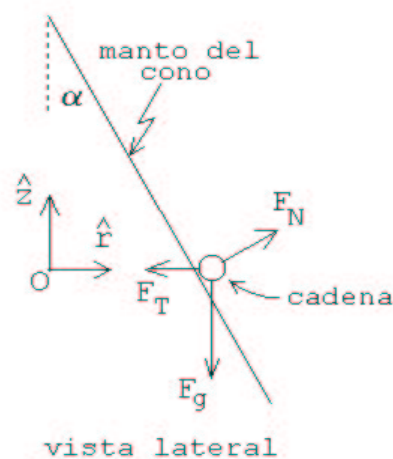


Figura 7.39b



Igualando las componentes se obtienen las relaciones

$$T d\theta = F_N \cos \alpha$$

y

$$Mg \frac{d\theta}{2\pi} = F_N \sin \alpha .$$

Despejando la tensión se encuentra, finalmente

$$T = \frac{Mg}{2\pi \tan \alpha} .$$

### Solución al problema 22

Para evaluar la posición del centro de masas de la semiesfera, la colocamos con la cara plana sobre el plano  $x - y$ , haciendo coincidir el eje con  $\hat{z}$ , y luego la rebanamos en tajadas de ancho  $dz$  (ver figura).

Evaluemos primero la masa de la rebanada que se encuentra a la altura  $z$ . Su masa es  $\rho_0 \pi (R^2 - z^2) dz$ , donde  $\rho_0$  es la densidad de masa de la semiesfera. El centro de masa de esta rebanada por supuesto que queda sobre el eje  $\hat{z}$  a la altura  $z$ .

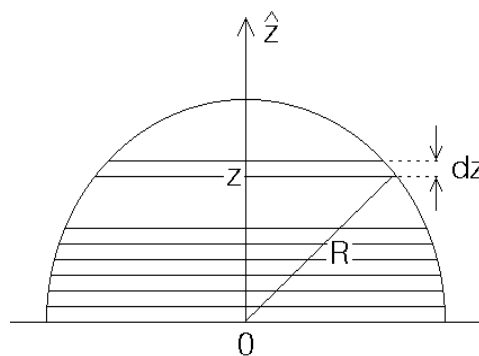


Figura 7.40

El centro de masas de la semiesfera será la suma de los centros de masas de cada rebanada pesada con la masa de de cada rebanada, es decir,

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} \int_0^R z \rho_0 \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{\rho_0 \pi}{M} \int_0^R (zR^2 - z^3) dz \\ &= \frac{\rho_0 \pi}{M} \left( \frac{1}{2} R^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^R = \frac{\rho_0 \pi}{M} \frac{1}{4} R^4 . \end{aligned}$$

Pero  $M = 2\rho_0\pi R^3/3$ , luego  $z_{\text{cm}} = 3R/8$ .

**Solución al problema 24**

- a) La masa de la semiesfera es  $M = 2\pi\rho_0 R^3/3$ . El torque en torno al punto de contacto  $P$  viene dado por

$$\vec{\tau} = Mgb \sin \beta \hat{x},$$

donde  $\hat{x}$  es un vector unitario que, para la situación mostrada en la figura adjunta, apunta hacia el lector.

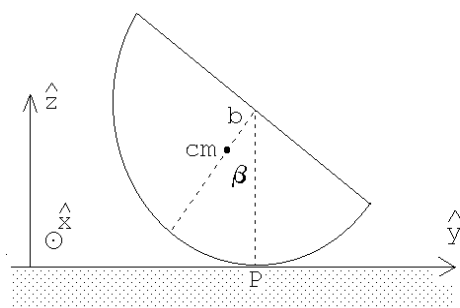


Figura 7.41a

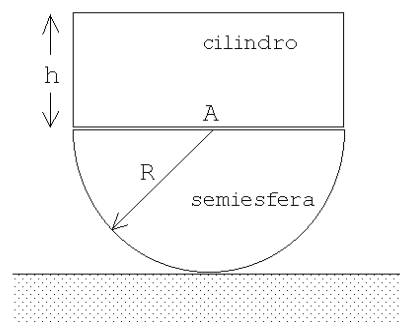


Figura 7.41.b

- b) Al colocar sobre la semiesfera un cilindro de altura  $h$  la posición del centro de masas es

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M + M_c} \left[ M \frac{5}{8}R + M_c \left( R + \frac{h}{2} \right) \right],$$

donde  $M_c = \pi R^2 h \rho_0$  es la masa del cilindro. Reemplazando las masas de los cuerpos se obtiene

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h} \left[ \frac{5}{12}R^2 + hR + \frac{h^2}{2} \right].$$

- c) Mientras el la posición del centro de masas del sistema compuesto se encuentre por debajo del centro del semicirculo (punto  $A$ ), el equilibrio será estable. (Es fácil convencersrse de que el torque que aparece al ladear el sistema trata de restituir al cuerpo a su posición de equilibrio). Por lo contrario, si el centro de masas del sistema compuesto se encuentra por encima del punto  $A$ , el equilibrio será inestable.
- d) La altura límite  $h_0$  se obtiene cuando  $z_{\text{cm}} = R$ . Se tiene

$$z_{\text{cm}} = R = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h_0} \left[ \frac{5}{12}R^2 + h_0R + \frac{h_0^2}{2} \right].$$

Despejando la altura límite se encuentra que ésta viene dada por

$$h_0 = \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

**Solución al problema 25**

- a) El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura adjunta.
- b) La masa de la semiesfera es  $M = 2\pi\rho_0 R^3/3$ . El torque en torno al punto de contacto  $P$  viene dado por

$$\vec{\tau} = Mgb \sin \beta \hat{x} ,$$

donde  $\hat{x}$  es un vector unitario que, para la situación mostrada en la figura adjunta, apunta hacia el lector.

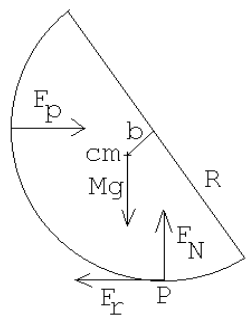


Figura 7.42a

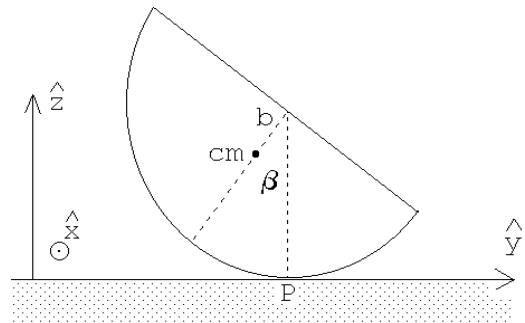


Figura 7.42.b

- c) La fuerza  $F_p$  que ejerce la pared sobre la semiesfera es en la dirección horizontal  $+\hat{y}$  y su magnitud es tal que el torque total respecto a  $P$  es nulo. Luego

$$\vec{F}_p = \frac{Mgh \sin \beta}{R} \hat{y} = \frac{3}{8}Mg \sin \beta \hat{y} .$$

Como la fuerza horizontal total debe ser nula, y la única otra fuerza horizontal es la fuerza de roce, se tiene

$$\vec{F}_r = -\vec{F}_p = -\frac{Mgh \sin \beta}{R} \hat{y} = \frac{3}{8}Mg \sin \beta \hat{y} .$$

- d) La fuerza de roce no debe sobrepasar el valor  $\mu Mg$ , o sea,

$$\frac{3}{8}Mg \sin \beta \leq \mu Mg = \frac{3}{16}Mg$$

de donde

$$\sin \beta \leq \frac{1}{2}.$$

El ángulo crítico es, por lo tanto,  $\beta_{\max} = 30^\circ$ .

- e) Al colocar sobre la semiesfera un cilindro de altura  $h$  la posición del centro de masas es

$$s_{\text{cm}} = \frac{1}{M + M_c} \left[ M \frac{5}{8}R + M_c \left( R + \frac{h}{2} \right) \right],$$

donde  $M_c = \pi R^2 h \rho_0$  es la masa del cilindro. Reemplazando las masas de los cuerpos se obtiene

$$s_{\text{cm}} = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h} \left[ \frac{5}{12}R^2 + hR + \frac{h^2}{2} \right].$$

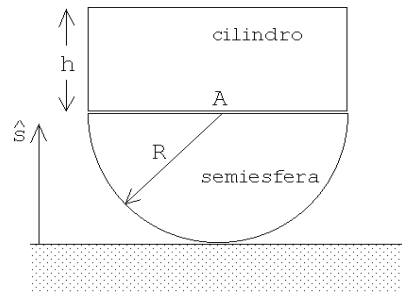


Figura 7.43a

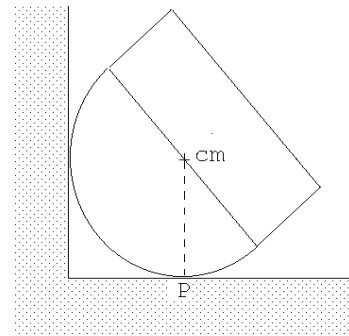


Figura 7.43.b

- f) La altura límite  $h_{\max}$  se obtiene cuando  $s_{\text{cm}} = R$ . Se tiene

$$s_{\text{cm}} = R = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h_{\max}} \left[ \frac{5}{12}R^2 + h_{\max}R + \frac{h_{\max}^2}{2} \right].$$

Despejando la altura límite se encuentra que ésta viene dada por

$$h_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

**Solución al problema 30**

Las figuras 7.44a y 7.44b muestran los diagramas de cuerpo libre de la masa  $Q$  y el semicilindro, respectivamente.  $F_r = kx$  es la fuerza ejercida por el resorte,  $W$  el peso del semicilindro y  $Q$  el peso del bloque que se encuentra a una distancia  $x$  de  $O$ . La distancia  $d$  entre el centro de masas y  $O$  la supondremos conocida.

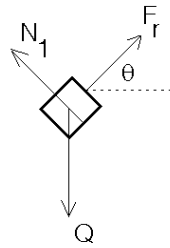


Figura 7.44a

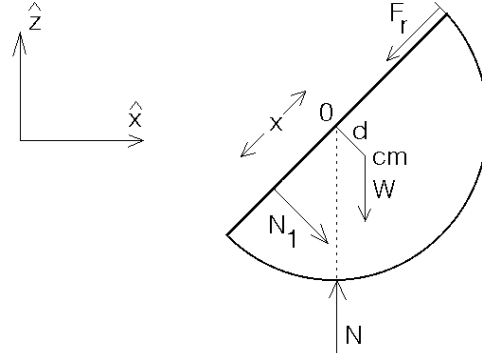


Figura 7.44.b

Debido a que ambos objetos están en equilibrio se debe tener que la fuerza total sobre cada uno de ellos debe ser nula, y también el torque total sobre el semicilindro (en torno a cualquier origen).

Para el bloque  $Q$  se obtiene la relación

$$\vec{F}_{\text{tot}} = (F_r \cos \theta \hat{x} + F_r \sin \theta \hat{z}) - Q \hat{z} + (N_1 \cos \theta \hat{z} - N_1 \sin \theta \hat{x}) = 0 .$$

Igualando las componentes de los vectores de la última igualdad y usando el hecho que  $F_r = kx$ , se obtienen las ecuaciones,

$$kr \cos \theta = N_1 \sin \theta \quad (7.10)$$

y

$$kx \sin \theta = Q - N_1 \cos \theta . \quad (7.11)$$

La fuerza total que actúa sobre el semicilindro (que también debe ser nula) es

$$-W \hat{z} + N \hat{z} + (-F_r \cos \theta \hat{x} - F_r \sin \theta \hat{z}) + (-N_1 \cos \theta \hat{z} + N_1 \sin \theta \hat{x}) = 0 .$$

Esto nos da las relaciones

$$-N_1 \cos \theta - kx \sin \theta - W + N = 0 \quad (7.12)$$

y

$$N_1 \sin \theta - kx \cos \theta = 0 .$$

Esta última ecuación no da información nueva ya que coincide con (7.10). Por último, evaluando el torque total (en torno al punto  $O$ ) que actúa sobre el semicilindro, se obtiene:

$$N_1 x - Wd \sin \theta = 0 . \quad (7.13)$$

De las cuatro ecuaciones (7.10), (7.11), (7.12) y (7.13), con las cuatro incógnitas  $N$ ,  $N_1$ ,  $x$  y  $\theta$ , podemos despejar  $\cos \theta$ . Realizando el álgebra, se obtiene,

$$\cos \theta = \frac{Wdk}{Q^2} .$$

¿Que pasa cuando  $Q$  es pequeño? Es claro que la solución obtenida sólo tiene sentido si  $Q^2 > Wkd$ . Al analizar el problema (¡hágalo!) con más cuidado se encuentra que  $\theta = 0$  (y, por lo tanto,  $x = 0$ ) también (para todos los valores de  $Q$ ) es una solución de este problema de equilibrio. También se encuentra que para  $0 \leq Q^2 < Wkd$ , la solución  $\theta = 0$  es la única, siendo estable. Para  $Wdk < Q^2$ , hay tres soluciones:  $\theta = 0$  y  $\theta = \pm \text{Acos}(Wdk/Q^2)$ ; siendo la primera de éstas inestable, y estables las otras dos.

Para comprender mejor lo que está ocurriendo es útil analizar el problema también desde el punto de vista de la energía potencial. Definiendo el origen de la energía potencial gravitacional cuando  $\theta = 0$ , se encuentra que

$$U(\theta) = Wd(1 - \cos \theta) - Qx \sin \theta + \frac{1}{2}kx^2 .$$

El primer término al lado derecho es el cambio de la energía potencial gravitacional del semicilindro, el segundo el cambio de la energía potencial gravitacional de la masa  $Q$  y el tercero la energía potencial del resorte. Con  $kx = Q \sin \theta$  queda

$$U(\theta) = Wd(1 - \cos \theta) - \frac{Q^2}{2k} \sin^2 \theta .$$

Para hacer un estudio gráfico de esta relación introducimos el parámetro  $\alpha \equiv Q^2/(kWd)$  y definimos  $\bar{U}(\theta) \equiv U(\theta)/(Wd)$ ; de esta manera la última ecuación queda de la forma

$$\bar{U}(\theta) = (1 - \cos \theta) - \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta .$$

La figura 7.45 muestra el gráfico para  $\alpha = 0$ ;  $-0,5$ ;  $1,0$  y  $2$ . Para  $0 < \alpha < 1$ , el gráfico tiene un sólo mínimo, para  $\alpha > 1$  el gráfico tiene dos mínimos (en  $\pm\theta_0$ ) y un máximo (en  $\theta = 0$ ). Para encontrar  $\theta_0$  debemos evaluar la derivada de  $\bar{U}(\theta)$  respecto a  $\theta$  e igualarla a cero:

$$\frac{d\bar{U}(\theta)}{d\theta} = \sin \theta - \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

o sea,

$$\sin \theta (1 - \alpha \cos \theta) = 0.$$

Esta ecuación se satisface si  $\sin \theta = 0$  o  $(1 - \alpha \cos \theta) = 0$ . La primera de estas condiciones nos da la solución  $\theta = 0$  mientras que la segunda entrega las soluciones  $\theta_0 = \pm \text{Acos}(1/\alpha)$ , soluciones que existe sólo si  $\alpha \geq 1$ . Para  $\alpha = 2$ , se obtiene  $\theta_0 = \pm 60^\circ$ .

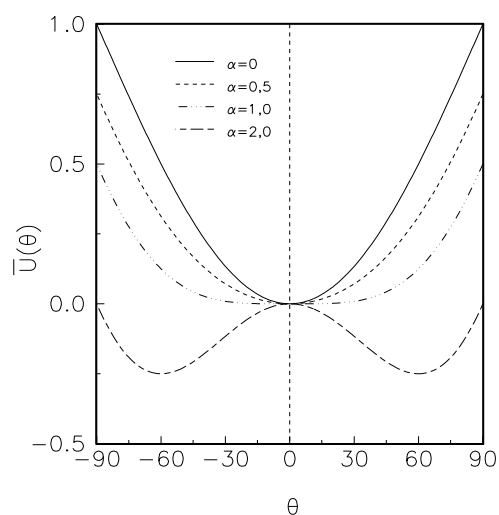


Figura 7.45