

# INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA

Herbert Massmann

## AGRADECIMIENTOS (1997)

Aproximadamente la mitad de los problemas que figuran al final de cada capítulo no son originales del autor, sino que provienen de controles, pruebas y listas de ejercicios que han circulado en la Facultad de Ciencias y en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile durante la última década. Lamentablemente resulta casi imposible establecer quiénes son los autores intelectuales de estos problemas para así poder darles el debido crédito.

Deseo agradecer a Víctor Muñoz, Miguel Kiwi, Fernando Lund, Patricia López, Pamela Weber, Claudio Romero y Lorena Céspedes, que con sus comentarios han mejorado el texto y permitieron pesquisar muchos de los errores de las versiones preliminares. Finalmente también mis agradecimientos al Dr. Hugo Arellano que gentilmente permitió incorporar a estos apuntes la lista de problemas que él confeccionó para el curso.

Herbert Massmann

## Notas adicionales (2007)

Los apuntes aquí presentados han servido de base, durante mucho tiempo, para los cursos de Mecánica I y II, correspondientes al Primer y Segundo Semestre de Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. La versión presentada en este archivo se basa en la última preparada por el Dr. Herbert Massmann de que disponemos, correspondiente al año 1997. No todas las fuentes estaban disponibles, sin embargo, y completar estos apuntes ha significado reconstruir algunos capítulos (12–14) a partir de copias en papel. De hecho, en esta versión dos capítulos no están incluidos: Gravitación (Cap. 11) y Ondas Sonoras (Cap. 15). Ambos se pueden encontrar como documentos separados, en <http://llacolen.ciencias.uchile.cl/~vmunoz/cursos/mecanica2/mecanica2.html>.

Los agradecimientos que están más arriba fueron copiados del texto original del Dr. Massmann. Por mi parte, quisiera agregar agradecimientos a Areli Zúñiga, Nicolás Rojas y Max Ramírez, que, en años posteriores, también han colaborado en la escritura de algunas secciones o en la confección de figuras.

Esperamos completar y mejorar estos apuntes en la medida que el tiempo y la colaboración de nuestros colegas y alumnos lo permita.

Víctor Muñoz

# Índice general

<b>1</b>	<b>Expansiones y Trigonometría</b>	<b>1</b>
1.1	Expansiones y series . . . . .	1
1.2	Elementos de trigonometría . . . . .	8
1.3	Problemas . . . . .	19
1.4	Solución a algunos de los problemas . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Cinemática en una dimensión</b>	<b>26</b>
2.1	Posición, velocidad y aceleración . . . . .	26
2.2	El camino inverso . . . . .	45
2.3	Máximos y mínimos . . . . .	49
2.4	Elementos del cálculo infinitesimal e integral . . . . .	50
2.5	Problemas: . . . . .	53
2.6	Solución a algunos de los problemas . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Cinemática en dos y tres dimensiones</b>	<b>58</b>
3.1	Vectores . . . . .	58
3.2	Cinemática . . . . .	68
3.3	Coordenadas polares . . . . .	76
3.4	Problemas . . . . .	79
3.5	Solución a algunos de los problemas . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Las leyes de Newton</b>	<b>88</b>
4.1	Espacio y tiempo . . . . .	88
4.2	Las leyes de Newton . . . . .	91
4.3	Uso de las leyes de Newton . . . . .	94
4.4	Roce cinético y estático . . . . .	102
4.5	Problemas . . . . .	108
4.6	Solución a algunos de los problemas . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Trabajo y energía</b>	<b>126</b>
5.1	Trabajo y energía para movimientos en una dimensión . . . . .	127
5.2	Trabajo para un movimiento en tres dimensiones . . . . .	139

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	0
5.3 Ejemplos . . . . .	145
5.4 Problemas . . . . .	148
5.5 Solución a algunos de los problemas . . . . .	162

# Capítulo 1

## Expansiones y Trigonometría

versión 6 abril 2008

En este primer capítulo se recopilarán algunos resultados de las Matemáticas que son básicos para los capítulos que siguen. Primero, en la Sec. 1.1, revisaremos resultados relevantes para describir de manera aproximada cantidades físicas. Luego, en la Sec. 1.2, recordaremos algunos resultados básicos de trigonometría. En este capítulo, particularmente en la Sec. 1.1, hay afirmaciones que no serán demostradas rigurosamente. La idea es simplemente dar una intuición acerca de resultados matemáticos cuya demostración rigurosa es materia de cursos de Cálculo especialmente, así como introducir lenguaje formal que necesitaremos en el resto de nuestro curso.

### 1.1 Expansiones y series

La Física es, ante todo, una ciencia experimental. Necesariamente, entonces, en su estudio tendremos que lidiar con números “concretos”, con mediciones. Por otro lado, la Matemática nos proporciona resultados abstractos que, en algún sentido, representan la “realidad”. Por ejemplo, el número  $\pi$  se puede conocer con infinitos decimales en principio, y el perímetro de un círculo de radio  $r$  siempre es  $2\pi r$ . Ingenuamente, uno podría pensar entonces que la circunferencia del planeta Tierra se puede determinar con infinitos decimales también. Sin embargo, ello no es cierto, pues las imprecisiones experimentales al determinar el radio de la Tierra “estropean” toda la infinita precisión con que se conoce  $\pi$ . Esto puede ser frustrante desde el punto de vista matemático, pero son numerosas las situaciones en que, en general, no es tan importante tener un número exacto, pero sí es crucial tener una buena aproximación. Por ejemplo, sabemos que un partido de fútbol significa esencialmente 45 minutos de juego por lado, y 15 de descanso. Sabemos que nunca es exactamente así, pero no importa, porque esa información nos basta para tomar decisiones tales como si alcanzamos a ir al supermercado antes de que comience el segundo tiempo, o si podemos ver el partido hasta el final sin perdernos el comienzo de nuestra serie favorita

en otro canal. Tampoco necesitamos comprar una balanza de precisión infinita para controlar nuestro peso: sería absurdo que nos preocupáramos porque hemos subido una milésima de gramo desde el desayuno. . .

Cuando hacemos Física, nunca nos interesan los números “exactos”, infinitamente precisos. Pero tener una buena aproximación es fundamental siempre. Por ello dedicaremos la primera sección de este curso a exponer algunos resultados matemáticos aproximados, pero que utilizaremos frecuentemente en adelante.

Para comenzar, consideremos las expansiones siguientes:

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= 1+x \\(1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\(1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \\(1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\end{aligned}$$

En general, para un entero  $n$  positivo arbitrario, la expansión del binomio  $(1+x)^n$  puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!}x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}x^4 + \dots + nx^{(n-1)} + x^n, \quad (1.1)\end{aligned}$$

donde  $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ , es decir, el producto de los  $n$  primeros números enteros, y se denomina el *factorial* del número entero  $n$ . Se define también el factorial de cero:  $0! \equiv 1$ . (Esto se hace por razones de conveniencia matemática, aunque en este caso ya no tiene sentido hablar del factorial como el producto de los “cero primeros números enteros”.)

La expansión (1.1) es válida para cualquier valor de  $x$  y cualquier valor de  $n$  entero no negativo. Observamos además que los coeficientes de dicha expansión son simétricos: los coeficientes de la potencia más baja ( $x^0$ ) y la más alta ( $x^n$ ) son 1; los coeficientes de la segunda potencia más baja ( $x^1$ ) y la segunda más alta ( $x^{(n-1)}$ ) son  $n$ , etc. Además, la expansión consta de un número finito de términos, exactamente igual a  $n+1$ .

Lo anterior se puede entender fácilmente, ya que (1.1) es simplemente el producto de  $n$  factores iguales. Lo interesante es que es posible generalizar dicha expresión al caso en que el exponente no es entero, sino un número real  $\alpha$  arbitrario. En efecto, en ese caso

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots \quad (1.2)\end{aligned}$$

Observemos que si  $\alpha$  es un entero  $n$ , positivo o cero, (1.2) se reduce efectivamente a (1.1), por cuanto existe un factor  $(\alpha - n)$  que anula todos los términos desde en  $n + 1$ -ésimo en adelante. [Naturalmente, esto no demuestra que (1.2) es la generalización correcta de (1.1), pero es un indicio de que puede serlo.] Así, cuando  $\alpha$  es un entero no negativo (1.2) tiene una cantidad finita de términos, y siempre se puede calcular, independiente del valor de  $x$ . Sin embargo, cuando  $\alpha$  es cualquier otro número (entero negativo o un número real arbitrario), (1.2) posee *infinitos* términos.

Lo anterior es un problema, porque en general una suma infinita de términos puede ser un número infinito. Por ejemplo,  $1 + 1 + 1 + \dots$  es infinito. Pero también podemos construir sumas que, aunque consten de infinitos términos, sean un número finito:  $1 + 0.1 + 0.001 + 0.0001 + \dots = 1.\bar{1}$ . En Física no nos interesan las cantidades infinitas. Toda cantidad medible es un número finito. ¿Qué significa entonces (1.2), considerando que a veces el lado derecho puede ser infinito o, en general, no estar bien definido? En lenguaje técnico, se dice que la *serie* (suma infinita)  $1 + 1 + 1 + \dots$  *converge*, esto es, es una *serie convergente*. La serie  $1 + 0.1 + 0.001 + 0.0001 + \dots$ , en tanto, no converge, es decir, es una serie no convergente.

Matemáticamente es posible encontrar *criterios de convergencia*, de modo que es posible saber de antemano si una serie dada converge o no. Un criterio sencillo es notar si cada término es menor en módulo que el anterior. Es claro que si tengo infinitos términos iguales, o si dichos términos son cada uno mayor que el anterior, la suma de todos ellos debe ser infinita. En cambio, si cada término es menor en módulo que el anterior, existe al menos alguna posibilidad de que el resultado sea un número finito (así sucede al menos en nuestro segundo ejemplo,  $1 + 0.1 + 0.001 + 0.0001 + \dots$ ). Sin embargo, no siempre sumas infinitas con términos cada vez menores son convergentes. Por ello, se dice que esta condición (cada término menor en módulo que el anterior) es *necesaria*, pero no *suficiente*. (Vale decir, toda serie convergente satisface esta condición, pero no todas las series que la satisfacen son convergentes. En la práctica, esto significa que es un criterio definitivo para establecer que una serie es *no convergente*, pero no es conclusivo para establecer que converja.)

De lo dicho hasta ahora, entonces, se sigue que lo que necesitamos es que la expresión (1.2) sea convergente para que tenga sentido. Por ejemplo, si  $\alpha = 1/2$ , el lado izquierdo de (1.2) es  $\sqrt{1+x}$ , un número completamente normal (mientras  $x > -1$ ). Sin embargo, el lado derecho de (1.2) es una serie, y no necesariamente converge. De hecho, se puede mostrar que, para un  $\alpha$  arbitrario, converge sólo si  $|x| < 1$ .

Por ejemplo, calculemos los lados derecho e izquierdo de (1.2) para  $\alpha = 1/2$ , con dos valores distintos de  $x$ .

a) Si  $x = 3$ , el lado izquierdo es

$$(1+x)^\alpha = \sqrt{4} = 2.$$

El lado derecho, en tanto, es

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot 3^3 + \dots = 1 + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots$$

Sumando los cuatro primeros términos de la serie, el resultado es 3.07, bastante alejado de 2. Uno podría pensar que esto mejorará al sumar más términos, pero no es así, con diez términos, por ejemplo, el resultado es  $\sim 155.68$ . Y así sucesivamente, cada vez más alejando del resultado correcto. Podemos ver que efectivamente la serie no converge para este valor de  $x > 1$ .

- b) Si  $x = 0.1$ , en cambio, el lado izquierdo es  $\sqrt{1.1} \sim 1.04880884817015\dots$ , y el lado derecho, al sumar los cuatro primeros términos de la serie, por ejemplo, es 1.0488125, bastante parecido al resultado exacto; y con los diez primeros términos es 1.04880884817101, aún más parecido. Vemos que  $|x| < 1$ , y la serie no sólo converge, sino que converge al resultado correcto.

Estamos acostumbrados a que el signo  $=$  signifique que dos cantidades son exactamente iguales, pero cuando tenemos series infinitas hay que tomar al signo igual con cuidado: la igualdad existe sólo si la serie converge. De otro modo, el lado derecho de (1.2) ni siquiera se puede usar porque no tiene sentido, aunque, para los mismos valores de  $x$  y  $\alpha$ , el lado izquierdo sea un número perfectamente razonable.

Otro ejemplo: para  $\alpha = -1$ , con (1.2) se obtiene la llamada *serie geométrica*:

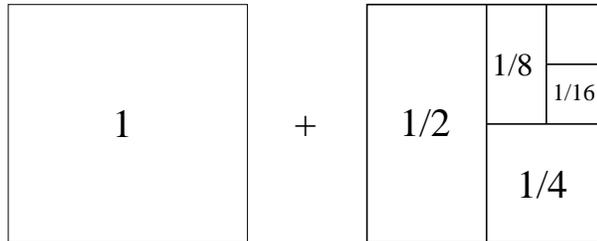
$$(1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (1.3)$$

Nuevamente, en este caso, si bien el lado izquierdo está bien definido para cualquier valor de  $x$ , el lado derecho sólo da un resultado finito si  $|x| < 1$ .

Para  $x = 1/2$  el lado izquierdo es igual a 2, mientras que el lado derecho da la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

que, obviamente, al sumarla, también da 2. Si no estamos convencidos, podemos recurrir al siguiente argumento geométrico: representando, como es tradicional, la unidad por un cuadrado, y sus fracciones por subáreas de él, podemos ver que la suma de los 5 primeros términos de la serie geométrica es:



Claramente, al continuar sumando términos de la serie geométrica, se obtienen cuadrados cada vez más pequeños, cada uno de área igual a la mitad del anterior, y podemos ver que con infinitos términos terminaremos llenando completamente el segundo cuadrado.

Para  $x = 1/10$ , en tanto, el lado izquierdo es igual a  $10/9$ , mientras que el lado derecho da la serie (que ya habíamos utilizado antes como ejemplo de serie convergente)

$$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots = 1.1111\dots ,$$

que es el desarrollo decimal de  $10/9$ .

Seamos un poco más generales. Hasta el momento sólo hemos resuelto ejemplos numéricos, usando, sin demostrar, que (1.2) es correcta. Sin embargo, podemos demostrar, al menos para la serie geométrica ( $\alpha = -1$ ), que lo es. Evaluemos primero la suma finita

$$S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N ,$$

que corresponde a los primeros  $N + 1$  términos de la serie geométrica. Deseamos saber qué le ocurre a  $S_N$  cuando  $N$  crece. Para calcular  $S_N$  restemos de esta serie la misma serie, pero multiplicada por  $x$ , es decir:

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N \\ x S_N &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^N + x^{N+1} . \end{aligned}$$

Al restar, al lado izquierdo queda  $(1 - x) \cdot S_N$ , mientras que al lado derecho queda  $1 - x^{N+1}$ , o sea,

$$(1 - x) \cdot S_N = 1 - x^{N+1} .$$

Despejando  $S_N$  se obtiene

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} .$$

Ahora, si hacemos  $N$  cada vez más grande, es decir lo hacemos tender a infinito, el comportamiento de  $x^{N+1}$  es distinto dependiendo de si  $|x|$  es mayor o menor que 1. Si  $|x| > 1$ , entonces cada potencia de  $x$  es más grande que la anterior, y por lo tanto el lado derecho es infinito: la serie no converge. En cambio, si  $|x| < 1$ , cada potencia de  $x$  es más pequeña que la anterior, de modo que, cuando  $N$  es infinitamente grande,  $x^{N+1}$  es infinitamente pequeño. Formalmente, decimos que el *límite* de  $x^{N+1}$ , cuando  $N$  tiende a infinito, es 0, y lo denotamos así:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = 0 .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x} ,$$

resultado consistente con (1.3).

Para determinar completamente las condiciones de convergencia de la serie falta considerar los casos  $x = 1$  y  $x = -1$ . Si  $x = 1$  es evidente que no hay convergencia, pues la serie geométrica es una suma infinita de unos. También ello es evidente al reemplazar  $x = 1$  en el lado izquierdo de (1.3). Pero, ¿qué pasa si  $x = -1$ ? El lado izquierdo de (1.3) es  $1/2$ , un número finito. Revisemos entonces la serie del lado derecho. Si  $x = -1$ , en cambio, tenemos una suma alternada de  $1$  y  $-1$ , de modo que  $S_N = 0$  si  $N$  es par, y  $S_N = 1$  si  $N$  es impar. Tenemos entonces que la suma finita,  $S_N$ , a medida que  $N$  crece, salta eternamente entre  $0$  y  $1$ . La serie no se hace infinita, pero tampoco tiende a algún valor definido, y tampoco converge.

Vemos entonces que hay dos modos en que una serie puede ser no convergente: una, es que la serie explote; la otra, es que la serie, al ir agregando cada vez nuevos términos, no alcance nunca un valor dado.

Con esto terminamos de mostrar que la expresión (1.2) es, al menos para  $\alpha = -1$ , convergente sólo para  $|x| < 1$ .

Volvamos ahora a (1.2) con  $\alpha = 1/2$ . En ese caso se obtiene

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

Ya habíamos calculado este caso con  $x = 0.1$ . Repitamos el cálculo, pero con más detalle. Observemos lo que ocurre con la suma en el lado derecho de (1.2), a medida que consideramos cada vez más términos. La tabla adjunta muestra este análisis para  $x = 0.1$ :

lado izquierdo	lado derecho	Nº de términos	error
1.04880884817	1.0	1	4.9 %
	1.05	2	0.11 %
	1.04875	3	0.0059 %
	1.0488125	4	0.00037 %

Esto es muy importante. La tabla anterior nos permite verificar que no es necesario tener una calculadora para saber el valor de  $\sqrt{1.1}$ , sino que basta con saber las operaciones básicas. Sumando *sólo 4 términos* de una serie que en principio tiene infinitos términos, es posible calcular  $\sqrt{1.1}$  *con cuatro decimales exactos*. Esto es extraordinario. La expansión en serie (1.2) no es sólo un resultado matemático abstracto, formal, sino que nos da el gran poder de ser capaces de calcular, en este caso, raíces cuadradas con varios decimales exactos, *sin necesidad de sumar infinitos términos*, y sin usar una calculadora. Recordemos: en Física no nos interesan las cantidades con infinitos decimales, porque no son medibles con instrumentos reales; pero sí nos interesa tener buenas aproximaciones, y acabamos de encontrar una.

De hecho, se puede verificar (Ejercicio para el lector) que mientras más pequeño es  $x$ , la convergencia de la serie truncada al resultado exacto es aun más rápida, de modo que son necesarios aún menos términos para calcular  $\sqrt{1+x}$  con gran precisión. Esto es, para  $x$  suficientemente pequeño, podemos decir, sin gran error, que

$\sqrt{1+x} = 1 + x/2$  (sólo los dos primeros términos de la serie infinita), y para todos los efectos prácticos ello será correcto. Este resultado es muy importante, y lo usaremos frecuentemente en el resto de este curso. Queda, por cierto, aún la pregunta de qué significa “suficientemente pequeño”. La respuesta en detalle depende del problema que se esté trabajando, pero en general se puede decir que un 5% es adecuado. (Para la serie que analizamos,  $x \sim 0.05$  sería suficientemente pequeño, aunque vemos que  $x = 0.1$  ya funciona bastante bien.)

### Ejemplos:

1. Sea  $\alpha \neq 0$  un número real arbitrario y evaluemos  $[(1+x)^\alpha - 1]/x$  para valores de  $x$  muy pequeños. Observe que para valores de  $x$  cada vez más pequeños, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, de modo que la expresión, en principio, carece de sentido. Pero veremos que, gracias a la aproximación derivada de (1.2), podemos calcular esta expresión sin problema.

De acuerdo a la ecuación (1.2), para  $x$  muy pequeño vale la aproximación

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$$

(o sea, estamos despreciando todos los términos de la serie excepto los dos primeros). Usando esta aproximación se encuentra que (para  $x$  muy pequeño)

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \simeq \frac{1 + \alpha x - 1}{x} = \frac{\alpha x}{x} = \alpha .$$

Verifique numéricamente este resultado usando una calculadora.

### 2. Problema resuelto en clases: 1.2 (Capítulo 1, Problema 2)

Algunas aproximaciones que se obtienen a partir de la ecuación (1.2) para  $|x|$  pequeño, que se usarán con frecuencia, y conviene tener siempre presentes, son:

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x , \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x , \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x , \tag{1.6}$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} . \tag{1.7}$$

Concluamos esta sección con unas palabras acerca de la notación. Para abreviar la escritura de series, se usa frecuentemente la letra griega *sigma* mayúscula ( $\Sigma$ ). Ilustramos el uso de este símbolo con algunos ejemplos:

$$\sum_{j=1}^6 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^4 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \quad ,$$

$$\sum_{k=-2}^2 j^k = j^{-2} + j^{-1} + 1 + j + j^2 \quad ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \quad .$$

En todas estas expresiones hay un índice ( $j$ ,  $k$ ,  $n$ , etc.), que varía sólo entre números enteros. En el símbolo  $\Sigma$  se indican los valores mínimo y máximo que puede tomar. Aunque en principio uno podría usar cualquier letra para denotar estos *índices de suma*, lo usual es utilizar sólo letras latinas minúsculas, desde  $i$  en adelante (exceptuando la  $o$ , que se puede confundir con el número 0).<sup>1</sup>

## 1.2 Elementos de trigonometría

Consideremos los triángulos rectángulos  $\triangle (ABC)$  y  $\triangle (AB'C')$  mostrados en la figura 1.1. De acuerdo a un teorema de la geometría elemental, la razón (entre trazos)  $\overline{AC} : \overline{AB}$  es igual a la razón  $\overline{AC'} : \overline{AB'}$ , dependiendo ésta sólo del valor del ángulo  $\alpha$ . Se ha convenido llamar a tal razón  $\cos \alpha$ ; o sea, en un triángulo rectángulo, el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa define el *coseno* del ángulo que forman esos dos lados:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{longitud del lado adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad .$$

También el cociente entre el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  y la hipotenusa es independiente del tamaño del triángulo rectángulo y sólo depende del valor de  $\alpha$ . A esta razón se la llama *seno* del ángulo, teniéndose

---

<sup>1</sup>Conviene resaltar la conveniencia de no ser “creativo” con la notación matemática. Un texto científico se puede convertir rápidamente en inentendible si utiliza notación no convencional. La notación matemática debe facilitar la comunicación de resultados, no entorpecerla.

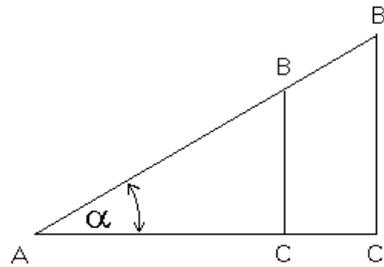


Figura 1.1

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}} .$$

Es útil definir también la función *tangente*:

$$\tan \alpha \equiv \frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud del lado adyacente}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} .$$

Evaluemos  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= \left( \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \right)^2 + \left( \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \right)^2 \\ &= \frac{(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2}{(\overline{AB})^2} . \end{aligned}$$

Pero, de acuerdo al teorema de Pitágoras,  $(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2$ , luego

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 .$$

Observemos que  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$  son ambos menores o iguales que 1. Esto se puede ver tanto de la igualdad recién obtenida como de la definición de coseno y seno.

Dos relaciones trigonométricas importantes son:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (1.8)$$

y

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta . \quad (1.9)$$

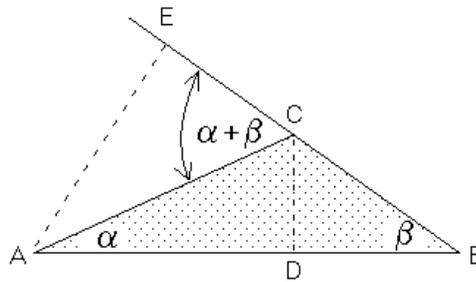


Figura 1.2

Demostremos al menos una de ellas; la primera. Para ello consideremos la figura 1.2. Partiendo del triángulo  $\triangle (ABC)$ , prolongamos el lado  $\overline{BC}$  y graficamos las alturas  $\overline{CD}$  y  $\overline{AE}$ . Note que el ángulo  $\sphericalangle ACE$  resulta ser igual a  $\alpha + \beta$ . El área de un triángulo es la mitad del producto de su base por la altura. De la figura 1.2, para el área del  $\triangle (ABC)$ , obtenemos

$$2 \cdot \text{Área} [\triangle (ABC)] = \overline{BC} \cdot \overline{EA} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

En la última ecuación hemos escrito el producto “base por altura” del triángulo  $\triangle(ABC)$  de dos maneras distintas: en la primera igualdad,  $\overline{BC}$  es la base y  $\overline{EA}$  la altura, mientras que en la segunda,  $\overline{AB}$  es la base y  $\overline{CD}$  la altura.

Luego,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AC}} = \frac{(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}.$$

Usando las definiciones de *seno* y *coseno*, se deduce finalmente que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha .$$

Como casos particulares de las ecuaciones (1.8) y (1.9), se encuentra

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tag{1.10}$$

y

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha . \tag{1.11}$$

Existen muchas identidades trigonométricas de este tipo que resultan ser útiles para llevar adelante diferentes tipos de cálculos. Dejamos que el lector demuestre las siguientes identidades:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left[ \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right] \cos \left[ \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right] , \tag{1.12}$$

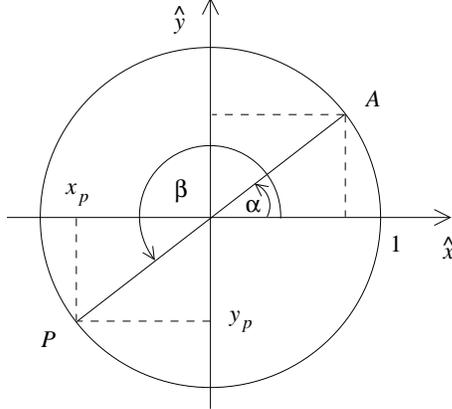


Figura 1.3

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[ \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \cos \left[ \frac{\alpha - \beta}{2} \right], \quad (1.13)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left[ \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \sin \left[ \frac{\alpha - \beta}{2} \right], \quad (1.14)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}. \quad (1.15)$$

**Problema resuelto en clases: 1.10**

La definición del *seno* y *coseno* que hemos dado es válida para ángulos  $\alpha$  entre 0 y 90 grados. Para definir estas funciones para otros ángulos es conveniente considerar un círculo de radio  $R = 1$  centrado en el origen (ver figura 1.3). Por convención, los ángulos se miden desde el eje  $\hat{x}$  en el sentido contrario a los punteros del reloj.

Consideremos el punto  $A$  sobre el círculo, formando un ángulo  $\alpha$  con el eje  $\hat{x}$ . Usando el hecho que la hipotenusa vale 1, es fácil convencerse de que las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto  $A$  coinciden con los valores de  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$ , respectivamente.

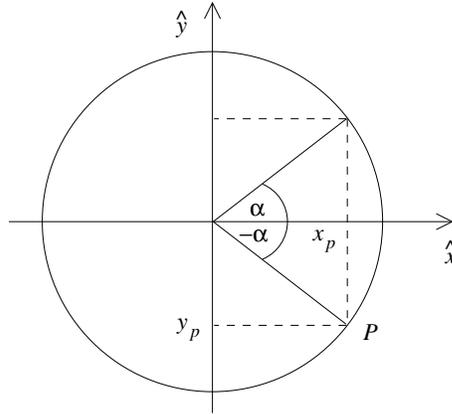
Es ésta la propiedad que se usa para definir el valor del *seno* y *coseno* para cualquier ángulo  $\beta$ . El procedimiento es el siguiente: i) Encontrar el punto  $P$  sobre el círculo que forma un ángulo  $\beta$  con el eje  $\hat{x}$  (en la figura 1.3, esto se muestra para un ángulo  $\beta > 180^\circ$ ; ii) luego, proyectar el punto  $P$  sobre los ejes para encontrar  $x_p$  e  $y_p$ . Entonces  $\cos \beta = x_p$  y  $\sin \beta = y_p$ . Por ejemplo, si en la figura 1.3  $\alpha = 30^\circ$  y  $\beta = 210^\circ$  (de modo que los puntos  $A$  y  $P$  están unidos por una recta que pasa por el origen), entonces  $\cos(210^\circ) = -\sqrt{3}/2 = -0,8660\dots$  y  $\sin(210^\circ) = -1/2$ . Es evidente que, para todos los ángulos  $\theta$ , siempre se cumple

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

y

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1.$$

La definición anterior nos permite conocer el seno y el coseno de ángulos negativos:



De la figura es inmediato que

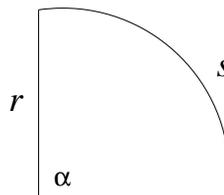
$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha.\end{aligned}$$

Se dice en este caso que el seno es una *función impar* (cambia de signo cuando el argumento lo hace), y el coseno es una *función par* (no cambia de signo cuando el argumento lo hace). Esta propiedad, por ejemplo, permite deducir el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos. Basta con usar (1.8) y (1.9), y las propiedades de paridad anteriores, para encontrar que

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Es usual medir los ángulos en *grados*, pero aunque uno puede tener mayor intuición con esta unidad, precisamente porque es más usual en la vida diaria (básicamente es parte de la cultura general que  $90^\circ$  corresponde a un ángulo recto, uno puede imaginarse que  $1^\circ$  es un ángulo pequeñito, etc.), los grados no son una unidad muy práctica desde el punto de vista físico, porque nacen por una convención arbitraria, como es dividir una circunferencia en 360 partes iguales. 360 es un número completamente arbitrario, y podría haber sido cualquier otro (por ejemplo, dividir el ángulo recto en 100, que da origen a los grados centesimales o gradianes). Resulta más conveniente definir una unidad angular que no tenga dicha arbitrariedad.

Consideremos un ángulo recto, de  $90^\circ$ :



La longitud del arco subtendido por  $\alpha$  es un cuarto del perímetro de la circunferencia completa,  $s = \pi r/4$ . Luego, no importa qué radio  $r$  hayamos elegido, el cociente  $s/r$  es independiente del radio (en este caso,  $s/r = \pi/4$ ). Breves momentos de reflexión deberían convencernos de que lo anterior debe ser cierto para cualquier subdivisión de  $\alpha$ . Independiente del ángulo,  $s/r$  es independiente del radio, y por tanto depende sólo del ángulo. Es natural entonces definir  $s/r$  como el ángulo en sí. Cuando expresamos el ángulo de esta manera, decimos que está medido en *radianes* (abreviada *rad*).

Definimos, pues, el valor del ángulo  $\alpha$ , en radianes, como el largo del arco subtendido sobre el círculo unitario desde donde lo cruza el eje  $\hat{x}$  hasta el punto  $A$  (ver figura 1.3),

$$\alpha = \frac{s}{r} .$$

De acuerdo a la definición, un ángulo de  $360^\circ$ , o sea, la circunferencia completa, corresponderá a un ángulo igual a  $2\pi$  rad. El ángulo recto es igual a  $\pi/2$  rad; el extendido a  $\pi$  rad. No es difícil verificar que

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ .$$

Si bien es cierto se puede abreviar radianes por *rad*, debemos notar que en realidad los radianes son una unidad adimensional, pues se definen como el cociente de dos longitudes. Por tanto, en realidad es innecesario escribir explícitamente *rad*, a menos que sea necesario para evitar confusión, o para marcar la diferencia con otras unidades, como en la expresión anterior. Así, es también correcto, y es la forma preferida, decir que el ángulo recto es simplemente igual a  $\pi/2$ .

Para llegar al punto  $P$  (figura 1.3) originalmente se recorrió un ángulo  $\beta$  desde el eje  $\hat{x}$  positivo. Al continuar y dar una vuelta completa para volver al punto  $P$ , habremos recorrido desde el eje  $\hat{x}$  un ángulo  $2\pi + \beta$ . Sucesivas rotaciones nos llevarán nuevamente al punto  $P$ , habiéndose recorrido ángulos  $4\pi + \beta$ ,  $6\pi + \beta$ , etc. Cada vez que, desde el eje  $\hat{x}$  positivo, recorremos un ángulo  $\beta$  más un múltiplo de  $2\pi$ , estaremos en el punto  $P$ . Se trata de un movimiento que se repite y se dice que es *periódico* en el ángulo  $\beta$ , con período igual a  $2\pi$ . Se tiene, en general, que, para cualquier ángulo  $\beta$ ,

$$\cos(\beta + n 2\pi) = \cos \beta$$

y

$$\sin(\beta + n 2\pi) = \sin \beta ,$$

donde  $n$  es un entero. Relaciones se pueden obtener ya sea usando geometría sobre el círculo trigonométrico (Fig. 1.3), o algebraicamente a partir de (1.8) y (1.9):

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$$

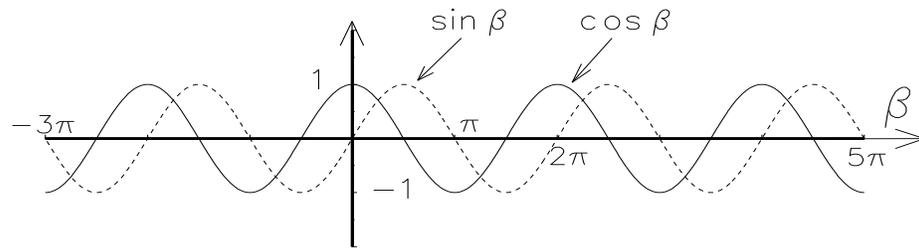


Figura 1.4

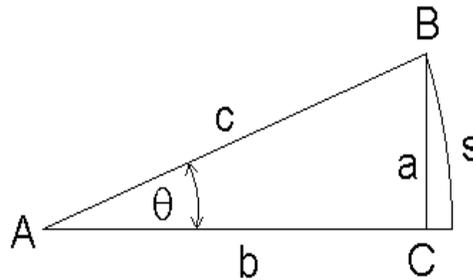


Figura 1.5

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$$

$$\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta .$$

Finalmente, observemos que si variamos  $\beta$  en la Fig. 1.3 de modo que  $P$  recorra todo el círculo unitario varias veces, podemos graficar sus proyecciones vertical y horizontal, que corresponderán precisamente al gráfico de las funciones seno y coseno (ver figura 1.4). Se aprecia que el seno y el coseno son esencialmente la misma función, pero desplazadas una respecto a la otra en  $\pi/2$ , lo cual es consistente con las relaciones algebraicas anteriores para el seno y el coseno de  $\pi/2 \pm \theta$ .

Cuando el argumento (en radianes) de una función trigonométrica es muy pequeño, ésta puede aproximarse con una expresión simple. En efecto, consideremos el triángulo rectángulo  $ABC$  mostrado en la figura 1.5. A medida que  $\theta$  decrece, el cateto opuesto  $a$  se hace cada vez más parecido al arco de círculo  $s$  con centro en  $A$ .

Usando la definición de la función seno se tiene

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \simeq \frac{s}{c} .$$

Pero el cociente  $s/c$  es precisamente el ángulo  $\alpha$  en radianes, luego, para ángulos pequeños (y éstos expresados en *radianes*)

$$\sin \alpha \simeq \alpha . \quad (1.16)$$

Esto significa que al graficar  $\sin \alpha$  como función de  $\alpha$ , debería obtenerse aproximadamente una línea recta. Ello ocurre efectivamente, como se aprecia en la Fig. 1.4, cerca del origen. Pero evidentemente la aproximación falla para ángulos suficientemente grandes.

Usando (1.16) es posible también obtener una expresión aproximada para  $\cos \alpha$ . Sabemos que

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha .$$

Luego, para ángulos pequeños

$$\cos^2 \alpha \simeq 1 - \alpha^2 ,$$

o sea,

$$\cos \alpha \simeq \sqrt{1 - \alpha^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 . \quad (1.17)$$

### Ejemplo:

Evalúe, usando una calculadora, las funciones  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  para  $\theta = 5^\circ$ . Compare los valores obtenidos con aquéllos que resultan de usar las expresiones aproximadas escritas más arriba.

Ingresando el valor  $\theta = 5^\circ = 5 \cdot 2\pi/360$  rad en una calculadora, obtenemos:

$$\sin 5^\circ = 0.0871557$$

y

$$\cos 5^\circ = 0.9961947 .$$

Si ahora hacemos uso de las expresiones aproximadas, obtenemos

$$\sin 5^\circ \simeq \frac{5 \cdot 2\pi}{360} = 0.087266$$

y

$$\cos 5^\circ = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{5 \cdot 2\pi}{360} \right)^2 = 0.9961923$$

Note que los valores aproximados difieren poco de los obtenidos con la calculadora. Para el coseno el error es inferior al 0.003%. (La razón por la cual el error en el

coseno es mayor es porque hemos usado una expansión hasta orden  $\alpha^2$ , que es mejor que para el seno, donde la expansión es hasta una potencia menor,  $\alpha$ .)

Cabe destacar que las funciones  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  pueden ser expresadas como una suma infinita de términos proporcionales a diferentes potencias del ángulo  $\theta$ :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots , \quad (1.18)$$

y

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots .$$

Para  $|\theta| \ll 1$ , estas series convergen rápidamente, lo que permite representar las funciones *seno* y *coseno* con pocos términos, como comprobamos con el ejemplo de la página anterior.

Es importante destacar que éstas expansiones en serie, y por tanto las aproximaciones (1.16) y (1.17), sólo tienen sentido si el ángulo se mide en radianes, lo cual es otro argumento para preferir esta unidad en vez de los grados.

### Ejemplo:

Representemos en un mismo gráfico, para el intervalo  $t \in [-\pi, 2\pi]$ , las siguientes cinco funciones:

- i)  $f_0(t) = \cos t$
- ii)  $f_1(t) = 1$
- iii)  $f_2(t) = 1 - t^2/2!$
- iv)  $f_3(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4!$
- v)  $f_4(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4! - t^6/6!$

Observe que de acuerdo a la ecuación (1.18), las funciones  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , etc., para  $t$  pequeño son aproximaciones cada vez mejores de  $f_0(t) = \cos t$ . Este comportamiento se observa claramente en la figura 1.6 donde se han graficado las diversas funciones.

**Problema resuelto en clases:** 1.20

### Funciones trigonométricas inversas

En ocasiones, lo que conocemos es  $x = \sin \alpha$ , y lo que se desea conocer es el ángulo  $\alpha$ . Por ejemplo en la Fig. 1.1, si conocemos los lados del triángulo, ¿es posible conocer el ángulo  $\alpha$ . Para ello necesitamos la noción de *función inversa*. Dada una función

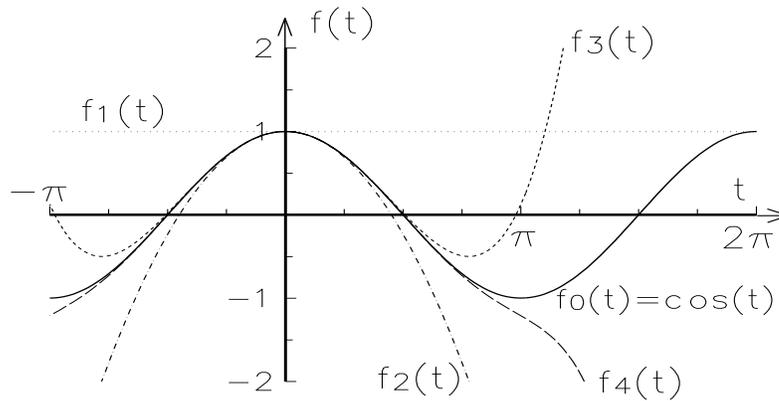


Figura 1.6

$y = f(x)$ , la función inversa es aquella función que, dado un valor de  $y$ , entrega el valor de  $x$  correspondiente. En el caso del seno y el coseno, sus funciones inversas son el *arcoseno* y el *arcocoseno*, respectivamente, y se denotan:

$$\alpha = \arcsin x, \quad \alpha = \arccos x.$$

Desafortunadamente, el seno no es una función monótona del ángulo (Fig. 1.4), y por lo tanto, dado un valor  $y$  ( $|y| < 1$ ), no existe un único valor de  $\alpha$  tal que  $\sin \alpha = y$ . Esto significa que el arcoseno es una *función multivaluada*. Esto es un problema desde el punto de vista matemático, formal, porque una función, por definición, debería ser monovaluada. Además es un problema práctico, porque es claro que, dado un triángulo rectángulo como en la Fig. 1.4, si los lados son conocidos, el ángulo  $\alpha$  debería ser único. Por otro lado, si tomamos cualquier calculadora y calculamos el arcoseno de un número arbitrario (mientras tenga módulo menor que 1), obtendremos en pantalla un único resultado. ¿Cómo hacemos para que una función multivaluada se vuelva monovaluada, y cómo elegimos, entre los muchos valores, el “correcto”?

La estrategia es sencilla. Si observamos la Fig. 1.4, notamos que si nos restringimos a valores de  $\alpha$  entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ , el seno es una función monótona creciente de  $\alpha$ , y por lo tanto el arcoseno es una función monovaluada. Análogamente, para  $\alpha$  entre  $0$  y  $\pi$  el coseno es una función monótona decreciente, y el arcocoseno es monovaluado. Naturalmente, podríamos haber tomado otros intervalos de  $\alpha$ . Con otras elecciones, el arcoseno y arcocoseno tendrían también valores únicos, pero distintos a los obtenidos con los primeros intervalos escogidos. A cada uno de los intervalos en los cuales las funciones quedan monovaluadas se les denomina *ramas*. Entonces, la manera de convertir una función multivaluada en monovaluada es *escogiendo una rama adecuada*. ¿Qué significa “adecuada”? Depende de la aplicación. Lo usual para

el arcoseno y el arcoseno son las ramas que escogimos antes,  $[-\pi/2, +\pi/2]$  para el arcoseno,  $[0, \pi]$  para el arcocoseno. Es la elección de las calculadoras también. Y es la elección correcta para el caso de la Fig. 1.1, ya que sabemos que en el triángulo rectángulo  $0 < \alpha < \pi/2$ . Pero ¡cuidado!, no hay ninguna manera, en general, de asegurar que esta elección es la adecuada para cualquier problema físico, y por tanto la elección de rama es una decisión que debe tomarse caso a caso. No hay que dejarse engañar por el resultado que entrega una calculadora o un computador, y siempre hay que cuestionarse si el número que nos da es la solución físicamente aceptable.

Algo similar ocurre cuando uno extrae raíces: puede ocurrir que la raíz de 9 de interés físico sea  $-3$  y no la solución que entrega la calculadora (que es  $+3$ ).

**Ejercicio:** Sea  $|x| \leq 1$  cierto valor dado y suponga que deseamos encontrar todos los ángulos  $\gamma$  (en radianes) para los cuales  $\cos \gamma = x$ . Suponga además que hemos, de alguna manera, encontrado una solución  $\gamma = \alpha_0$  (por ejemplo, el ángulo que muestra la calculadora al evaluar  $\arccos(x)$ ). Demuestre que todas las demás soluciones a nuestro problema vienen dadas por  $\gamma = \alpha_0 + j \cdot 2\pi$  y  $\gamma = -\alpha_0 + j \cdot 2\pi$ , con  $j$  cualquier valor entero.

**Ejercicio:** Sea  $|x| \leq 1$  cierto valor dado y suponga que deseamos encontrar todos los ángulos  $\gamma$  (en radianes) para los cuales  $\sin \gamma = x$ . Suponga además que hemos, de alguna manera, encontrado una solución  $\gamma = \alpha_0$  (por ejemplo, el ángulo que muestra la calculadora al evaluar  $\arcsin(x)$ ). Demuestre que todas las demás soluciones a nuestro problema vienen dadas por  $\gamma = \alpha_0 + j \cdot 2\pi$  y  $\gamma = (\pi - \alpha_0) + j \cdot 2\pi$ , con  $j$  cualquier valor entero.

Por ser frecuentemente fuente de errores reiteramos lo dicho unos párrafos antes: al evaluar funciones trigonométricas inversas la solución entregada por la calculadora **no** es siempre la físicamente aceptable. El alumno debe asegurarse de que la respuesta mostrada por la calculadora efectivamente resuelve completamente su problema, en caso contrario, debe analizar si alguna de las otras soluciones, que se obtuvieron en los dos ejercicios anteriores, sirve.

### 1.3 Problemas

1. Evalúe las siguientes sumatorias

$$\text{a) } S = \sum_{\substack{n=1,2 \\ m=1,2,3}} n^m$$

$$\text{b) } S = \sum_{j=-3,\dots,8} 1$$

$$\text{c) } S = \sum_{j=0}^N j$$

$$\text{d) } S = \sum_{\substack{i,j=1,\dots,4 \\ i>j}} \frac{1}{|i-j|}$$

Respuestas: a) 17 , b) 12 , c)  $N(N+1)/2$  , d)  $13/3$

2. Encuentre una expresión para  $[(x+\Delta)^\beta - x^\beta]/\Delta$ , en el *límite* en que  $\Delta$  tiende a cero. En otras palabras,  $\Delta$  tiene un valor finito pero pequeñísimo (tan pequeño como se quiera); al final del cálculo se permite poner  $\Delta = 0$ .

Usando una notación y un lenguaje más técnico, el enunciado de este problema sería:

Evalúe 
$$f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [(x+\Delta)^\beta - x^\beta].$$

Respuesta:  $f(x) = \beta x^{\beta-1}$ .

3. Evalúe 
$$\frac{\cos(x+\epsilon) - \cos x}{\epsilon} \quad \text{para } |\epsilon| \ll 1.$$

Respuesta:  $-\sin x$ .

4. Represente en forma cuidadosa, en un **mismo** gráfico, para el intervalo  $t \in [-1, 1]$ , las siguientes cuatro funciones:

(a)  $f_0(t) = 1/(1-t)$

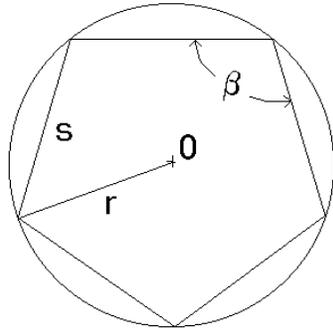


Figura 1.7

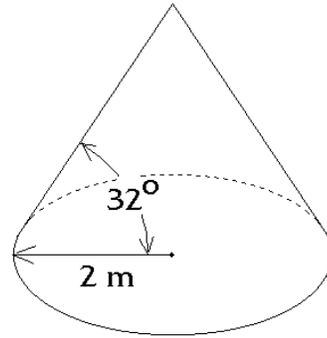


Figura 1.8

- (b)  $f_1(t) = 1 + t$
- (c)  $f_2(t) = 1 + t + t^2$
- (d)  $f_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

Observe que, de acuerdo a la ecuación (1.3),  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  son sucesivamente aproximaciones cada vez mejores (para  $t$  pequeño) de la función  $f_0(t)$ .

5. Demuestre las siguientes relaciones trigonométricas:

$$(a) \quad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$(b) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(c) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

6. Sea  $r$  el radio del círculo circunscrito de un pentágono regular (ver figura 1.7).

- (a) ¿Cuánto mide el ángulo interior  $\beta$  (en radianes)?
- (b) Determine el largo del lado  $s$  en función de  $r$ .
- (c) Determine el área del pentágono.

Respuestas: a)  $\beta = 3\pi/5$  radianes ; c) área =  $\frac{5}{2} r^2 \sin(2\pi/5)$ .

7. Una camionada de arena seca se descarga formando un cono de 4 metros de diámetro. Si la densidad de la arena seca es  $\rho = 1.7 \text{ g/cm}^3$  y el ángulo del cono (ver figura 1.8) es de  $\theta = 32^\circ$ , calcule la masa de la arena (en toneladas).
8. Encuentre todos los valores de  $x$  en el intervalo  $[-5, +5]$  (cuando no se especifica nada se asume que las unidades son radianes) para los cuales se cumple la relación

$$\sin x \tan x = -\frac{3}{2} .$$

Respuesta:  $x = -4\pi/3, -2\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3$ .

9. Represente en un mismo gráfico, para  $t$  en el intervalo  $[-\pi, 2\pi]$ , las siguientes cuatro funciones:
- (a)  $f_0(t) = \sin t$
  - (b)  $f_1(t) = t$
  - (c)  $f_2(t) = t - t^3/3!$
  - (d)  $f_3(t) = t - t^3/3! + t^5/5!$

Aquí nuevamente  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  son sucesivamente aproximaciones cada vez mejores (para  $t$  pequeño) de la función  $f_0(t)$ .

10. Al incidir luz sobre una interfase, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta generalmente sufre un cambio de dirección (ver figura 1.9). Este fenómeno se conoce con el nombre de *refracción* de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la *Ley de Snell*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}} ,$$

donde  $v_{\text{aire}}$  y  $v_{\text{vidrio}}$  corresponden a la velocidad de la luz en el aire y el vidrio, respectivamente. (Para el vidrio común se tiene  $v_{\text{aire}}/v_{\text{vidrio}} \simeq 1.5$ .)

- (a) Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia  $\alpha = 40^\circ$ . Encuentre la distancia  $d$  por la cual el haz de luz emergente se encontrará paralelamente desplazado respecto al haz incidente (ver figura 1.10).
- (b) Considere ahora un haz de luz incidiendo sobre un prisma en la forma que se muestra en la figura 1.11. Encuentre el ángulo  $\beta$  para  $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 50^\circ$  y  $70^\circ$ . ¿Para qué ángulo  $\alpha = \alpha_0$  se obtiene  $\beta = 90^\circ$ ? Para  $\alpha > \alpha_0$  el haz de luz es reflejado especularmente (como si fuese un espejo) por la superficie interior del prisma, fenómeno conocido con el nombre de *reflexión total*.

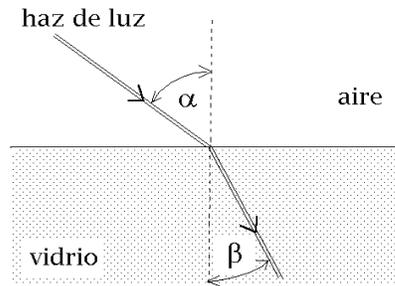


Figura 1.9

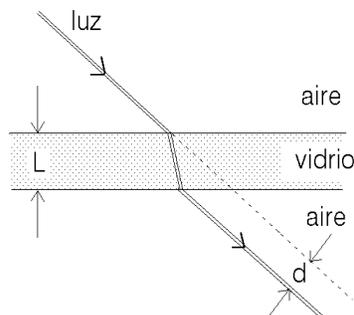


Figura 1.10

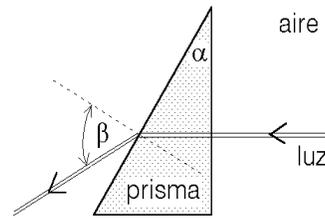


Figura 1.11

11. La figura 1.12 adjunta indica la diferencia entre un *día sideral* y un *día solar*. Para facilitar la explicación supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. (Por supuesto que las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos observan algunas de ellas.)

Para un observador en el Ecuador, el día solar es el período que transcurre entre dos pasos consecutivos del sol por el zenit (posición del sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral consiste en el mismo fenómeno pero que ahora ocurre con una estrella muy lejana. La diferencia entre ambas definiciones se debe a la traslación de la tierra alrededor del sol. Determine el valor del ángulo  $\alpha$  que se muestra en la figura y calcule la diferencia entre el día sideral y el día solar en segundos.

12. Un tambor de 50 cm de radio y 1.5 m de largo se encuentra “acostado” y lleno con parafina hasta una altura  $h = 60$  cm (ver figura 1.13). ¿Cuántos litros de parafina hay en el tambor?
13. La esfericidad de la tierra fue postulada por Pitágoras y confirmada por Aristóteles al observar la forma circular de la sombra que proyecta la tierra en la superficie de la luna durante un eclipse lunar.

El primer cálculo que se conoce del radio de la tierra se debe a Eratóstenes (276

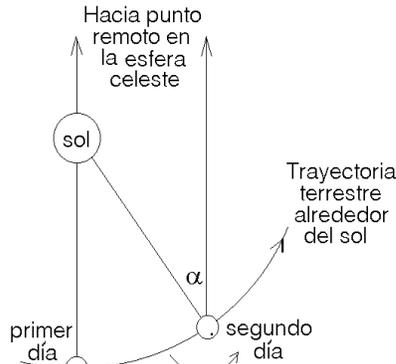


Figura 1.12

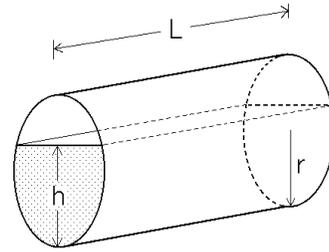


Figura 1.13

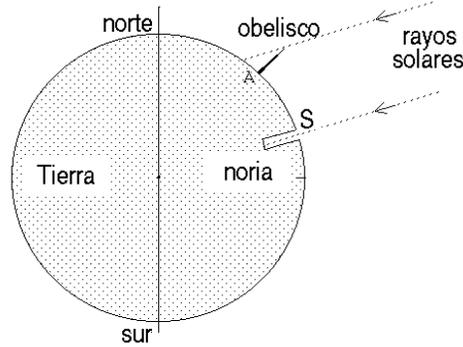


Figura 1.14

A.C.–194 A.C.), quien a la fecha estaba a cargo del Museo de Alejandría. El método que usó se basó en observar el ángulo con que inciden los rayos solares sobre la superficie de la tierra, el mismo día y a la misma hora, en dos lugares separados entre sí por una gran distancia. Los lugares elegidos fueron Siena (S) (hoy Asuán) y Alejandría (A).

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de junio el Sol caía verticalmente en Siena, pues la luz se reflejaba directamente en el fondo de una noria. El mismo día, a la misma hora, midió la sombra que proyectaba en Alejandría un alto obelisco, que le indicó que los rayos solares formaban un ángulo de  $7.2^\circ$  con la vertical (ver figura 1.14).

Dado que el sol está a gran distancia de la tierra se puede suponer que los rayos que llegan a ambas ciudades son paralelos. Eso quiere decir que la separación angular entre Siena y Alejandría medida con respecto al centro de la tierra es también  $7.2^\circ$  ( demuéstrello). Sabiendo que la distancia entre Siena y Alejandría (arco de círculo) es de aproximadamente 800 km, estime el radio de la tierra.

Respuesta: Radio  $\sim 6400$  km. (El resultado que obtuvo Eratóstenes en su época fue incorrecto, debido a la imprecisión con que estimó la distancia entre los dos

lugares.)

14. Una persona ubicada en el punto  $P$  observa dos montañas que la rodean, una a la derecha y la otra a la izquierda. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los ángulos de elevación, respectivamente (ver figura 1.15). Si la montaña de la izquierda tiene una altura  $h$  y la separación entre las proyecciones de las cimas sobre el nivel de la superficie terrestre es  $D$ , calcule la altura del otro monte.
15. En el año 1752 los astrónomos Landale y Lacaille determinaron en Berlín (B) y en la ciudad del Cabo (C), a la misma hora, el ángulo entre la normal y la recta entre su posición y un punto predeterminado del borde de la luna. Los ángulos que determinaron fueron  $\beta = 32.08^\circ$  en Berlín y  $\gamma = 55.72^\circ$  en El Cabo. Ambas ciudades se ubican en el mismo meridiano y se encuentran en las latitudes  $\lambda_B = 52.52^\circ$  y  $\lambda_C = -33.93^\circ$ , respectivamente (ver figura 1.16). Usando para el radio terrestre el valor de 6370 km, determine la distancia entre la tierra y la luna.
16. Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.
17. a) **Teorema del seno.** Demuestre que en un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} ,$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos interiores del triángulo y  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados opuestos a cada uno de estos ángulos.

b) **Teorema del coseno.** Demuestre que en un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma ,$$

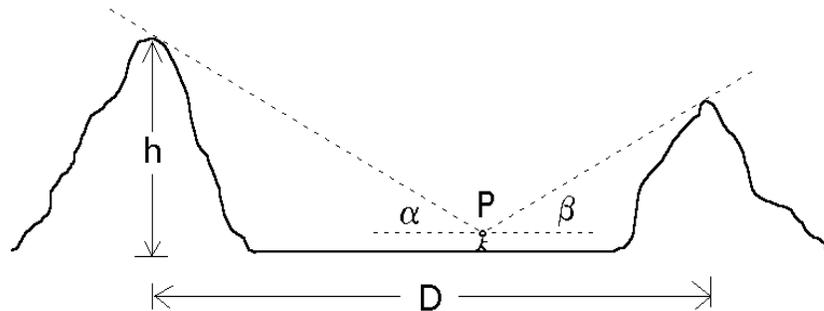


Figura 1.15

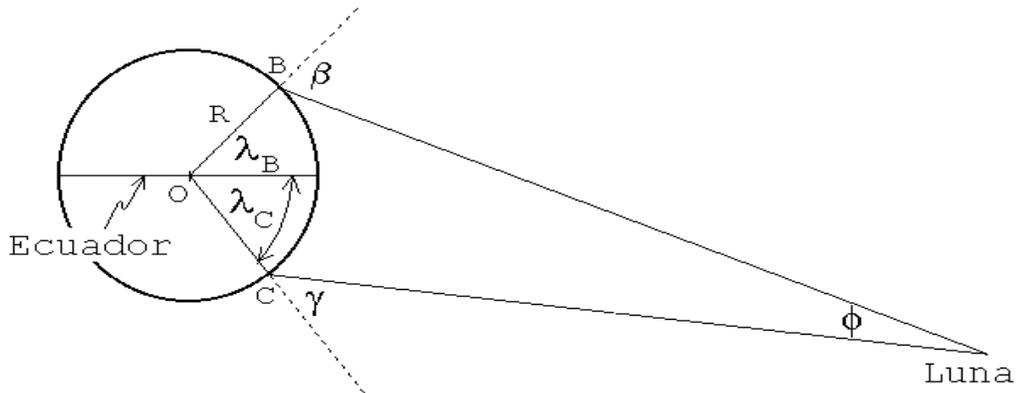


Figura 1.16

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta ,$$

y

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha .$$

18. Determine el largo mínimo que debe tener una cadena para unir dos poleas de radios  $R$  y  $r$ , separadas por una distancia  $D$  (ver figura 1.17).

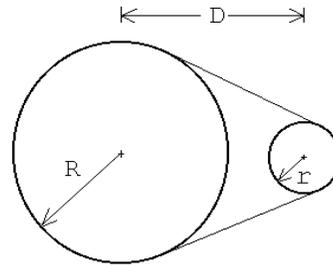


Figura 1.17

Respuesta:

$$L = 2(R - r) \arcsin \left( \frac{R - r}{D} \right) + 2 \sqrt{D^2 - (R - r)^2} + \pi(r + R) .$$

19. Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras.
20. La altura de un edificio se puede determinar midiendo su *ángulo de elevación* y la distancia a la que uno se encuentra del edificio. Suponga que el instrumento que tiene a disposición le permite medir ángulos con un error de  $\pm 1^\circ$ . Determine

el menor error porcentual con que, con tal instrumento, usted puede medir la altura de un edificio.

21. Dos observadores  $A$  y  $B$  miden ángulos de elevación de un avión que los sobrevuela a una altura constante. En cierto instante los ángulos medidos por  $A$  y  $B$  son  $\alpha = 60^\circ$  y  $\beta = 40^\circ$ , respectivamente. Diez segundos más tarde,  $A$  mide un ángulo de elevación  $\gamma = 110^\circ$  (ver figura 1.18). La separación entre  $A$  y  $B$  es  $D = 1$  km. ¿A qué altura vuela el avión? ¿Cuál es su velocidad?

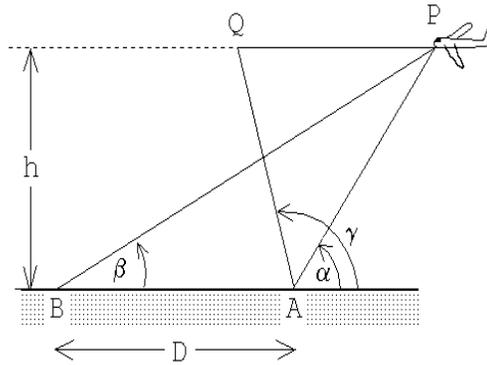


Figura 1.18

22. Grafique, usando un computador, la función  $f(t) = \cos(\pi t) + \cos(0,9\pi t)$  para  $t \in [0, 40]$  y observe el fenómeno de *pulsaciones*.
23. ¿Para qué latitud el paralelo terrestre tiene  $1/3$  de la longitud del Ecuador?

24. Una cuneta de forma angular está caracterizada por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  respecto a la horizontal. Una bola de acero de radio  $R$  posa sobre la cuneta, ver figura 1.19. Determine el nivel mínimo de agua, medido desde el punto más bajo de la cuneta, necesario para cubrir la bola completamente.

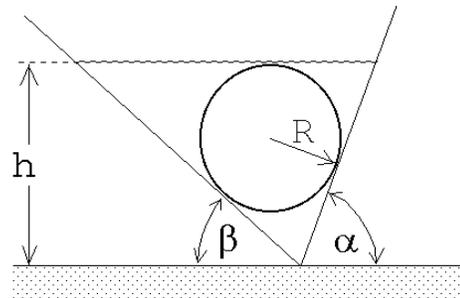


Figura 1.19

25. Son las 12 del día. Determine en cuánto rato más se vuelven a juntar los punteros del reloj.
26. a) Calcule la razón entre las áreas del círculo y del triángulo equilátero que lo circunscribe (ver figura 1.20a).  
 b) Haga el mismo cálculo anterior pero para el caso en que el triángulo contenga  $n(n + 1)/2$  discos de radio  $R$  dispuestos como se muestra en la figura 1.20b.

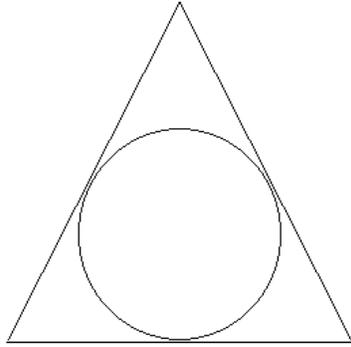


Figura 1.20a

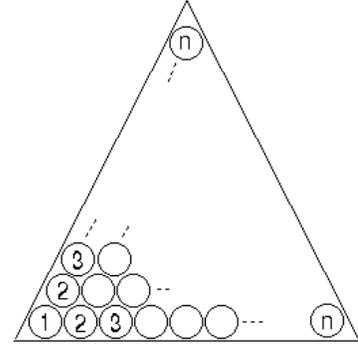


Figura 1.20b

27. Usted se plantea tener un atardecer de 24 horas de duración en el Ecuador, para lo cual cuenta con un aeroplano. Calcule la velocidad con que debería volar y la dirección que debe tomar para lograr su propósito. Si un amigo viaja a la misma velocidad relativa a la tierra, pero en sentido opuesto, calcule el tiempo que transcurrirá hasta encontrarse nuevamente con él.
28. Hay que decidir el tipo de empaque que se le va a dar a pelotas de tenis en una bandeja de forma cuadrada. Decida cual de las dos configuraciones mostradas en la figura 21 resulta más conveniente. Justifique su respuesta cuantitativamente.

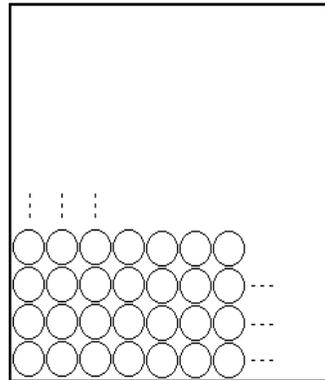


Figura 1.21a

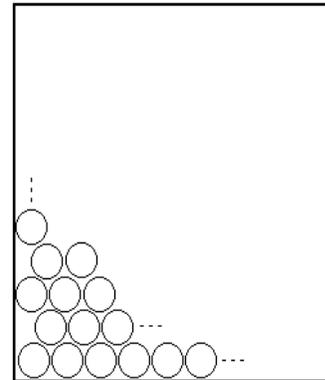


Figura 1.21b

### 1.4 Solución a algunos de los problemas

#### Solución al problema 15

Inspeccionando la figura 1.22 se deduce de inmediato que

$$\phi = \delta_\beta + \delta_\gamma$$

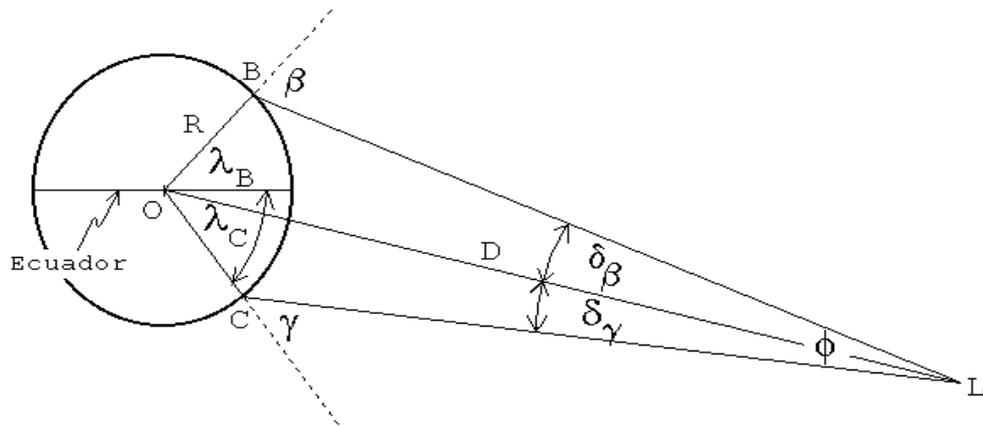


Figura 1.22

y

$$\phi = \beta + \gamma - \lambda_B - |\lambda_C|.$$

Usando el *teorema del seno* (ver problema 17) en los triángulos OBL y OLC, se obtienen las expresiones

$$\frac{\sin \delta_\beta}{R} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{D}$$

y

$$\frac{\sin \delta_\gamma}{R} = \frac{\sin(\pi - \gamma)}{D}.$$

Como  $\delta_\beta$  y  $\delta_\gamma$  son ángulos pequeños podemos usar las aproximaciones

$$\sin \delta_\beta \simeq \delta_\beta$$

y

$$\sin \delta_\gamma \simeq \delta_\gamma.$$

De esta manera se obtienen

$$\delta_\beta \simeq \frac{R}{D} \sin \beta$$

y

$$\delta_\gamma \simeq \frac{R}{D} \sin \gamma .$$

Sumando estas ecuaciones se deduce que

$$\phi = \delta_\beta + \delta_\gamma \simeq \frac{R}{D} (\sin \beta + \sin \gamma) ,$$

o sea,

$$D \simeq \frac{R (\sin \beta + \sin \gamma)}{\phi} = \frac{R (\sin \beta + \sin \gamma)}{\beta + \gamma - \lambda_B - |\lambda_C|} .$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos se encuentra que

$$D \simeq 367.000 \text{ km} ,$$

valor muy cercano al actualmente aceptado para el radio de la órbita lunar, que es de 384.000 km.

### Solución al problema 16

Consideremos un cubo de lados  $a$ . Sea  $A$  un vértice de una diagonal y  $B$  el vértice de otra diagonal del cubo. De los dos vértices de la segunda diagonal, denotaremos por  $B$  al vértice que está a una distancia  $a$  de  $A$  (el otro vértice se encontrará a una distancia  $a\sqrt{2}$  de  $A$ ). Sea  $O$  el punto central del cubo.

El triángulo  $AOB$  es isósceles: con base  $\overline{AB} = a$  y lados  $b \equiv \overline{AO} = \overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ . El ángulo  $\alpha = \sphericalangle (AOB)$  es el ángulo buscado. Se tiene que

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

de donde se deduce que

$$\alpha = 70.529^\circ .$$

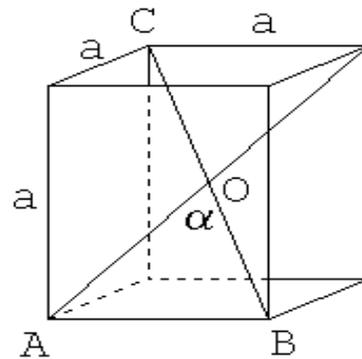


Figura 1.23

El ángulo complementario  $\sphericalangle (AOC) = 109.47^\circ$ .

**Solución al problema 21**

Sea  $a = \overline{AP}$  y  $d = \overline{PQ}$ . Usando el teorema del seno en el triángulo  $APB$  se obtiene

$$\frac{\sin \beta}{a} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{D},$$

o sea,

$$a = D \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Usando el teorema del seno en el triángulo  $AQP$  se deduce que

$$\frac{\sin(\pi - \gamma)}{a} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{d}.$$

Usando las dos ecuaciones anteriores se obtiene para  $d$  la expresión

$$d = D \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma}.$$

Reemplazando los valores numéricos se encuentra que la distancia recorrida por el avión en 10 segundos es  $d = 1,53$  km. La velocidad del avión es, por lo tanto,  $v = 552$  km/h. La altura a la que vuela el avión viene dada por

$$h = a \sin \alpha = 1628 \text{ [m]}.$$

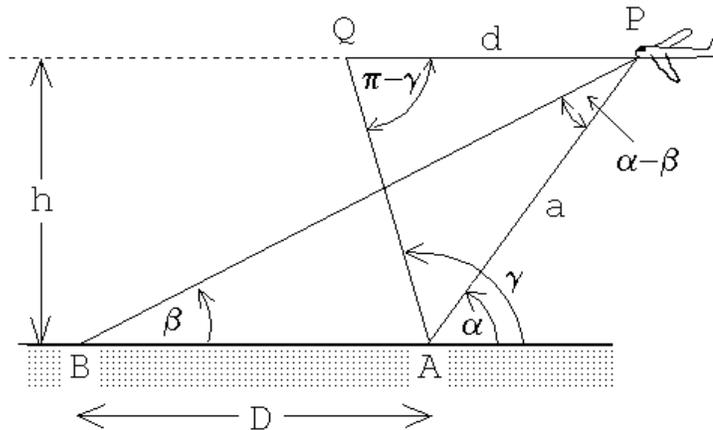


Figura 1.24

**Solución al problema 24**

Primero giremos la cuneta de manera que quede simétrica respecto a la horizontal, es decir, con un ángulo  $(\alpha + \beta)/2$  a cada lado (ver figura 25a).

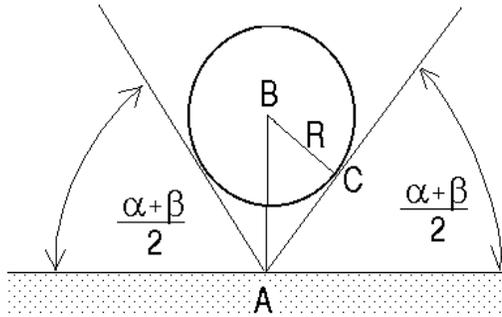


Figura 1.25a

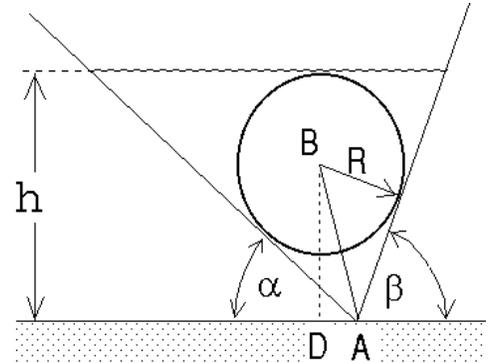


Figura 1.25b

El ángulo  $\sphericalangle ABC$  también es  $(\alpha + \beta)/2$ , luego

$$\overline{AB} = \frac{R}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Para volver a poner la cuneta en la orientación original debemos girarla en un ángulo  $(\beta - \alpha)/2$ . Por lo tanto, (ver figura 1.25b)

$$\overline{BD} = \overline{AB} \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = R \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Para la altura del nivel de agua se obtiene finalmente la expresión

$$h = R \left[ 1 + \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \right].$$

## Capítulo 2

# Cinemática en una dimensión

versión 6 junio 2008

La Cinemática es la descripción del movimiento de un cuerpo sin considerar las causas que lo producen. Ser capaces de describir adecuadamente el movimiento es el primer paso para estudiarlo y entender sus causas. En este Capítulo introduciremos conceptos básicos para la descripción del movimiento: posición, velocidad, aceleración. Mantendremos la discusión simple al considerar sólo movimientos en una dimensión. Sin embargo, incluso con esta simplificación será necesario introducir conceptos matemáticos nuevos, sin los cuales nos sería muy difícil avanzar. Por ello, en este Capítulo también se revisarán algunas nociones básicas de cálculo integro-diferencial. Como en el Capítulo anterior, la idea es introducir estos conceptos de manera intuitiva, como necesidades naturales para la descripción del movimiento, dejando los aspectos más formales para el curso de Cálculo correspondiente.

### 2.1 Posición, velocidad y aceleración

Para simplificar la discusión, comenzaremos por estudiar el movimiento de objetos cuya ubicación queda determinada especificando la posición de un solo punto. Este tipo de objeto recibe el nombre de *partícula*. Contrariamente a lo que pudiera pensarse, no es necesario que los objetos sean pequeños para que puedan ser considerados partículas. Por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de la tierra en torno al sol, la distancia relevante es la distancia Tierra-Sol. En este caso, el tamaño de la Tierra no es importante, pudiéndose tratar como una partícula ubicada en el centro de la tierra.

El movimiento más simple de una partícula se tiene cuando la posición de ésta viene descrita por una única coordenada; por ejemplo, el movimiento de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta. Será éste tipo de movimientos del que nos ocuparemos en este Capítulo. No nos basta con saber que el movimiento es a lo largo de una recta, sin embargo. Para describir el movimiento de la partícula necesitamos

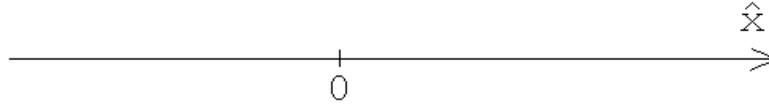


Figura 2.1

elegir un origen, en alguna parte arbitraria de la recta. Además, necesitamos decidir qué lado de la recta será el lado positivo, y cuál el negativo. Lo usual es escoger el lado positivo como el lado derecho (Fig. 1.1).

En estas condiciones, la *posición* de una partícula queda determinada dando simplemente un número (la “coordenada  $x$ ”). La descripción de su movimiento es completa si conocemos la función  $x(t)$  que indica la posición que ocupa en cada instante  $t$ .

La diferencia entre la coordenada de una partícula entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$  (con  $t_2 > t_1$ ) se denomina *desplazamiento*:

$$\text{Desplazamiento} \equiv x_2 - x_1 \equiv \Delta x .$$

El desplazamiento es una cantidad con unidades, que se mide, en el sistema internacional, en *metros* (m). Además, el desplazamiento tiene signo. Si la coordenada  $x$  de la partícula se incrementa durante cierto intervalo de tiempo, entonces el desplazamiento es positivo; si, por el contrario, decrece, el desplazamiento es negativo. Notemos que un desplazamiento positivo significa que la partícula está más *a la derecha* que lo que estaba inicialmente, no que está más lejos del origen.

En todo caso, es claro que, si bien el desplazamiento es un primer concepto útil para describir el movimiento, no es en absoluto capaz de hacerlo completamente. No es lo mismo cubrir la distancia entre dos ciudades en automóvil que en auto. Es necesario, además, introducir el concepto de tiempo en esta discusión.

Se define la *velocidad media* de una partícula durante el intervalo  $[t_1, t_2]$  como la razón entre el desplazamiento y la duración del intervalo de tiempo,

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} ,$$

y sus unidades, en el sistema internacional, son de metros sobre segundos (m/s).

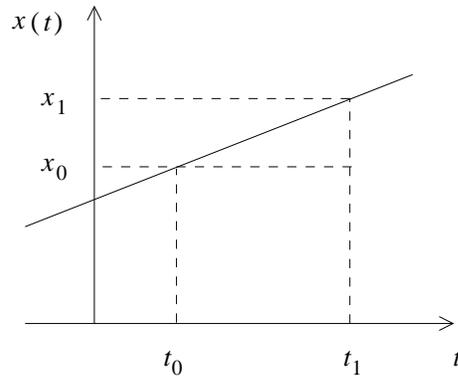
La velocidad media entrega una información global sobre el movimiento que realiza una partícula en un cierto intervalo de tiempo. En cualquier viaje en automóvil a veces vamos más rápido o más lento, por ejemplo. La velocidad media no pretende dar estos detalles. Pero si la velocidad es constante, entonces uno puede estar seguro de que la velocidad siempre será igual a la velocidad media, pues el cociente entre  $\Delta x$  y  $\Delta t$  será el mismo, independiente del intervalo de tiempo escogido.

Consideremos entonces el caso en que la velocidad es constante,  $v_0$ . De la ecuación anterior se sigue que, si denominamos  $x_0$  a la posición inicial en el tiempo  $t_0$ , y a  $x(t)$  a la posición en un tiempo  $t$  cualquiera, entonces

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) .$$

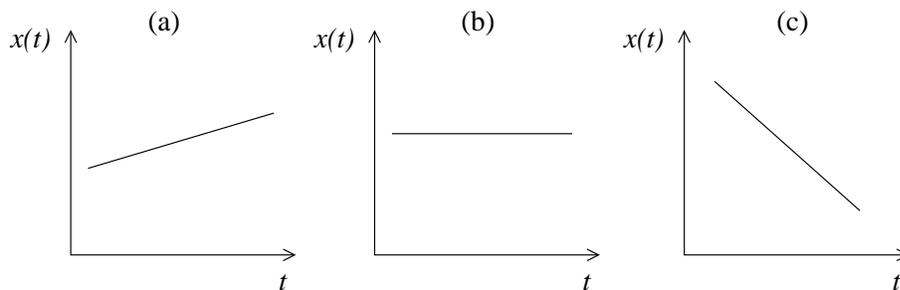
Uno dice que ésta es una ecuación de itinerario, porque nos permite saber, si conozco las condiciones iniciales  $(t_0, x_0)$ , dónde se encuentra la partícula en cada instante. La ecuación de itinerario anterior, entonces, contiene  *toda*  la información necesaria para describir el movimiento si la velocidad es constante.

Si graficamos la ecuación de itinerario anterior, resultará una línea recta:



Observemos dos cosas: primero,  $t_0$  es simplemente un tiempo inicial, arbitrario. No es necesariamente el tiempo en que el movimiento comenzó (como vemos en la figura anterior, en que la partícula ya estaba en movimiento antes de  $t_0$ ). Es sólo un instante de referencia. Ni siquiera  $t = 0$  tiene que ser el instante en que comienza el movimiento;  $t = 0$  puede ser el tiempo en el comenzó a funcionar nuestro cronómetro, o cualquier otro instante de referencia adecuado.

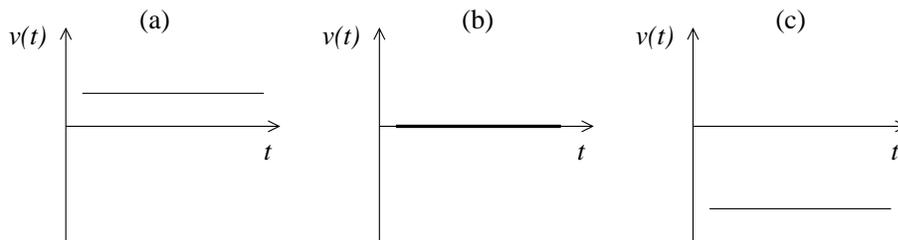
Segundo, de la ecuación de itinerario, o bien de la figura anterior, se sigue que  $v_0$  es la *pendiente* de la recta  $x(t)$ . Observemos las siguientes figuras esquemáticas



La Fig. (a) representa a una partícula moviéndose con velocidad positiva, vale decir, *hacia la derecha* [de la definición de velocidad media, ésta es mayor que cero si

$x(t_2) > x(t_1)$ ]. La Fig. (b), en cambio, representa a una partícula en reposo (velocidad cero). Finalmente, la Fig. (c) representa a una partícula con velocidad negativa, es decir, moviéndose hacia la izquierda. Observemos que, en módulo, la pendiente (c) es mayor que la pendiente (a), por tanto podemos afirmar que la partícula que se mueve hacia la izquierda se mueve más rápidamente que la partícula hacia la derecha.

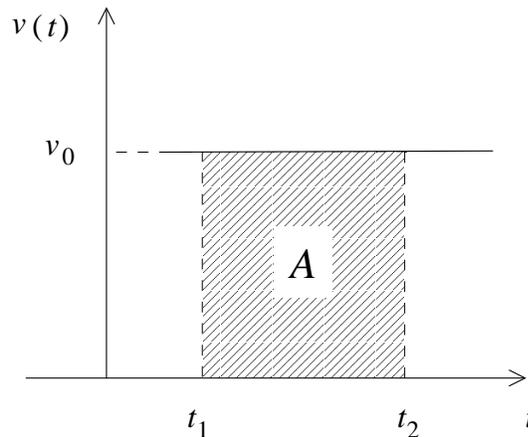
Si graficamos ahora la velocidad como función del tiempo, para las mismas tres partículas anteriores, obtendremos las siguientes figuras:



Las líneas horizontales indican que se trata de movimientos con velocidad constante en todos los casos, primero positiva, luego cero, y luego negativa, pero de módulo mayor que en el caso (a).

Si bien es cierto tenemos bastante información en estos gráficos, no tenemos toda la información necesaria para describir el movimiento de la partícula. Por ejemplo, si la partícula (a) está inicialmente a la derecha del origen, entonces sabemos que se está alejando del mismo; si está a la izquierda del origen, sabemos que se está acercando. Así que no podemos determinar completamente su movimiento a menos que tengamos información sobre su posición inicial. Esto es, por supuesto, consistente con nuestra ecuación de itinerario anterior.

Sin embargo, observemos el siguiente interesante hecho: Consideremos, en el gráfico de velocidad versus tiempo (a) anterior, dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ :



Dichos instantes determinan un área bajo la curva,  $A$ , igual a

$$A = v_0 \Delta t ,$$

que es precisamente igual a  $\Delta x$ , el desplazamiento de la partícula entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . Así que, dado un gráfico velocidad versus tiempo, no sólo podemos conocer su velocidad, sino el desplazamiento, lo cual es bastante información. Si además conocemos su posición inicial, entonces podremos determinar completamente la trayectoria de la partícula.

**Problema resuelto en clases: 2.13**

Hasta ahora tenemos, entonces, una descripción completa del movimiento de partículas con velocidad constante. Sin embargo, la mayoría de las veces la velocidad es constante. Por analogía a lo ya hecho, donde definimos una velocidad media como el cociente entre un intervalo de posiciones y un intervalo de tiempos, ahora definiremos el concepto de *aceleración*.

La *aceleración media* (o promedio) que tiene la partícula durante el intervalo  $[t_1, t_2]$  es igual al cambio de velocidad que ocurre durante el intervalo, dividido por la duración de éste, es decir

$$\bar{a}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

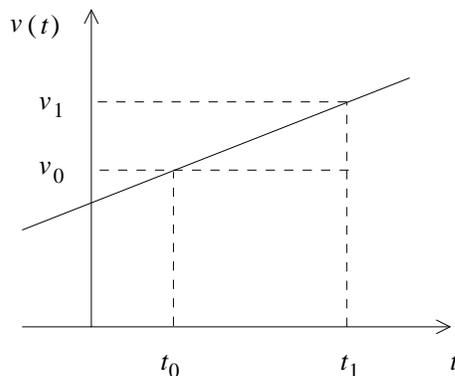
Las unidades de la aceleración son  $\text{m/s}^2$ .

Si la aceleración es constante, igual a  $a$ , entonces la aceleración media es igual a la aceleración  $a$  en todo intervalo de tiempo. (Esto es lo que se denomina un *movimiento uniformemente acelerado*.) De la definición se sigue que, en este caso, llamando al instante inicial  $t_1 = t_0$ , la velocidad inicial  $v(t_0) = v_0$ , y a  $t_2 = t$ ,

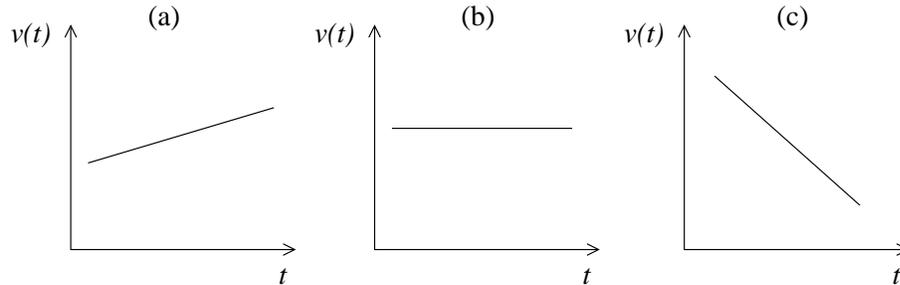
$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) .$$

Conocida la aceleración, entonces, podemos determinar la velocidad en todo instante, conocida la velocidad inicial.

La ecuación anterior, además, nos dice que el gráfico de velocidad versus tiempo, cuando la aceleración es constante, es una línea recta, de pendiente igual a la aceleración:



De manera análoga a lo que hicimos para velocidad constante, podemos ahora graficar la velocidad como función del tiempo, para distintas aceleraciones:

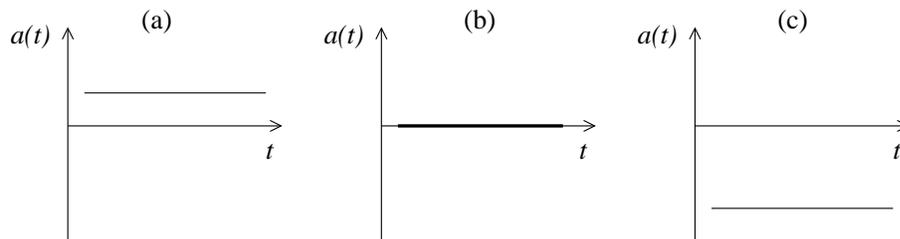


En el caso (a), tenemos una partícula cuya velocidad aumenta (aceleración positiva). Nuevamente hay que tener cuidado con las interpretaciones: que la velocidad aumenta significa, en el caso de la figura (a), que la partícula va cada vez más rápido (recorre, en intervalos de tiempo iguales, cada vez mayor distancia). Sin embargo, si la recta estuviera bajo el eje de las abscisas, que la velocidad aumente significa que se hace cada vez *menos negativa*, lo cual implica que la partícula va cada vez más lento (recorre, en intervalos de tiempo iguales, cada vez menor distancia).

Luego, en el caso (b), la recta tiene pendiente cero, es decir la aceleración es cero. Corresponde precisamente al caso que habíamos analizado antes, con velocidad constante.

Por último, en el caso (c), la partícula tiene aceleración negativa, es decir, su velocidad disminuye (lo cual no significa necesariamente que vaya más lento).

También podemos graficar la aceleración como función del tiempo, para cada uno de los casos anteriores:



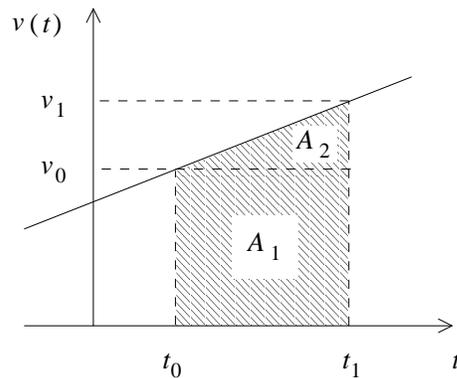
Recapitulando: en un gráfico de posición versus tiempo, la pendiente de la recta  $x(t)$  representa la velocidad; en uno de velocidad versus tiempo, la pendiente de la recta  $v(t)$  representa la aceleración

Observemos que, análogamente a los gráficos  $v(t)$  analizados anteriormente, en este caso el área bajo la curva de un gráfico  $a(t)$  nos da  $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$ , el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo dado.

Ya habíamos encontrado que, al menos para el caso en que la velocidad es constante, el área bajo la curva en el gráfico de  $v(t)$  es el desplazamiento. ¿Será cierto

aun en el caso en que la aceleración es distinta de cero? Claro que sí. La razón es que siempre será posible dividir el movimiento en intervalos suficientemente pequeños en que la velocidad se pueda considerar constante, y para cada uno de esos intervalos sería entonces cierto, como vimos, que el área bajo la curva es el desplazamiento.

Ahora estamos en condiciones de encontrar la posición de una partícula con aceleración constante  $a$ . Consideremos la curva  $v(t)$  siguiente, y calculemos el área bajo la curva entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ :



El desplazamiento será la suma de las áreas  $A_1$  y  $A_2$ :

$$\Delta x = A_1 + A_2 = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t \Delta v .$$

De la definición de aceleración,  $\Delta v = a \Delta t$ , luego

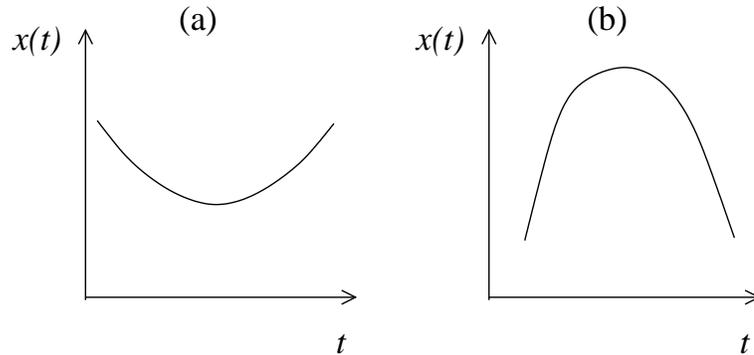
$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 .$$

Definiendo, para simplificar la notación,  $t_1 = t$ ,  $x(t_0) = x_0$ , queda

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 ,$$

que es entonces la ecuación de itinerario para aceleración constante. Si sólo conocemos el gráfico de  $v(t)$ , entonces para determinar completamente la posición necesitamos una información adicional,  $x(t_0) = x_0$ .

Se sigue que el gráfico de  $x(t)$  es, si hay aceleración constante, una parábola. En particular, mientras más grande sea la aceleración  $a$ , la parábola será más abierta. Además, si  $a > 0$ , se tiene una parábola “apuntando” hacia arriba, y si  $a < 0$  será una parábola invertida. Matemáticamente, el concepto a usar es el de *curvatura*. Consideremos, por ejemplo, las siguientes curvas:



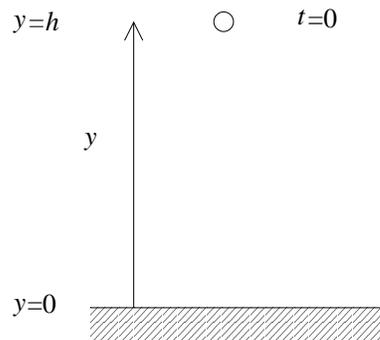
El caso (a) corresponde a una parábola con curvatura positiva (curva cóncava), de modo que describe a una partícula con aceleración positiva, mientras que en (b) la partícula tiene curvatura (aceleración) negativa (curva convexa). En módulo, la aceleración del caso (a) es menor que en (b). Observemos que una recta es una curva con curvatura cero, es decir, la aceleración es cero, lo cual por supuesto es consistente con nuestros resultados anteriores, que una recta en el gráfico  $x(t)$  corresponde a un movimiento con velocidad constante.

Recapitulamos brevemente la correspondencia entre conceptos geométricos y físicos en los gráficos que hemos estudiado:

Concepto geométrico	Concepto físico		
	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
pendiente	velocidad	aceleración	—
curvatura	aceleración	—	—
área bajo la curva	—	desplazamiento	cambio de velocidad

**Ejemplo:**

Consideremos una piedra que se deja caer desde una altura  $h$ . ¿Cuánto tiempo se demora en caer, y con qué velocidad llega al suelo? Representemos gráficamente este problema:



Debemos ser cuidadosos, en todo este tipo de problemas, al elegir el origen del tiempo, y el origen de coordenadas. Por supuesto, el resultado final no debería depender de dicha elección, pero es necesario hacerla para que cualquier ecuación de itinerario tenga sentido. En este caso, hemos escogido  $t = 0$  como el instante en que se deja caer la pelota, el eje de coordenadas es en la dirección vertical, que es donde ocurre el movimiento, con  $y = 0$  en el suelo y con la dirección positiva apuntando hacia arriba.

Galileo fue quien observó que todos los cuerpos, en una situación como la descrita en la figura, están sujetos a la misma aceleración, que llamamos *aceleración de gravedad*, e igual a  $a = -g \equiv -9.8 \text{ m/s}^2$ . Debemos tener cuidado con el signo, para no cometer un error típico: que la aceleración sea negativa no tiene relación con que la piedra “cae”. No es tan sencillo. Una aceleración negativa significa que la velocidad disminuye. Si inicialmente la velocidad es cero, como en la figura, entonces que disminuya significa que la velocidad se vuelve negativa. Una velocidad negativa significa que el desplazamiento es negativo, es decir, que su coordenada de posición disminuye con el tiempo. En el caso de la figura, inicialmente  $y = h > 0$ , luego  $y$  se hace menos positiva con el tiempo, *es decir, cae*. En este caso particular, que la aceleración sea negativa significa que cae. Pero ¿qué sucede si la partícula es lanzada desde la altura  $h$  hacia arriba? En tal caso, sigue siendo cierto que la velocidad debe disminuir, porque la aceleración es negativa. Pero ahora, inicialmente, la velocidad es positiva (porque su desplazamiento es positivo, es decir, su posición  $y$  aumenta, se hace más positiva respecto a  $h$ ), de modo que en un instante posterior su velocidad es menos positiva. La partícula entonces no cae, sino simplemente va cada vez más lento.

Ya que hemos fijado el significado de  $t = 0$ ,  $y = 0$  e  $y > 0$ , escribimos las ecuaciones de itinerario:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 ,$$

$$v(t) = v_0 + a t ,$$

donde  $y_0 = y(t = 0)$ ,  $v_0 = v(t = 0)$ . En nuestro ejemplo, además,  $y_0 = h$ ,  $v_0 = 0$ ,  $a = -g$ , luego

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

$$v(t) = -g t .$$

Podemos entonces responder la primera pregunta, cuándo la partícula llega al suelo. Esto sucede para un tiempo  $t = T$  tal que  $y(T) = 0$ , es decir:

$$y(T) = h - \frac{1}{2} g T^2 ,$$

que tiene *dos soluciones*:

$$T = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Nos encontramos aquí frente al mismo problema que con las funciones inversas trigonométricas: más de una solución matemática, pero sólo una puede ser físicamente correcta, ya que sabemos que si dejamos caer esta piedra, llegará al suelo en un único instante bien determinado. ¿Cuál es la solución físicamente aceptable? En este caso, es evidente que la piedra debe llegar al suelo *después* de soltarla, por lo tanto la solución correcta es la positiva,  $T = \sqrt{2h/g}$ .

Toda esta discusión puede parecer una trivialidad, pero no es difícil imaginar un problema en que la solución correcta no sea la anterior. En efecto, digamos que el experimento ahora es lanzar la piedra, con cierta velocidad inicial, desde el suelo, y que llega al punto más alto de su trayectoria, antes de caer nuevamente, en  $t = 0$ . Recordemos: la elección de  $t = 0$  es completamente arbitraria, y nada nos impide fijar que  $t = 0$  es el instante en que la piedra alcanza su mayor altura. La pregunta ahora es: ¿Cuándo fue lanzada la piedra? No es difícil convencerse de que las ecuaciones de itinerario son exactamente las mismas, y por lo tanto la solución matemática será  $T = \pm\sqrt{2h/g}$ . Sin embargo, en este caso la piedra fue lanzada *antes* de que llegara arriba, y por lo tanto la solución física al problema es el *tiempo negativo*,  $T = -\sqrt{2h/g}$ . Por supuesto, un tiempo negativo no es nada exótico. Significa simplemente que es un tiempo anterior a  $t = 0$ , cuya elección a su vez es completamente arbitraria.

Ahora podemos responder la siguiente pregunta: ¿con qué velocidad llega al suelo? Como sabemos el tiempo que tarda en caer, la velocidad final será

$$v(T) = aT = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} .$$

Que la velocidad sea negativa significa, dada la elección de nuestro eje de coordenadas, que es hacia abajo, como debe ser.

Hay una manera un poco más directa de obtener el mismo resultado. Consideremos ahora un caso general de un movimiento acelerado, y las correspondientes ecuaciones de itinerario, que escribiremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_1\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 , \\ \Delta v &= a\Delta t ,\end{aligned}$$

con  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ ,  $\Delta v = v_2 - v_1$ ,  $v_1 = v(t_1)$  y  $v_2 = v(t_2)$ . Las dos ecuaciones dependen del tiempo, pero podemos manipularlas para obtener una expresión que no dependa del tiempo. Basta con despejar  $\Delta t$  de la segunda ecuación, y reemplazar el resultado en la primera:

$$\Delta x = v_1\frac{\Delta v}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta v}{a}\right) = \frac{\Delta v}{a}\left(v_1 + \frac{1}{2}\Delta v\right) = \frac{v_2 - v_1}{a}\frac{1}{2}(v_1 + v_2) ,$$

es decir

$$\Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} .$$

Tenemos aquí una expresión que relaciona directamente la distancia recorrida, la aceleración, y las velocidades inicial y final de una partícula, si la aceleración es constante. El tiempo que transcurre entre medio no es relevante.

Usando esta expresión podemos recalculer la velocidad con que la piedra llega al suelo en nuestro ejemplo anterior. En este caso,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T$ , de modo que  $\Delta x = 0 - h = -h$ ,  $v_1 = 0$ ,  $a = -g$ , y  $v_2 = v(T)$  es lo que queremos calcular. Se tiene entonces

$$v_2^2 = 2a\Delta x = 2gh ,$$

resultado por supuesto consistente con lo anterior, pero ahora obtenido de un modo mucho más sencillo. Nuevamente acá tenemos dos soluciones matemáticamente aceptables,  $v_2 = \pm\sqrt{2gh}$ . Pero sabemos que la partícula, en  $t = T$ , se mueve hacia abajo, por tanto (dada la elección de eje coordenado que hicimos) su velocidad es negativa, de modo que la solución físicamente aceptable es *la solución negativa*,  $v_2 = -\sqrt{2gh}$ .

#### Problema resuelto en clases: 2.12

Hasta el momento, hemos definido ciertos conceptos básicos, y relacionado algunos elementos geométricos con físicos, para movimientos sencillos, con velocidad o aceleración constante. Sin embargo, en general los cuerpos se mueven de manera más compleja, y debemos por tanto extender los resultados anteriores para describir dichos movimientos también.

Lo primero que observamos es que la velocidad media, si bien es cierto nos da una primera idea acerca del movimiento, no es un buen descriptor de los detalles del mismo. En la Fig. 2.2 hemos representado la trayectoria de una partícula. En un gráfico  $x(t)$  en función de  $t$ , la velocidad media entre  $t_1$  y  $t_2$  corresponde a la tangente del ángulo que forma la recta que une  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  con el eje del tiempo.

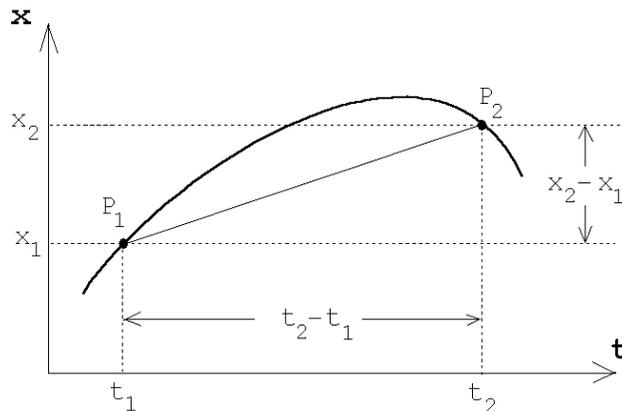


Figura 2.2

Si la partícula se moviera realmente con la velocidad media, su trayectoria sería el trazo que une a los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , pero es claro que, en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , el movimiento es algo más complicado.

Si se desea tener una información más precisa acerca de la velocidad durante el movimiento, es necesario subdividir el intervalo de tiempo original en subintervalos y calcular en cada uno de ellos una velocidad media. Mientras más pequeño es el tamaño de esos subintervalos, más precisa es la información acerca de las variaciones que experimenta la velocidad de la partícula mientras se desplaza. El valor que se mide para la velocidad media en un cierto intervalo de tiempo  $\epsilon$  pequeño, donde  $\epsilon$  es finito pero tan pequeño como nosotros deseamos, se denomina *velocidad instantánea*.

Para determinar la *velocidad instantánea* de la partícula en un instante  $t$ , se evalúa la velocidad promedio durante un intervalo muy pequeño que comienza en  $t$  y termina en  $t + \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es un incremento de tiempo infinitesimal (más adelante, al finalizar el cálculo, haremos  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Explícitamente:

$$\bar{v}(t, t + \epsilon) = \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon} .$$

Al hacer  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene la velocidad instantánea de la partícula en el instante  $t$ . Esta la denotaremos por  $v(t)$  o  $\dot{x}(t)$ . Se tiene

$$v(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon} = \dot{x}(t) . \quad (2.1)$$

Este proceso límite está ilustrado en la Figura 2.3. Allí se observa cómo cambia el valor de la velocidad media de la partícula en un intervalo  $[t, t + \Delta t]$  cuando es evaluada para diferentes valores de  $\Delta t$ . Mientras más pequeño es  $\Delta t$ , la recta que une los dos puntos de la curva se parece más a la curva “real” (en la figura,  $\overline{P_1 P_3}$  es mucho más parecida a la curva  $x(t)$  en el intervalo  $\Delta t_3$ , que el trazo  $\overline{P_1 P_2}$  en el intervalo  $\Delta t_1$ . (Esto no es sino una consecuencia de que, en intervalos de tiempo suficientemente cortos, siempre se puede considerar que la velocidad es constante.) En el caso límite, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se observa que la velocidad instantánea queda representada por la tangente del ángulo (es decir, la pendiente) que forma la recta tangente a la curva  $x(t)$  vs.  $t$  con el eje del tiempo.

De aquí en adelante el término *velocidad* siempre se referirá a la velocidad instantánea.

Es interesante notar cómo la información anterior nos permite describir de manera bastante detallada el movimiento de una partícula, simplemente observando su gráfico de posición versus tiempo. Por ejemplo, en la Fig. 2.3, podemos decir que, en el instante  $t$ , la partícula tiene velocidad positiva (la pendiente de la recta tangente a la curva en  $P$  es positiva), de modo que se mueve hacia la derecha, alejándose del origen; luego, a medida que avanza el tiempo, su velocidad se hace cada vez más pequeña, hasta hacerse cero un poco antes que  $P_2$  (la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal, de modo que su pendiente es cero), momento en el cual alcanza

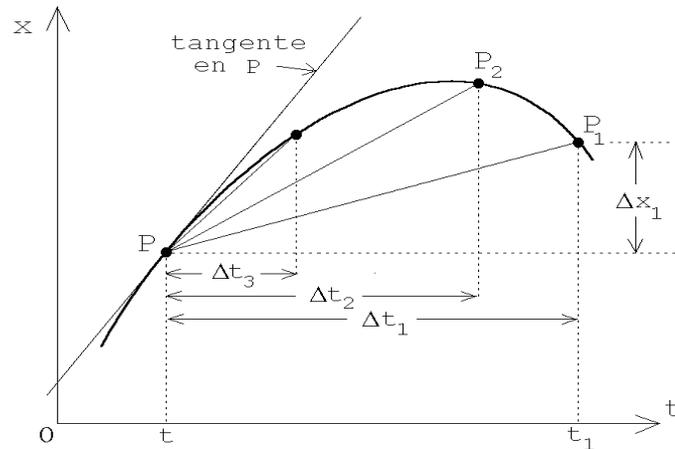


Figura 2.3

su máxima distancia respecto al origen. Más adelante, la tangente a la curva en  $P_1$  tiene pendiente negativa, de modo que la partícula tiene velocidad negativa en  $t = t_1$ , esto es, se mueve hacia la izquierda, acercándose ahora al origen.

Ejemplos:

- Supongamos que la posición de una partícula viene dada por  $x(t) = x_0 + v_0 t$ , con  $x_0 = -1$  m y  $v_0 = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . El gráfico  $x(t)$  en función de  $t$  da lugar a la recta que se muestra en la figura 2.4.

Evaluemos explícitamente la velocidad en un instante  $t$  cualquiera. Usando la ecuación (2.1) y la expresión para  $x(t)$  de este ejercicio, se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[x_0 + v_0 \cdot (t + \epsilon)] - [x_0 + v_0 \cdot t]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_0 = v_0 . \end{aligned}$$

Este resultado indica que la expresión para  $x(t)$  escrita más arriba efectivamente corresponde al movimiento de una partícula con velocidad constante  $v_0$  (i.e., independiente del tiempo).

- Supongamos ahora que la posición de una partícula viene dada por

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

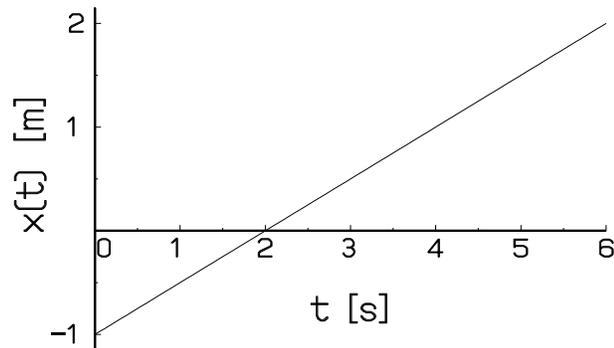


Figura 2.4

con  $z_0 = 10$  m y  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Esto describe a una partícula en caída libre en el campo gravitatorio terrestre, que se deja caer en  $t = 0$  desde una altura  $z_0$ . Al graficar la posición en función del tiempo se encuentra la curva (parábola) mostrada en la figura 2.5.

Evaluemos la velocidad en un instante  $t$  cualquiera. Usando la ecuación (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z(t + \epsilon) - z(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[z_0 - \frac{1}{2}g \cdot (t + \epsilon)^2] - [z_0 - \frac{1}{2}g \cdot t^2]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}g \cdot \epsilon \cdot (2t + \epsilon)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g \cdot (2t + \epsilon)}{2} = -gt . \end{aligned}$$

La figura 2.6 muestra el gráfico de la velocidad instantánea en función del tiempo. Se observa que ésta decrece linealmente a medida que transcurre el tiempo. El signo negativo de la velocidad significa que la partícula se está desplazando en el sentido negativo del eje  $z$ .

Sin embargo, el módulo de la velocidad de la partícula (magnitud que en algunos textos es denominada *rapidez*) aumenta a medida que transcurre el tiempo:

$$|v(t)| = gt .$$

Así como generalizamos el concepto de velocidad al caso de velocidad no uniforme, a través de un proceso límite, podemos hacerlo para el caso en que la *aceleración* no es uniforme. Por los mismos argumentos dados anteriormente, en este caso la aceleración media da sólo información aproximada sobre el cambio de velocidad. Pero intuimos que, para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, la aceleración media debería ser la aceleración “correcta”. Definimos entonces la *aceleración instantánea* en un

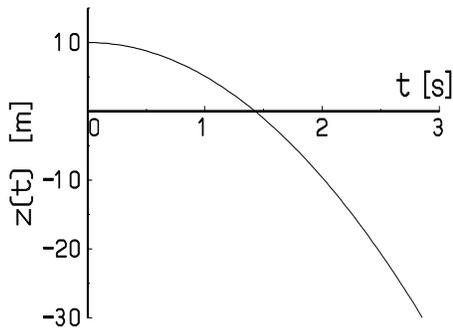


Figura 2.5

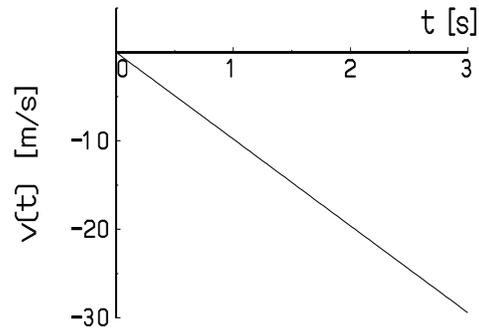


Figura 2.6

instante  $t$ , como la aceleración media durante un intervalo muy pequeño que comienza en  $t$ . Sea  $[t, t + \epsilon]$  ese intervalo, donde  $\epsilon$  es un tiempo infinitesimal. Entonces

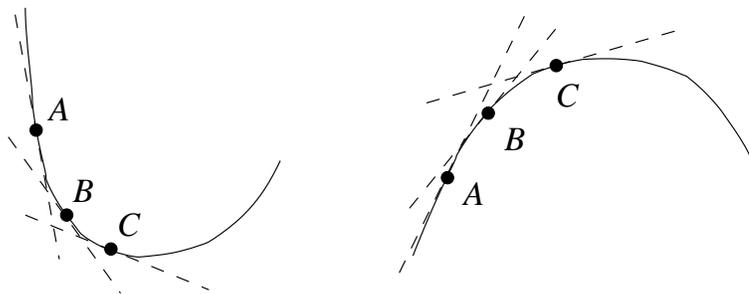
$$\bar{a}(t, t + \epsilon) = \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon}.$$

Al hacer  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene la aceleración instantánea de la partícula (en el instante  $t$ ), que denotaremos con  $a(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  o  $\dot{v}(t)$ :

$$a(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t). \quad (2.2)$$

De aquí en adelante el término *aceleración* siempre se referirá a la aceleración instantánea.

Ya habíamos observado antes que, al menos para aceleración constante, la aceleración se relaciona con la curvatura de  $x(t)$ . Ahora podemos entender que esto es un hecho general. Consideremos la siguiente figura:



A la izquierda, tenemos una curva con curvatura positiva. Es claro que, a medida que la curva avanza de  $A$  a  $B$  a  $C$ , la pendiente de la tangente aumenta (se hace menos negativa). Si la curva representa posición en función del tiempo, entonces lo que sucede es que su velocidad aumenta, es decir, su aceleración es positiva. A

la inversa, en la figura de la derecha, al pasar de  $A$  a  $B$  a  $C$ , la pendiente de la tangente disminuye (se hace menos positiva). Si se trata de posición en función del tiempo, entonces, es la velocidad la que está disminuyendo, vale decir, su aceleración es negativa. Concluimos entonces que, efectivamente, para una curva arbitraria (en particular si la aceleración no es constante), el signo de la curvatura es igual al signo de la aceleración.

### Ejemplos:

1. Para el movimiento rectilíneo uniforme, la posición de una partícula viene dada por  $x(t) = x_0 + v_0 t$ . Ya hemos visto que, en ese caso, su velocidad es constante e igual a  $v_0$ . Demostremos ahora, usando la ecuación (2.2), que en este caso la partícula efectivamente no tiene aceleración:

$$a(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_0 - v_0}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 0 = 0 .$$

2. En un ejemplo anterior vimos que la posición y velocidad de una partícula que cae libremente bajo la acción de la aceleración de gravedad terrestre están dadas por las siguientes ecuaciones

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

y

$$v(t) = -g t .$$

Evaluemos la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[-g \cdot (t + \epsilon)] - (-g \cdot t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-g \cdot \epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-g) = -g . \end{aligned}$$

El resultado indica que la aceleración es constante y negativa. Eso significa que la partícula acelera en el sentido negativo del eje  $z$ .

En general, para una función arbitraria, se define la *derivada* de dicha función respecto a su variable de la siguiente manera:

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) - f(t)}{\epsilon} .$$

Podemos decir, entonces, que la velocidad de una partícula es la derivada de la posición respecto al tiempo; análogamente, la aceleración de una partícula es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. La notación  $\dot{f}(t)$  se debe a Newton, es más usual en textos de Física, y se reserva específicamente a derivadas respecto al tiempo. La

notación  $df/dt$  se debe a Leibniz, y es más general, usándose para derivadas respecto a cualquier tipo de argumento.

Observemos, en las Ecs. (2.1) y (2.2), que tanto el numerador como el denominador tienden a cero al hacer el límite. El resultado del cociente queda indeterminado, entonces. Pero al hacer el límite con cuidado, como vemos en todos los ejemplos anteriores, se llega a un resultado definido.

Notemos también que la aceleración es la derivada de una derivada (la velocidad). A esto se le llama una *segunda derivada*. Tanto las notaciones de Newton como de Leibniz sugieren rápidamente una notación especial para la segunda derivada:

$$a(t) = \dot{v}(t) = (\dot{x}(t))' \equiv \ddot{x}(t) ,$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} .$$

Ya tendremos oportunidad de profundizar en el concepto matemático de derivada, pero ahora nos interesa destacar la enorme importancia que la derivada tiene para nuestra descripción del movimiento. Sabemos que, por ejemplo, para un movimiento con aceleración uniforme, podemos escribir ecuaciones de itinerario para la posición, la velocidad y la aceleración. Con ellas es posible describir completamente *todo* el movimiento de la partícula. Sin embargo, ahora es claro que, en realidad, sólo necesitamos *una sola función*, la posición. Las ecuaciones de itinerario para la velocidad y la posición se pueden obtener a partir de ella usando una herramienta matemática, la derivada. Esto no es sino un ejemplo de algo que encontraremos frecuentemente a lo largo de este curso: en Física, en general, nos interesa tener una descripción tan sencilla como sea posible de la Naturaleza, y usualmente obtener dicha descripción, para que sea sencilla, requiere la utilización de alguna Matemática adicional. En este caso hemos logrado, gracias a la derivada, reemplazar una descripción complicada, en términos de tres ecuaciones de itinerario, por una descripción sencilla, con una sola ecuación de itinerario,  $x(t)$ . ¿Y por qué es importante tener una descripción sencilla? Porque sabemos, y diciéndolo comenzamos este capítulo, que la descripción *completa* del movimiento se tiene si se conoce  $x(t)$  para todo tiempo. Tal intuición física hubiera sido “traicionada”, en algún sentido, si hubiéramos tenido que mantener la descripción matemática en términos de tres ecuaciones de itinerario. Ahora, usando la derivada, podemos ser fieles a la intuición original.

### Ejemplos adicionales:

1. Consideremos una partícula de masa  $m$ , cuya posición a medida que transcurre el tiempo viene dada por

$$z(t) = A \cos(\omega t) ,$$

donde  $A$  y  $\omega$  son constantes. Tal movimiento de la partícula es un movimiento oscilatorio periódico. La amplitud de las oscilaciones es  $A$  y el período del mo-

vimiento (es decir, el tiempo que debe transcurrir hasta que una configuración se vuelva a repetir) es

$$T = 2\pi/\omega .$$

Al inverso de  $T$  se le llama *frecuencia*:  $\nu = 1/T$ . A la magnitud  $\omega$  se le llama *frecuencia angular*. Se tiene que  $\omega = 2\pi\nu$ .

Evaluemos la velocidad de la partícula:

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z(t + \epsilon) - z(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [A \cos(\omega(t + \epsilon)) - A \cos(\omega t)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon} [\cos(\omega t) \cos(\omega \epsilon) - \sin(\omega t) \sin(\omega \epsilon) - \cos(\omega t)] \\ &\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon} \left[ \cos(\omega t) \left( 1 - \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2} \right) - \sin(\omega t) \cdot (\omega \epsilon) - \cos(\omega t) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon} \left[ -\cos(\omega t) \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2} - \sin(\omega t) \cdot (\omega \epsilon) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A \left[ -\cos(\omega t) \frac{\omega^2 \epsilon}{2} - \omega \cdot \sin(\omega t) \right] \\ &= -A\omega \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Una vez conocida la velocidad podemos, en forma análoga, calcular la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [-A\omega \sin(\omega(t + \epsilon)) - (-A\omega) \sin(\omega t)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{A\omega}{\epsilon} [\sin(\omega t) \cos(\omega \epsilon) + \cos(\omega t) \sin(\omega \epsilon) - \sin(\omega t)] \\ &\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{A\omega}{\epsilon} \left[ \sin(\omega t) \left( 1 - \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2} \right) + \cos(\omega t) \cdot \omega \epsilon - \sin(\omega t) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -A\omega \left[ -\sin(\omega t) \frac{\omega^2 \epsilon}{2} + \omega \cos(\omega t) \right] \\ &= -A\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

La figura 2.7 muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo.

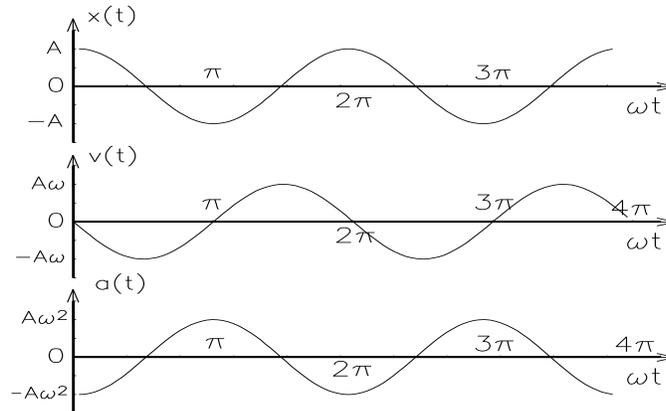


Figura 2.7

2. Una persona levanta un peso  $P$ , sujetando una cuerda que pasa por una polea y caminando horizontalmente con velocidad  $v_0$ . ¿Cuál es la velocidad del peso  $P$ ? Supongamos que el largo de la cuerda es  $2h$  (o sea, cuando la persona está en  $x = 0$ , el cuerpo  $P$  está en el suelo encontrándose la cuerda estirada). Se tiene

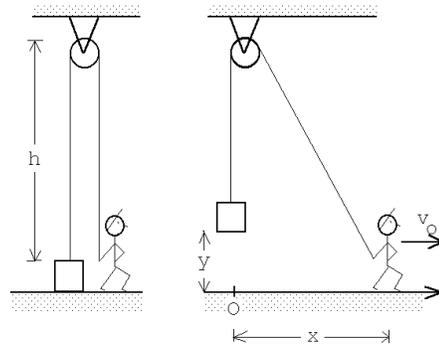


Figura 2.8

$$(h - y) + \sqrt{h^2 + x^2} = 2h ,$$

o sea,

$$y(t) = \sqrt{h^2 + x^2(t)} - h = \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} - h .$$

Para la velocidad obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) = v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \epsilon) - y(t)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( \sqrt{h^2 + v_0^2 (t + \epsilon)^2} - h \right) - \left( \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} - h \right) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \sqrt{(h^2 + v_0^2 t^2) + (2v_0^2 t \epsilon + v_0^2 \epsilon^2)} - \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} \left[ \sqrt{1 + \frac{2v_0^2 t \epsilon + v_0^2 \epsilon^2}{h^2 + v_0^2 t^2}} - 1 \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{2v_0^2 t \epsilon + v_0^2 \epsilon^2}{h^2 + v_0^2 t^2} - 1 \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2} \frac{2v_0^2 t \epsilon + v_0^2 \epsilon^2}{\sqrt{h^2 + v_0^2 t^2}} \\
&= \frac{v_0^2 t}{\sqrt{h^2 + v_0^2 t^2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Demuestre que la aceleración de  $P$  viene dada por:

$$a(t) = \ddot{y}(t) = v_0^2 \frac{h^2}{(h^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}} .$$

## 2.2 El camino inverso

En la sección anterior se presentó el procedimiento que permite evaluar, partiendo del conocimiento de la posición en función del tiempo, la velocidad y luego la aceleración. Sabemos también, sin embargo, que es posible, al menos en el caso de aceleración constante, seguir el camino inverso, es decir, conociendo la aceleración en función del tiempo, calcular la velocidad y posición. En esta sección profundizaremos en esto, encontrando que este camino es posible también si la aceleración no es constante.

Supongamos que la velocidad de una partícula en función del tiempo viene dada por el gráfico mostrado en la figura 2.9.

Recordemos primero algo ya calculado, el caso de velocidad constante. ¿Cuál será la distancia recorrida por la partícula entre los instantes  $t_i$  y  $t_f$ ? Entre esos dos instantes la velocidad de la partícula es constante (igual a  $v_0$ ), por lo tanto la distancia recorrida será  $x(t_f) - x(t_i) = v_0 \cdot (t_f - t_i)$ . Podemos escribir

$$x(t_f) = x(t_i) + v_0 \cdot (t_f - t_i) ,$$

o sea, si una partícula entre dos instantes (inicial y final) se mueve a una velocidad constante, entonces la posición final es igual a la posición inicial más el área de la función  $v(t)$  entre los instantes  $t_i$  y  $t_f$ .

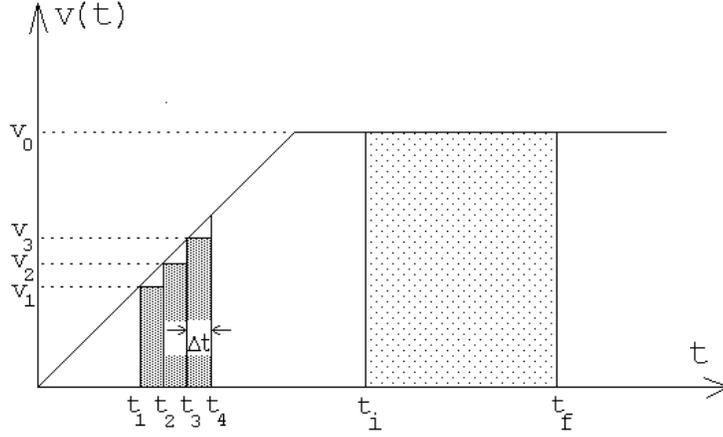


Figura 2.9

Cuando la función  $v(t)$  no es constante la situación es más compleja. Intentemos evaluar la distancia que recorre la partícula entre los instantes  $t_1$  y  $t_4$ . Como la velocidad no es constante, tomaremos algunas mediciones intermedias, separadas por un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Entre  $t_1$  y  $t_2$  la distancia recorrida será aproximadamente  $v(t_1) \cdot (t_2 - t_1) = v(t_1) \cdot \Delta t$ , entre  $t_2$  y  $t_3$  será  $v(t_2) \cdot (t_3 - t_2) = v(t_2) \cdot \Delta t$ , y finalmente entre  $t_3$  y  $t_4$  será aproximadamente  $v(t_3) \cdot (t_4 - t_3) = v(t_3) \cdot \Delta t$ . La distancia total recorrida será aproximadamente

$$x(t_4) - x(t_1) \simeq \sum_{j=1}^3 v(t_j) \cdot \Delta t \quad , \quad (2.3)$$

donde  $\Delta t = (t_4 - t_1)/3$ . Observe que el lado derecho de la ecuación (2.3) es igual al área de los rectángulos mostrados en la figura 2.10. Evidentemente el resultado anterior es sólo aproximado: hemos tomado 3 mediciones intermedias y hemos supuesto que entre las mediciones la velocidad es constante (igual al valor de la última medición). También es claro que si aumentamos el número de mediciones intermedias obtendremos un resultado más preciso. Para un número muy grande (infinito) de mediciones intermedias, el procedimiento sería exacto; en ese caso el área de los rectángulos sería igual al área entre la función  $v(t)$  y el eje  $\hat{t}$ . Si dividimos el intervalo  $[t_i, t_f]$  en  $N$  intervalos de ancho  $\Delta t = (t_f - t_i)/N$ , entonces el proceso límite anterior se escribe en la forma:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N v(t_i) \Delta t \equiv \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt \quad ,$$

donde

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = (\text{Área delimitada por } v(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f) \quad .$$

Otro modo de pensarlo es que  $\int_{t_i}^{t_f}$  significa “sume las contribuciones que están detrás del símbolo desde  $t = t_i$  hasta  $t = t_f$ ” [en este caso, sume contribuciones de tamaño  $v(t) dt$ , que representa el área de un rectángulo con un lado igual a  $v(t)$  y el otro igual a una magnitud infinitesimal  $dt$ ].

Observemos la lógica de la notación utilizada. Hacer el proceso límite anterior significa básicamente convertir letras griegas en latinas:  $\Delta t$  es ahora  $dt$ , y  $\Sigma$  es ahora una “S” estilizada,  $\int$ .

De esta manera hemos encontrado un resultado completamente general:

$$x(t_f) = x(t_i) + (\text{Área entre } v(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f), \quad (2.4)$$

o bien,

$$x(t_f) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt. \quad (2.5)$$

El símbolo  $\int$  se denomina *integral*. Decimos entonces que el desplazamiento de una partícula entre dos instantes  $t_i$  y  $t_f$  es la *integral de la velocidad entre  $t_i$  y  $t_f$* .

Ejemplos:

1. Movimiento uniforme:

Si  $v(t) = v_0$ , constante, se tiene que el área entre la curva  $v(t)$  y el eje  $t$  es:

$$\int_{t_i}^{t_f} v_0 dt = v_0(t_f - t_i).$$

Entonces,

$$x(t_f) = x(t_i) + v_0(t_f - t_i).$$

2. Movimiento uniformemente acelerado:

Consideremos una partícula cuya velocidad viene dada por

$$v(t) = v_0 t + a_0 t,$$

(ver figura 2.10). Observe que  $v_0$  es la velocidad de la partícula en el instante  $t = 0$ . El área bajo la curva entre los instantes  $t_i = 0$  y  $t_f$  es el área de una sección rectangular y una triangular, resultando:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} v(t) dt &= v_0 t_f + \frac{1}{2}(v(t_f) - v_0) \cdot t_f \\ &= v_0 t_f + \frac{1}{2} a_0 t_f^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$x(t_f) = x(0) + v_0 t_f + \frac{1}{2} a_0 t_f^2.$$

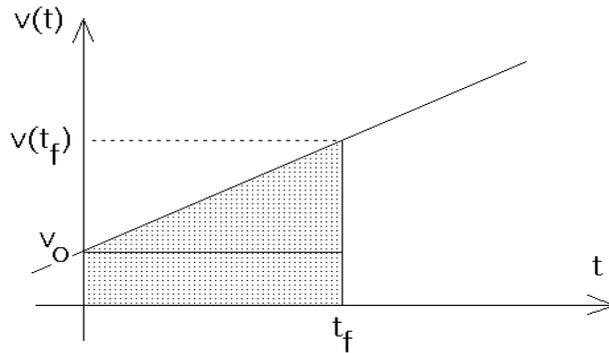


Figura 2.10

En un caso un poco más general, en que el instante inicial es  $t = t_i \neq 0$ , y la velocidad inicial es  $v(t_i) = v_i$ , se tiene, para un movimiento acelerado uniforme con aceleración  $a$ ,

$$\int_{t_i}^{t_f} (v_i + at) dt = v_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2 ,$$

con lo cual

$$x(t_f) = x(t_i) + v_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2 .$$

Conociendo la posición  $x(t)$  de una partícula, siempre es posible determinar su velocidad. El recíproco no es cierto: si se conoce la velocidad  $v(t)$  no es posible determinar la posición; lo único que se puede determinar es el desplazamiento entre dos instantes. En otras palabras, si conocemos  $v(t)$ , debemos conocer además la posición en algún instante para poder determinar  $x(t)$ .

Las relaciones que permiten obtener la velocidad si se conoce la aceleración  $a(t)$ , son análogas a las que relacionan la posición con la velocidad:

$$v(t_f) = v(t_i) + \text{Área entre } a(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f . \quad (2.6)$$

o

$$v(t_f) = v(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} a(t) dt . \quad (2.7)$$

**Ejemplo:** Movimiento uniformemente acelerado.

Suponga que la aceleración de una partícula es constante,  $a(t) = a_0$ . Usando (2.6) se deduce que

$$v(t) = v(0) + a_0 t .$$

Haciendo uso del resultado obtenido en el ejemplo anterior se obtiene finalmente que

$$x(t) = x(0) + v(0) t + \frac{1}{2} a_0 t^2 .$$

Observe que  $x(0)$  y  $v(0)$  son la posición y la velocidad de la partícula en el instante  $t = 0$ .

### 2.3 Máximos y mínimos

Considere una función  $f(t)$  suave (o sea, sin saltos ni puntas). Ya sabemos (ver último problema de la sección anterior) que  $\dot{f}(t)$  está relacionado con la pendiente de las tangentes de la función  $f(t)$ . Observemos que para valores de  $t$  en los cuales  $\dot{f}(t) = 0$ , la función  $f(t)$  tiene un máximo o mínimo (local). También podemos invertir la argumentación: encontrar los máximos y mínimos de una función  $f(z)$  es equivalente a encontrar los ceros de la función *derivada*

$$g(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z + \epsilon) - f(z)}{\epsilon} .$$

**Ejemplo:** Suponga que un agricultor tiene  $L$  metros de malla para construir un corral rectangular. El agricultor desea aprovechar una muralla de piedra (recta) para obtener un corral mayor. ¿Qué dimensiones deberá tener el corral para que su área sea máxima?

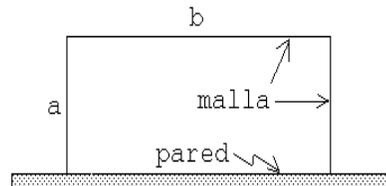


Figura 2.11

Solución: Sean  $a$  y  $b$  los largos del gallinero (ver figura 2.11). El largo de la malla es  $L = 2a + b$ , mientras que el área del gallinero es  $A = a \cdot b$ . Despejando  $b$  de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda se obtiene:

$$A = a \cdot (L - 2a) .$$

El área es una función de  $a$ . Tanto para  $a = 0$  como para  $a = L/2$  se tiene que  $A = 0$ . Para algún valor intermedio el área del gallinero será máxima. Para resolver el problema debemos encontrar el máximo de la función  $f(a) = a \cdot (L - 2a)$ . Para ello encontremos los ceros de la función derivada

$$g(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(a + \epsilon) \cdot (L - 2(a + \epsilon)) - a \cdot (L - 2a)] = L - 4a .$$

La función  $g(a)$  tiene un (único) cero para  $a = L/4$ . Luego para ese valor de  $a$  el área del gallinero será máxima.

## 2.4 Elementos del cálculo infinitesimal e integral

A continuación se presenta un resumen de algunos resultados del cálculo que se usarán extensivamente en lo que sigue. Se dejará para los cursos de matemáticas la demostración rigurosa de los resultados. Supondremos implícitamente que las funciones que se usan más abajo tienen todas las propiedades necesarias para que los teoremas planteados sean válidos (por ejemplo, sean funciones continuas, derivables, acotadas, etc.).

Sean  $f(t)$  y  $g(t)$  dos funciones y  $\alpha$  un número (real o complejo). La función derivada  $df(t)/dt$ , relacionada con la pendiente de la función  $f(t)$ , por definición es

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(t + \epsilon) - f(t)] .$$

Propiedades:

- a) 
$$\frac{d(\alpha f(t))}{dt} = \alpha \dot{f}(t) .$$
- b) 
$$\frac{d(f(t) + g(t))}{dt} = \dot{f}(t) + \dot{g}(t) .$$
- c) 
$$\frac{d(f(t)g(t))}{dt} = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t) .$$
- d) 
$$\frac{df(g(t))}{dt} = \dot{f}(g(t)) \dot{g}(t) .$$

Demostración de c):

De la definición de la *derivada* se deduce que, para  $\epsilon$  muy pequeño

$$f(t + \epsilon) = f(t) + \epsilon \dot{f}(t) . \quad (*)$$

Con esta relación, y una análoga para la función  $g(t)$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d(f(t)g(t))}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(t + \epsilon)g(t + \epsilon) - f(t)g(t)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(f(t) + \epsilon \dot{f}(t))(g(t) + \epsilon \dot{g}(t)) - f(t)g(t)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\epsilon \dot{f}(t)g(t) + \epsilon f(t)\dot{g}(t) + \epsilon^2 \dot{f}(t)\dot{g}(t)] \\ &= \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t) . \end{aligned}$$

Demostración de d):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(g(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(g(t + \epsilon)) - f(g(t))] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(g(t) + \epsilon \dot{g}(t)) - f(g(t))]\end{aligned}$$

Pero, usando nuevamente la ecuación (\*), se tiene

$$f(g + \epsilon \dot{g}) = f(g) + (\epsilon \dot{g}) \dot{f}(g) ,$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(g(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(g(t) + \epsilon \dot{g}(t) \dot{f}(g(t))) - f(g(t))] \\ &= \dot{f}(g(t)) \dot{g}(t) .\end{aligned}$$

De los ejemplos que hemos desarrollado hasta el momento, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{d(c)}{dt} &= 0 , \quad c = \text{constante} \\ \frac{d(t)}{dt} &= 1 , \\ \frac{d(t^2)}{dt} &= 2t .\end{aligned}$$

En general, se puede mostrar que

$$\frac{dt^\alpha}{dt} = \alpha t^{\alpha-1} ,$$

para todo número real  $\alpha$ . Además,

$$\begin{aligned}\frac{d \sin t}{dt} &= \cos t , \\ \frac{d \cos t}{dt} &= -\sin t .\end{aligned}$$

Con estos resultados básicos, más las propiedades enunciadas de la derivada, se pueden encontrar las derivadas de muchísimas funciones. Consideremos, por ejemplo,  $f(t) = A \cos \omega t$ . Observando que  $A$  es un escalar, y que  $f(t) = g(h(t))$ , con  $g(t) = \cos t$  y  $h(t) = \omega t$ , encontramos:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{d(A \cos \omega t)}{dt} = A \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = A \frac{d(\cos h)}{dh} \Big|_{h=\omega t} \frac{dh}{dt} \\ &= A \cdot -\sin(h(t)) \frac{d(\omega t)}{dt} = A \cdot -\sin(h(t)) \omega \frac{d(t)}{dt} \\ &= -A \omega \sin(\omega t) ,\end{aligned}$$

resultado consistente con lo obtenido en la Sec. 2.1.

En un gráfico de la función  $f(t)$  en función de  $t$ , la expresión (*integral*)

$$A = \int_a^b f(t) dt$$

representa al área delimitada por la función  $f(t)$  y el eje  $t$  entre  $t = a$  y  $t = b$  (ver figura).

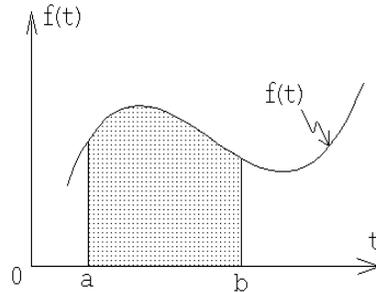


Figura 2.23

Propiedades:

- a) 
$$\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt .$$
- b) 
$$\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt .$$
- c) 
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt .$$

En muchos casos es posible evaluar la integral  $A$  analíticamente. Para ello, se debe encontrar una función  $F(t)$  tal que su derivada sea la función que aparece tras el símbolo integral, o sea, tal que  $dF(t)/dt = f(t)$ . Entonces

$$A = \int_a^b f(t) dt = F(t) \Big|_a^b \equiv F(b) - F(a) .$$

En la Sec. 2.1 encontramos ejemplos inmediatos de esto. En efecto,  $v(t) = dx(t)/dt$ , de modo que

$$\int_a^b v(t) dt = x(t) \Big|_a^b = x(b) - x(a) ,$$

que no es sino el resultado ya conocido de que la integral de la velocidad es el desplazamiento.

Usando las derivadas de funciones ya conocidas, podemos escribir algunas integrales útiles:

$$\int_a^b t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b, \quad \alpha \neq -1,$$

$$\int_a^b \sin t dt = -\cos t \Big|_a^b,$$

$$\int_a^b \cos t dt = \sin t \Big|_a^b.$$

## 2.5 Problemas:

- Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación  $z(t) = -a_0 \cdot (t - t_0)^2 + z_0$ , con  $z_0 = 125$  m,  $t_0 = 5$  s y  $a_0 = 5$  m/s<sup>2</sup>.
  - Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde  $t = 0$  hasta  $t = 12$  s.
  - ¿En qué instante choca el proyectil contra el suelo?
  - Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes  $t=0$  s,  $t=2$  s,  $t=4$  s,  $t=6$  s,  $t=8$  s y  $t=10$  s. Grafique su resultado.
- Un conductor maneja su coche 10 km a una velocidad de 90 km/h y luego otros 10 km a 70 km/h. ¿Cuál es la rapidez promedio durante el trayecto de 20 km? (La respuesta no es 80 km/h.)
- La figura 2.12 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. Encuentre la velocidad promedio durante los siguientes intervalos de tiempo:
  - $0 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$
  - $7 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$
  - $0 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$  (Respuesta:  $\langle v \rangle = -0.154$  m/s)
  - $10 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$

4. La figura 2.13 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. ¿En qué instantes o en qué intervalos de tiempo
- la velocidad (instantánea) es cero?
  - la velocidad es positiva?
  - la velocidad es negativa?
  - el módulo de la velocidad es máximo?
  - la velocidad es constante?
  - la aceleración es negativa?
5. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo viene dada por

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2} .$$

- Grafique  $z(t)$  en el intervalo de tiempo  $-4 < t < +4$ .
- Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} .$$

Grafique  $v(t)$ .

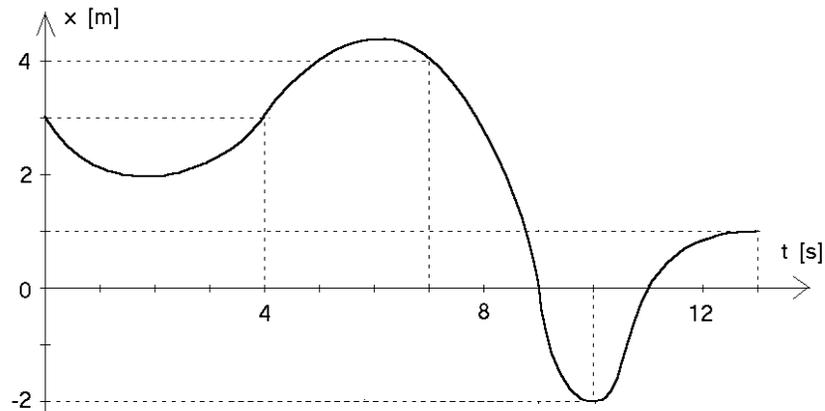


Figura 2.12

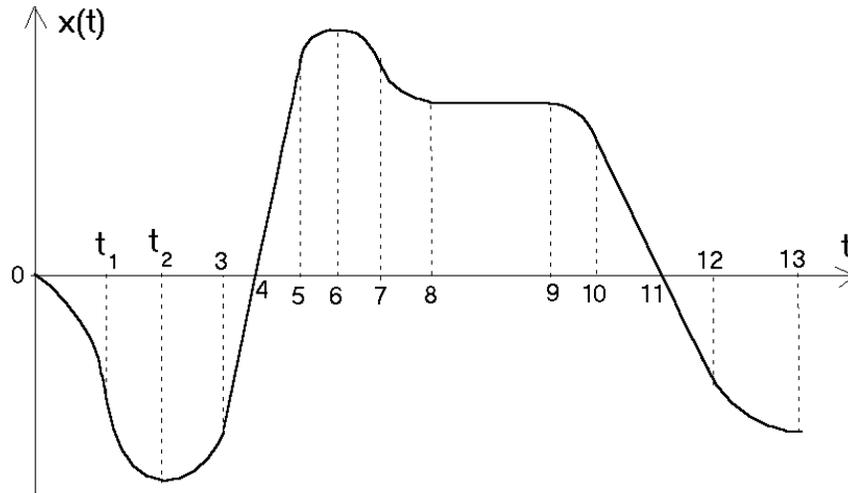


Figura 2.13

6. La figura 2.14 muestra la posición de una partícula en función del tiempo.
- Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo  $2 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$ .
  - Encuentre la velocidad instantánea para  $t = 10 \text{ s}$ .
  - ¿En qué instante o instantes la velocidad (instantánea) de la partícula es nula?
  - ¿En qué instante la rapidez es máxima?
  - ¿En qué instante la aceleración es nula?

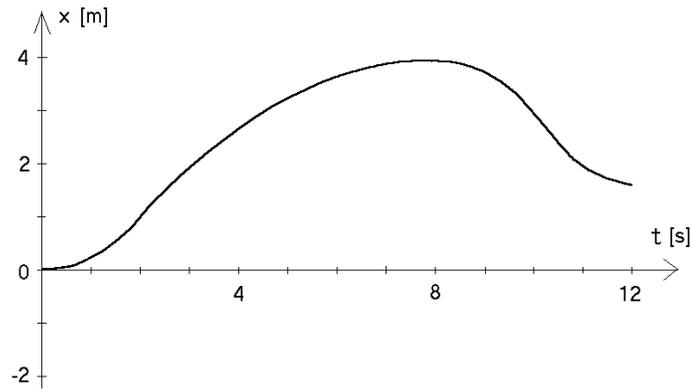


Figura 2.14

7. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo viene dada por

$$z(t) = t - 4 \cos t .$$

- (a) Grafique  $z(t)$  en el intervalo de tiempo  $0 < t < +6$ .
- (b) A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:
- ¿En qué instante la velocidad es nula?
  - ¿En qué instantes la partícula se encuentra en el origen?
  - ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
  - ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?
- (c) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} .$$

- (d) Grafique  $v(t)$  encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:
- ¿En qué instante la velocidad es nula?
  - ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
  - ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?
- (Compare las respuestas con las de la parte b)).

8. La figura 2.15 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.

¿En qué instantes o en qué intervalos de tiempo:

- La velocidad es cero?
- La velocidad es constante?
- La velocidad es positiva?

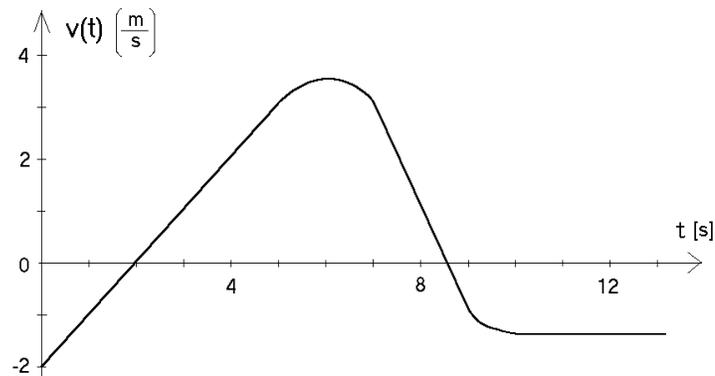


Figura 2.15

- (d) La aceleración es nula?
- (e) La aceleración es positiva?
- (f) El módulo de la velocidad es máximo?
- (g) El módulo de la aceleración es máximo?
- (h) ¿Cuál es la distancia que recorre la partícula entre  $t = 2$  s y  $t = 4$  s?
- (i) Si en el instante  $t = 0$  la partícula se encuentra en el origen (es decir, si  $s(0) = 0$ ), haga un gráfico aproximado del desplazamiento  $s(t)$ .
- (j) Haga un gráfico aproximado de  $s(t)$  si  $s(0) = -4$  m.

Respuestas: a) En  $t = 2$  s y  $t = 8.5$  s; b) A partir de  $t = 10$  s, se podría decir también que en el instante  $t = 6$  s la velocidad es constante; c) Entre  $t = 2$  s y  $t = 8.5$  s; d) Misma respuesta de la parte b); e) Entre  $t = 0$  s y  $t = 6$  s; f) En  $t = 6$  s; g) Entre  $t = 7$  s y  $t = 9$  s; h) Entre  $t = 2$  s y  $t = 4$  s la velocidad media es de 1 m/s, luego la distancia recorrida es de 2 m (note que esto coincide con el área bajo la curva).

9. La figura 2.16 muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo.
- (a) Si en el instante  $t = 0$  s la partícula está en reposo, encuentre la velocidad de la partícula en cada instante. ¡Gráfique!
  - (b) Calcule el tamaño de las áreas I, II y III. ¿Qué unidades tienen? ¿Qué relación hay entre estas áreas y la parte a) de este problema?
  - (c) Repita lo hecho en la parte a), pero suponiendo que en el instante  $t = 0$  la partícula tiene una velocidad  $v_0 = -8$  m/s. ¡Gráfique!
10. En cada una de las siguientes expresiones para la posición  $s(t)$  de una partícula, encuentre una expresión analítica para la velocidad instantánea:
- (a)  $s(t) = at^2 + bt + c$
  - (b)  $s(t) = at^\alpha$
  - (c)  $s(t) = a \cos(\omega t + \beta)$

En las ecuaciones anteriores  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

11. Para cada una de las siguientes expresiones para la aceleración  $a(t)$  de una partícula ( $a$  en  $\text{m/s}^2$  y  $t$  en s), encuentre la expresión más general para la velocidad  $v(t)$  y la posición  $x(t)$ .
- (a)  $a(t) = a_0$

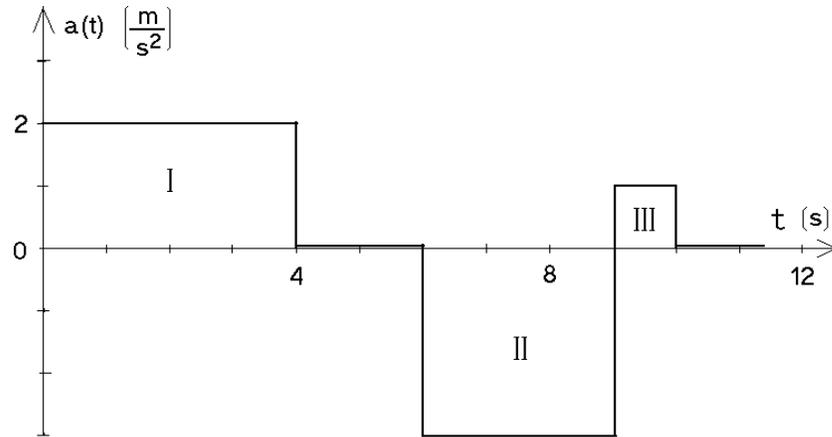


Figura 2.16

(b)  $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$

En las expresiones anteriores,  $a_0$  y  $\omega$  son constantes.

12. Un observador suelta una piedra desde el techo de un edificio. El sonido de la piedra chocando contra el suelo se escucha después de  $t_0 = 6$  s.
- (a) Si la velocidad del sonido es  $c = 340$  m/s, encuentre la altura del edificio. (Ignore los efectos del roce del aire, que en la práctica, para este problema, no son despreciables.)
- (b) Demuestre que si  $gt_0/c \ll 1$ , entonces la altura del edificio viene aproximadamente dada por

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 \left(1 - \frac{gt_0}{c}\right).$$

13. Dos trenes  $A$  y  $B$ , inicialmente separados por una distancia de 13 km, viajan hacia su encuentro a una velocidad de 30 km/h. Desde  $A$  parte una paloma mensajera que llega al tren  $B$  10 minutos después. Calcule la velocidad con que vuela la paloma respecto al tren  $A$ . Resuelva el problema en forma gráfica y luego en forma analítica.
14. La figura 2.17 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.

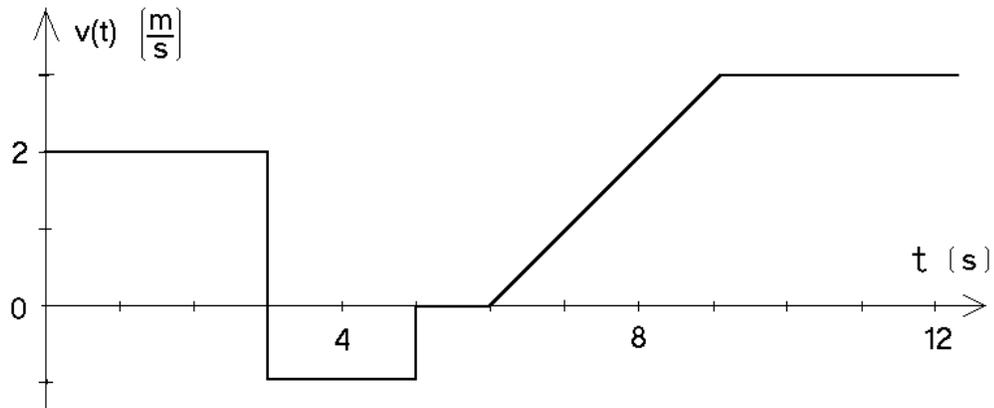


Figura 2.17

- (a) Si en el instante  $t = 0$  s la partícula se encuentra en el origen (es decir,  $x(0) = 0$ ), encuentre la posición de la partícula en cada instante. Grafique.
- (b) Repita lo hecho en la parte a), pero suponiendo que en el instante  $t = 0$  se tiene  $x(0) = -3$  m.
15. Desde un puente de 60 m de altura se deja caer una piedra. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo 1 s más tarde. Ambas piedras llegan al suelo simultáneamente. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la segunda piedra? (Desprecie el roce del aire.)
16. Un cohete se dispara verticalmente, subiendo con aceleración constante de  $20 \text{ m/s}^2$  respecto a la plataforma de lanzamiento durante 1 minuto. En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.
- (a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?
- (b) ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despegó hasta volver a caer sobre la plataforma?
- (c) Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.
17. Panchito deja caer una pelota desde una altura  $h$ . La pelota, cada vez que choca contra el suelo, rebota con una rapidez igual a aquélla con la cual llegó al suelo multiplicada por  $\alpha$ , donde  $\alpha$  es una constante  $0 < \alpha < 1$ . Encuentre:
- (a) La altura que alcanza la pelota después del primer rebote.

- (b) La altura que alcanza después del segundo rebote.
- (c) La altura que alcanza después del  $k$ -ésimo rebote.
- (d) La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el  $k$ -ésimo rebote.
- (e) La distancia total recorrida por la pelota hasta que se detiene (tome  $k \rightarrow \infty$  en la expresión anterior).

Respuestas: c)  $\alpha^{2k}h$  ; d)  $h + 2h\alpha^2 \frac{\alpha^{2(k-1)} - 1}{\alpha^2 - 1}$  .

18. Un automovilista pasa a exceso de velocidad frente a un retén policial. 5 minutos más tarde sale en su persecución un policía motorizado a una velocidad de 120 km/h. Después de 40 minutos, el policía da alcance al infractor. ¿Cuál era la velocidad del infractor?
19. Consideremos el movimiento de una esfera en un medio viscoso (en ausencia de fuerzas gravitacionales). La aceleración que sufre la esfera es proporcional a su velocidad, pero en dirección contraria, es decir  $\vec{a}(t) = -\eta\vec{v}(t)$ , donde  $\eta$  es una constante. Supongamos que  $\eta = 0.01 \text{ s}^{-1}$  y la velocidad inicial de la esfera es  $|\vec{v}_0| = 50 \text{ m/s}$ . Encuentre numéricamente la distancia  $s(t)$  recorrida por la esfera y gráfiquela. Para resolver el problema note que, si  $\Delta$  es un pequeño intervalo de tiempo, entonces

$$\begin{cases} v(t + \Delta) \simeq v(t) + a(t) \Delta \\ s(t + \Delta) \simeq s(t) + v(t) \Delta \end{cases} .$$

20. Considere dos varillas muy largas: una fija horizontalmente y la otra formando un ángulo  $\phi$  constante con la primera, y moviéndose verticalmente con rapidez  $v_0$  constante (ver figura 2.18). Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas (tal punto de intersección no corresponde al movimiento de algún objeto físico real).
21. Un pasajero corre con velocidad de 4 m/s para alcanzar un tren. Cuando está a una distancia  $d$  de la portezuela más próxima, el tren comienza a moverse con una aceleración constante  $a=0.4 \text{ m/s}^2$ , alejándose del pasajero.
- (a) Si  $d=12 \text{ m}$  y el pasajero sigue corriendo, ¿alcanzará a subirse al tren? En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo tarda en hacerlo, desde que el tren comienza a moverse?
  - (b) Haga un gráfico de la función  $x_t(t)$  del tren. En el mismo gráfico dibuje la función  $x_p(t)$  correspondiente al pasajero para diversos valores de la distancia de separación  $d$ . Encuentre el valor crítico  $d_c$  para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.

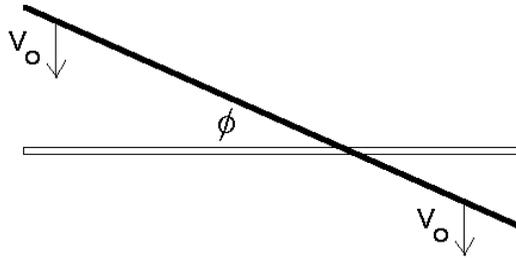


Figura 2.18

- (c) Para la separación crítica  $d_c$ , ¿cuál es la velocidad del tren cuando el pasajero lo alcanza?
22. Desde un edificio se lanza una piedra  $A$  con una velocidad inicial vertical hacia abajo  $v_0 = 30$  m/s. Desde el suelo, al pie del edificio y en el mismo instante, se lanza una piedra  $B$  hacia arriba. Las dos piedras chocan a una altura  $h = 30$  m, siendo en ese instante la rapidez de ambas piedras la misma. Encuentre el tiempo que transcurre entre el lanzamiento y la colisión. (Use para  $g$  el valor  $10$  m/s<sup>2</sup>.)  
 Respuesta:  $t = \sqrt{3} - 1$  s.
23. Considere un avión de pasajeros cuya velocidad de aterrizaje es de unos 400 km/h. Suponga que la desaceleración del avión es uniforme. Encuentre el valor que debe tener ésta para que el avión llegue al reposo en una pista de 1200 m.  
 Respuesta:  $a = 5,15$  m/s<sup>2</sup>
24. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio  $R$ ?
25. En Paine un agricultor tiene la posibilidad de realizar una (y sólo una) exportación de sandías de su plantación. Al comienzo de la temporada el precio es bueno, pero la producción no es grande. En efecto, al comienzo tiene 6 toneladas para vender y el precio es de \$40.000/ton. . Por cada día que demore la exportación puede exportar 0.5 toneladas adicionales; sin embargo, el precio disminuye en aproximadamente \$800/ton. ¿Cuánto tiempo debería esperar para realizar la exportación si desea maximizar las entradas?  
 Respuesta: 19 días.
26. A partir de un tronco de 27 cm de diámetro se desea aserrar una viga de sección rectangular que tenga la mayor resistencia posible. La resistencia de una viga

horizontal apoyada en sus extremos, en primera aproximación, es proporcional al ancho y proporcional al cuadrado de su altura. ¿Cuáles serán las dimensiones de la viga?

27. Un salvavidas ubicado en el punto  $A$  en una playa debe socorrer a un nadador ubicado en el punto  $B$  (ver figura 2.19). La velocidad con que puede correr el salvavidas en la arena es  $v_1$  y la velocidad con que avanza en el agua es  $v_2$ . Sea  $P$  el lugar óptimo en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para que tarde el menor tiempo posible en el trayecto de  $A$  a  $B$ . Demuestre que en ese caso se satisface

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} .$$

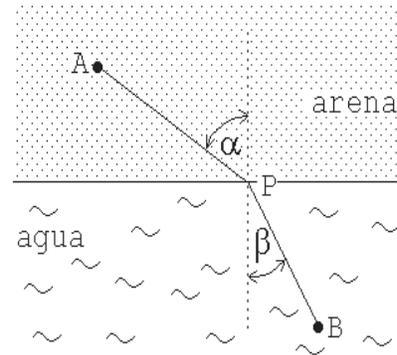


Figura 2.19

Notemos que esta expresión es análoga a la ley de Snell para la refracción de un rayo de luz.

28. ¿Qué dimensiones (interiores) tiene un recipiente cilíndrico, cuya capacidad es de un litro, si la forma se ha elegido de tal manera que en su confección se use la menor cantidad de material posible?
29. Considere cierto objeto  $A$  que se mueve a lo largo del eje  $\hat{x}$  tal como se describe a continuación:
- i) En el instante  $t = 0$  se encuentra en  $x_0 = -4$  [m] y su velocidad es  $v_0 = 2$  [m/s].
  - ii) Durante los primeros cuatro segundos la velocidad permanece constante.
  - iii) A partir del instante  $t = 4$  [s], el objeto frena uniformemente hasta quedar con la mitad de la velocidad. Durante este proceso de frenado la partícula avanza 3 [m].
  - iv) Luego mantiene esa velocidad durante 2 [s].
  - v) Luego la partícula acelera (en sentido negativo) con una aceleración constante  $a_0 = -2$  [m/s<sup>2</sup>] hasta que la velocidad sea  $v_1 = -3$  [m/s].
  - vi) A continuación se desplaza con la velocidad  $v_1$  hasta llegar a dos metros del punto de partida.
  - vii) Finalmente la partícula  $A$  frena uniformemente hasta quedar en reposo en el punto de partida ( $x_0 = -4$  [m]).

- (a) Haga un gráfico detallado de  $x(t)$  y  $v(t)$ .
  - (b) Encuentre la velocidad media de la partícula  $A$  entre los instantes  $t = 6$  [s] y  $t = 13$  [s].
  - (c) ¿En qué instante el alejamiento desde el punto de partida es máximo y cuánto es ese alejamiento?
  - (d) Un segundo móvil  $B$  parte en  $t = 0$  desde el origen y se desplaza con velocidad constante  $v_B = 1$  [m/s] a lo largo de la misma recta que  $A$ . Suponga que cuando los dos móviles se encuentran por primera vez,  $B$  se detiene. ¿En qué instante volverán a encontrarse?
30. Un malabarista desea hacer piruetas manteniendo en forma rotativa, con una mano, tres manzanas en el aire. Si el malabarista desea hacer lanzamientos cada 0,5 s, determine la altura a la cual usted le aconsejaría lanzar cada manzana.
31. Desde la altura  $H$  con respecto al piso se deja caer un macetero. En ese instante, y desde el primer piso, un ascensor acelera hacia arriba con aceleración  $\alpha g$  ( $\alpha < 1$ ). Si el ascensor tiene una altura  $h$  ( $h < H$ ) y parte del reposo, calcule el tiempo que demora el macetero en pasar desde el techo al piso del mismo. Para no hacer trágica la situación, suponga que la trayectoria (recta) del macetero pasa al lado del ascensor.
32. Dos móviles  $A$  y  $B$  (puntuales) están restringidos a moverse sobre el eje  $x$  de cierto sistema de coordenadas. Inicialmente  $A$  se desplaza a 10 m/s, mientras que  $B$  se encuentra en reposo en el origen del sistema de coordenadas. En  $t = 0$  cuando  $A$  se encuentra en  $x_A = 100$  m, el móvil  $B$  comienza a ser uniformemente acelerado en la dirección positiva del eje  $x$  con aceleración  $a_1 = 1$  m/s<sup>2</sup>. Este movimiento continúa hasta que  $B$  se encuentra a 22 m de  $A$ . Entonces  $B$  deja de acelerar y simultáneamente envía un mensaje al móvil  $A$ , que demora 0,5 s en llegar a destino. Tan pronto  $A$  recibe el mensaje, se detiene.
- (a) ¿Cuál es la velocidad  $c$  con que se propaga el mensaje entre  $A$  y  $B$ ? Suponga que la velocidad con que viaja el mensaje es constante.
  - (b) ¿Cuál es la velocidad de  $B$  en el instante en que envía el mensaje?
  - (c) ¿Cuál es el desplazamiento de  $B$  entre  $t = 0$  y el instante en que choca con  $A$ ?
  - (d) ¿Cuál es la velocidad media de  $B$  entre  $t = 0$  y el instante en que choca con  $A$ ?

## 2.6 Solución a algunos de los problemas

### Solución al problema 19

Sea  $x$  la dirección a lo largo de la cual ocurre el movimiento y denotemos, respectivamente, con  $s(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$  a la posición, velocidad y aceleración que tiene la partícula en el instante  $t$ . Las condiciones iniciales son  $s(0) = 0$  y  $v(0) = 50$  m/s.

Conociendo  $s(0)$ ,  $v(0)$  podemos encontrar  $a(0)$ . En efecto  $a(0) = -\eta v(0)$ .

Usando las expresiones

$$\begin{cases} v(t + \Delta) \simeq v(t) + a(t) \Delta \\ s(t + \Delta) \simeq s(t) + v(t) \Delta \end{cases} \quad (*) .$$

y eligiendo cierto valor pequeño para  $\Delta$ , podemos encontrar  $s(\Delta)$  y  $v(\Delta)$ .

Conociendo  $s(\Delta)$  y  $v(\Delta)$  podemos encontrar  $a(\Delta)$ . En efecto  $a(\Delta) = -\eta v(\Delta)$ .

Usando nuevamente las relaciones (\*) (pero ahora con  $t = \Delta$ ), podemos encontrar  $s(2\Delta)$  y  $v(2\Delta)$ , y a partir del último también  $a(2\Delta)$ . Etc...

Todo el proceso anterior se puede automatizar. En la próxima página se presenta un programa en QUICKBASIC (para un PC compatible) que resuelve numéricamente el problema y grafica los resultados en la pantalla del computador.

Al resolver numéricamente el problema, repita el cálculo con distintos valores de  $\Delta$  y observe como el resultado no depende de este parámetro cuando  $\Delta$  es lo suficientemente chico. También repita el cálculo para distintos valores de  $\eta$  y analice como este parámetro afecta al resultado.

```

CLS                                'LIMPIA PANTALLA
SCREEN 12                          'ELIGE SUPERVGA COLOR
VIEW (160, 20)-(580,310)          'DEFINE AREA DE TRABAJO
TMIN = 0                          'MINIMO DE ABSISA
TMAX = 500                         'MAXIMI DE ABSISA
YMIN = 0                          'MINIMO DE ORDENADA
YMAX = 6000                       'MAXIMO DE ORDENADA
WINDOW (TMIN, YMIN)-(TMAX, YMAX)  'FIJA VALORES ANTERIORES
LINE (TMIN, YMIN)-(TMAX, YMAX), , B 'GRAFICA EJES (CAJA)
FOR I = 0 TO 6
  YP = I * 1000                   'EVALUA POSICION DE TIC
  PSET (TMIN, YP)                 'POSICIONA EL LAPIZ EN ORDENADA (IZQ)
  DRAW "R8"                       'GRAFICA TIC
  PSET (TMAX - 10, YP)           'POSICIONA EL LAPIZ EN ORDENADA (DER)
  DRAW "R8"                       'GRAFICA TIC
NEXT I
LOCATE 2, 17                      'POSICIONA LAPIZ
PRINT "60"                       'IMPRIME 60 EN ORDENADA IZQUIERDA
LOCATE 2, 74                      'POSICIONA LAPIZ
PRINT YMAX                       'IMPRIME EN ORDENADA DERECHA
LOCATE 2, 18                      'POSICIONA LAPIZ
PRINT "0"                         'IMPRIME
LOCATE 20, 74                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT YMIN                       'IMPRIME
LOCATE 11, 17                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT "30"                       'IMPRIME
LOCATE 11, 76                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT "X"                        'IMPRIME LEYENDA DE ORDENADA DERECHA
LOCATE 2, 13                     'POSICIONA LAPIZ
PRINT "V"                        'IMPRIME LEYENDA DE ORDENADA IZQUIERDA
FOR I = 0 TO 10
  XP = TMIN + I * (TMAX - TMIN) / 10 'EVALUA POSICION DE TICS DE ABSISA
  PSET (XP, YMIN)                'POSICIONA LAPIZ
  DRAW Ü5"                       'GRAFICA TIC
NEXT I
LOCATE 21, 20                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT TMIN                      'IMPRIME
LOCATE 21, 71                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT TMAX                      'IMPRIME
LOCATE 23, 44                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT "TIEMPO"                  'IMPRIME LEYENDA DE ABSISA
DT = 1                          'SE ELIGE DT
T = 0                            'TIEMPO INICIAL
X = 0                            'POSICION INICIAL
V = 40                           'VELOCIDAD INICIAL
ETA = 0.01                      'SE FIJA PARAMETRO DE FRICCION
TF = 500                         'TIEMPO FINAL
LOCATE 1, 36                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT "DT="; DT; ".ETA="; ETA;  'IMPRIME TITULO
10 T = T + DT                    'EL CALCULO EMPIEZA AQUI !!
IF T >TF THEN STOP              'SE INCREMENTA EL TIEMPO
A = -ETA * V                     'SI T>TF EL CALCULO TERMINA
X = X + V * DT                  'EVALUACION DE LA ACELERACION
V = V + A * DT                  'NUEVA POSICION
PSET (T, X), 12                 'NUEVA VELOCIDAD
PSET (T, V * 100), 14           'GRAFICA PUNTO (T,X)
GOTO 10                          'GRAFICA PUNTO (T,V)

```

**Solución al problema 27**

Los tiempos  $t_1$ , que el salvavidas tarda para correr de  $A$  a  $P$  y  $t_2$ , que tarda para nadar de  $P$  a  $B$  vienen dados por

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + z_a^2}}{v_1} .$$

y

$$t_2 = \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}}{v_2} .$$

Por lo tanto, el tiempo total que tarda en ir de  $A$  a  $B$  es

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + z_a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}}{v_2} .$$

En la expresión anterior  $L$ ,  $z_a$  y  $z_b$  son fijos; el valor de  $x$  se debe determinar de manera que  $T$  sea mínimo.

Encontrar el mínimo de  $T$  en función de  $x$  es equivalente a encontrar los ceros de la función derivada  $dT/dx$ :

$$\frac{dT(x)}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(x+\epsilon) - T(x)}{\epsilon} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + z_a^2}} - \frac{(L-x)}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} .$$

La derivada tiene ceros si

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + z_a^2}} = \frac{(L-x)}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} .$$

Pero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + z_a^2}} = \sin \alpha$$

y

$$\frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} = \sin \beta ,$$

luego,  $T(x)$  tiene un extremo en función de  $x$  cuando

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} .$$

No es difícil convencerse que tal extremo corresponde a un mínimo (y no a un máximo).

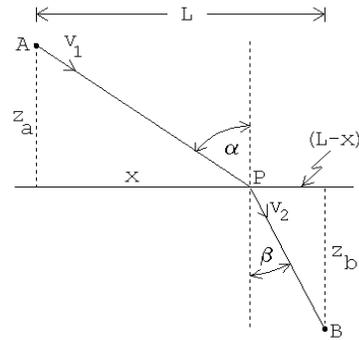


Figura 2.20

**Solución al problema 29**

a) Implícitamente supondremos que las distancias estarán expresadas en metros, el tiempo en segundos, las velocidades en m/s y las aceleraciones en  $\text{m/s}^2$ . De acuerdo al enunciado se tiene:

$$\text{Punto de partida: } x(0) = -4, v(0) = 2$$

Entre  $t = 0$  y  $4$ ,  $v(t) = 2$ , lo que corresponde a una línea horizontal en el gráfico  $v$  en función de  $t$  (ver figura 2.21).

Entre  $t = 0$  y  $4$  se tiene una recta con pendiente  $2$ , en el gráfico  $x(t)$  en función de  $t$  (ver figura 2.22). La posición en  $t = 4$  es  $x(4) = x(0) + v_0 \cdot 4 = -4 + 2 \cdot 4 = 4$ .

A partir de  $t = 4$ , en el gráfico  $v$  en función de  $t$ , la velocidad estará representada por una recta hasta llegar a  $v_0/2 = 1$ . Durante el proceso de frenado que tarda hasta cierto instante  $\tilde{t}$ , la partícula avanza  $3$  metros, o sea, el área bajo la curva  $v(t)$  entre  $t = 4$  y  $\tilde{t}$  debe ser  $3$ . No es difícil darse cuenta de que  $\tilde{t}$  debe ser  $6$ .

La aceleración entre  $t = 4$  y  $t = 6$  es  $a_1 = -0.5$  (es la pendiente en el gráfico 2.21).

De acuerdo al enunciado, la partícula avanza  $3$  metros durante el frenado, o sea,  $x(6) = x(4) + 3 = 7$ . El gráfico de  $x(t)$ , entre  $t = 4$  y  $t = \tilde{t} = 6$  será parabólico con curvatura negativa. Otra forma de encontrar la posición en  $t = 6$  es usando la expresión  $x(6) = x(4) + v(4) \cdot (6-4) + 0.5 a_1 \cdot (6-4)^2$ , o sea,  $x(6) = 4 + 2 \cdot 2 - 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2^2 = 7$ .

De  $t = 6$  hasta  $t = 8$  (durante  $2$  segundos) la velocidad se mantiene constante. El gráfico de  $v(t)$  es una recta horizontal con velocidad  $1$ .

El área bajo el gráfico  $v(t)$  entre  $t = 6$  y  $8$  nos da la distancia que  $A$  avanza en ese intervalo. Tal área es  $2$ , luego  $x(8) = 7 + 2 = 9$ . Durante este intervalo  $x(t)$  es representado por una recta (velocidad constante).

Se tiene que  $v(8) = 1$ . La partícula desacelera con aceleración  $a_0 = -2$  hasta que la velocidad sea  $-3$ . Se observa inmediatamente que para ello debe desacelerar durante  $2$  segundos. Entonces  $v(10) = v(8) + a_0 \cdot (10 - 8) = 1 - 2 \cdot (10 - 8) = 1 - 4 = -3$ . Entre  $t = 8$  y  $10$  el gráfico de  $v(t)$  es una recta (aceleración constante).

Podemos encontrar la posición de la partícula en  $t = 10$ :  $x(10) = x(8) + v(8) \cdot (10 - 8) + 0.5 a_1 \cdot (10 - 8)^2$ , o sea,  $x(10) = 9 + 1 \cdot 2 + 0.5 \cdot (-2) \cdot 2^2 = 7$ .

En  $t = 10$  la partícula se encuentra en  $x(10) = 7$  y su velocidad es  $v(10) = -3$ . La partícula sigue a velocidad constante hasta llegar a dos metros del punto de partida (o sea, hasta llegar a  $-2$  metros). La partícula, por lo tanto, deberá recorrer  $9$  metros. Con  $v_1 = -3$  [m/s] tardará para ello  $3$  segundos. O sea, entre  $t = 10$  y  $t = 13$  la velocidad será constante (línea horizontal) en el gráfico  $v$  en función de  $t$ .

A partir de  $t = 13$  la partícula frena uniformemente hasta quedar en reposo en el

punto de partida. El gráfico de  $v(t)$  es por lo tanto una recta hasta cero. El área bajo la curva entre  $t = 13$  y el instante en que queda en reposo debe ser  $-3$  (la partícula  $A$  debe recorrer aún dos metros hacia la izquierda para llegar al punto de partida). Es claro que para ello tardará  $4/3$  segundos.

Entre  $t = 13$  y  $t = 14, \overline{3}$ , la partícula recorre  $-2$  metros. El gráfico de  $x(t)$  es una parábola curvada hacia arriba que llega a  $t = 14, \overline{3}$  con pendiente nula.

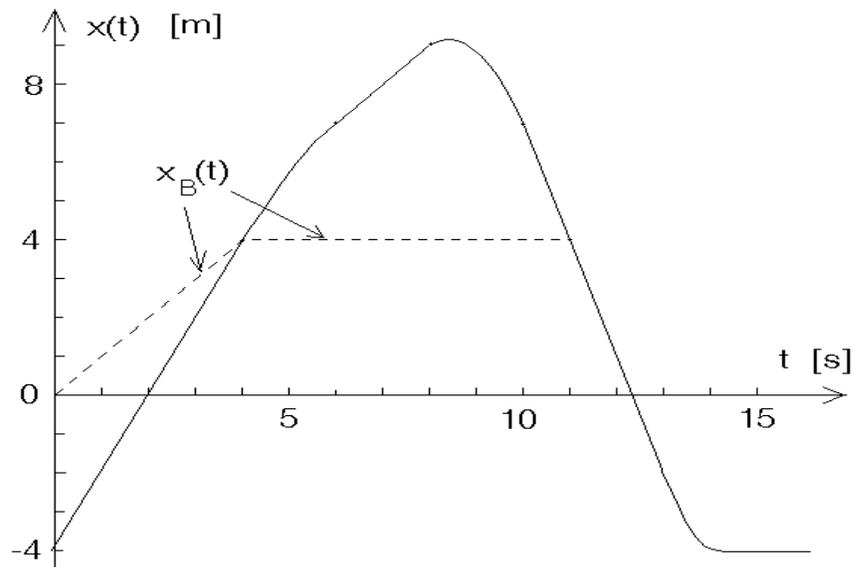


Figura 2.21

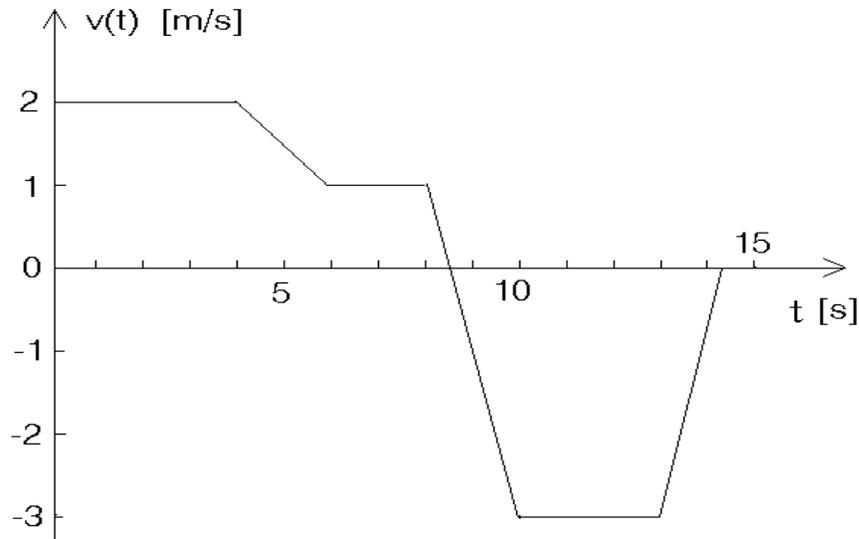


Figura 2.22

b) En  $t = 6$  y  $t = 13$  la partícula  $A$  se encuentra en  $x(6) = 7$  y  $x(13) = -2$ , respectivamente. La velocidad media entre esos dos instantes es

$$\bar{v} = \frac{(-2) - 7}{13 - 6} = -9/7 \text{ m/s} .$$

c) En  $t = 8$  la velocidad es  $1 \text{ m/s}$ . A partir de ese instante la partícula acelera con aceleración  $a_0 = -2$ , o sea, tarda  $0.5 \text{ s}$  para quedar temporalmente en reposo. En ese instante ( $8,5 \text{ s}$ ) ocurre el alejamiento máximo. Se tiene

$$\begin{aligned} x(8,5) &= x(8) + v(8) \cdot (8,5 - 8) + \frac{1}{2} a_0 \cdot (8,5 - 8)^2 \\ &= 9 + 1 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 = 9,25 \text{ [m]} . \end{aligned}$$

d) Graficando  $x_B(t)$  en la figura 2.21 se encuentra que los dos móviles se vuelven a encontrar en el instante  $t = 11 \text{ s}$ .

### Solución al problema 30

Cada manzana debe tardar  $t_0 = 3 \cdot 0,5 = 1,5$  segundos en subir y bajar. Al lanzar un objeto con velocidad  $v_0$  hacia arriba tarda un tiempo  $v_0/g$  hasta llegar arriba y un tiempo igual hasta volver al punto de partida. Tenemos

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} = 1,5 \text{ [s]} .$$

Esta ecuación nos permite evaluar la velocidad con que se debe lanzar la manzana,  $v_0 = t_0 g/2$ .

La altura a la que llega es un objeto lanzado con velocidad  $v_0$  es  $h = v_0^2/(2g)$ . Combinando las dos últimas ecuaciones se encuentra para  $h$  la expresión

$$h = \frac{1}{8} g t_0^2 .$$

Con  $g \simeq 10$  [m/s<sup>2</sup>] se encuentra  $h \simeq 3$  metros.

### Solución al problema 32

- a) Cuando  $B$  envía el mensaje se encuentra a 22 m de  $A$ . El mensaje tarda 1/2 s en llegar a su destino. Durante ese intervalo el móvil  $A$  seguirá moviéndose desplazándose  $10 \cdot 0,5 = 5$  metros. El mensaje deberá recorrer en 0,5 s una distancia de  $(22+5)=27$  metros. La velocidad del mensaje será  $c = 27/0,5 = 54$  [m/s].
- b) Las ecuaciones de movimiento de los móviles, para  $0 < t$  y el instante en que  $B$  envía el mensaje (llamémoslo  $t_1$ ), son

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A(0)t = 100 + 10 \cdot t$$

$$x_B(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} t^2$$

$$v_A(t) = v_A(0) = 100$$

$$v_B(t) = a_1 t = t .$$

(En las expresiones anteriores estamos suponiendo que los tiempos están dados en segundos, las distancias en metros, las velocidades en [m/s] y las aceleraciones en [m/s<sup>2</sup>].)

Sabemos que en  $t = t_1$  la separación entre  $A$  y  $B$  es de 22 metros, o sea,

$$x_A(t_1) - x_B(t_1) = 100 + 10 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2 = 22 .$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para  $t_1$  se encuentra que  $t_1 = 10 \pm 16$ . En el contexto del problema sólo la solución positiva tiene sentido, o sea,  $t_1 = 26$  [s].

La velocidad de  $B$  en el instante  $t_1$  es  $v_B(t_1) = 26$  [m/s].

- c) Desde que  $B$  envía el mensaje hasta chocar con  $A$ , el móvil  $B$  debe recorrer una distancia de  $22+5=27$  metros. En el instante  $t_1$  se encuentra a  $x_B(t_1) = (26)^2/2 = 338$  m del origen. La distancia total que  $B$  debe recorrer desde que parte del origen hasta que choca con  $A$  es  $(338+27)=365$  m.

- d) Desde que  $B$  envía el mensaje hasta chocar con  $A$ , el móvil  $B$  debe recorrer una distancia de  $22+5=27$  metros. Como su velocidad (a partir de  $t_1$ ) es de  $26$  m/s, tardará  $27/26$  segundos. El tiempo total, desde que  $B$  parte del origen hasta que choca con  $A$  es  $(26+27/26)$  s. Para la velocidad media de  $B$  se encuentra

$$\bar{v} = \frac{365}{26 + \frac{27}{26}} \simeq 13,5 \text{ [m/s]} .$$

## Capítulo 3

# Cinemática en dos y tres dimensiones

versión 2 junio 2008

En este capítulo extenderemos la descripción del movimiento de una partícula a dos y tres dimensiones. Esto nos lleva a introducir el concepto de vector, cuya definición y propiedades ilustraremos con los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración.

### 3.1 Vectores

Para movimientos en una dimensión, basta un número para describir completamente la posición de una partícula, a saber, la distancia entre dicho punto y el origen. Como el eje es orientado, el signo de dicho número indica si la partícula está a la derecha o a la izquierda del origen, y ésa es toda la información que necesitamos.

Cuando el movimiento es en más dimensiones, no basta un número. Si deseamos indicar completamente la posición de, digamos, Valparaíso respecto a Santiago, necesitamos indicar no sólo la distancia que los separa, sino alguna indicación de *en qué dirección* se encuentra desde Santiago. Si imaginamos entonces una flecha cuyo origen está en Santiago, y su punta está en Valparaíso, esa flecha tiene toda la información necesaria para llegar de una ciudad a la otra.

Esta flecha corresponde a un *vector*. Un vector será una entidad que no solamente tiene magnitud, sino también dirección. Decimos entonces que la posición de una partícula es un vector. En este capítulo y los siguientes encontraremos diversas cantidades físicas para cuya descripción completa no basta sólo un número, sino además una dirección (la velocidad, por ejemplo; su dirección es importante: puede hacer la diferencia entre una colisión entre dos vehículos o no). Otras cantidades, en cambio, pueden ser descritas con sólo un número: la masa de una partícula, por ejemplo; o la cantidad de libros en nuestra biblioteca. A dichas cantidades las llamamos *escalares*.

Un vector se denota con una flecha:  $\vec{A}$ . Se denomina *módulo* del vector  $\vec{A}$  a la longitud de la flecha que lo representa, y se le denomina  $|\vec{A}|$ , o simplemente  $A$ .

Si bien es cierto la imagen geométrica de un vector como una flecha es suficiente, necesitamos, para analizar el movimiento, ser más precisos. Introduciremos, entonces, igual como lo hicimos en el Capítulo anterior, un origen y ejes coordenados.

Consideremos el movimiento de una partícula en un plano. La posición de la partícula podrá ser claramente especificada si se introduce un sistema de ejes perpendiculares que se intersectan en un punto, que llamaremos el “origen” (ver figura 3.1).

Por ejemplo, el punto  $P$  en la figura 3.1 se encuentra a 3 m a la derecha del origen, medidos a lo largo de la dirección del eje  $x$ , a 2 m sobre el origen, medidos a lo largo del eje  $y$ . En general, la posición de un punto cualquiera queda determinada dando un *par ordenado*  $(x, y)$  de números, en el sentido que *siempre* el primer número corresponderá a la proyección sobre el eje  $\hat{x}$  y el segundo número a aquélla sobre el eje  $\hat{y}$ .

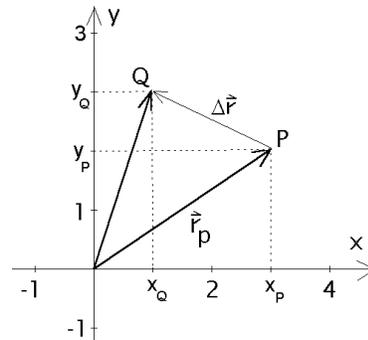


Figura 3.1

El trazo que une el origen  $O$  con el punto  $P$ , en el sentido que indica la punta de flecha en la figura 3.1, se denomina el *vector de posición*  $\vec{r}_p$  del punto  $P$ . La magnitud de este vector es igual a la longitud del trazo  $OP$  y se denota por  $|\vec{r}_p|$  o simplemente como  $r_p$  (sin flecha).

La descripción de un vector como un par ordenado es equivalente a su descripción como una flecha, pero sirven propósitos distintos. Es la misma diferencia entre hacer Geometría Euclidiana (en que una recta, por ejemplo, es un objeto geométrico tal que pasa por dos puntos dados; para construir una recta no necesitamos otra cosa que lápiz y papel) y Geometría Analítica (en que una recta es el conjunto de puntos que satisface una ecuación del tipo  $y = mx + n$ , de modo que además de lápiz y papel necesitamos un par de ejes coordenados respecto a los cuales medir  $x$  e  $y$ .)

Es importante notar que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y que apuntan en la misma dirección. En la Fig. 3.2 se muestra un conjunto de vectores iguales, dibujados en diferentes posiciones del plano  $x$ - $y$ .

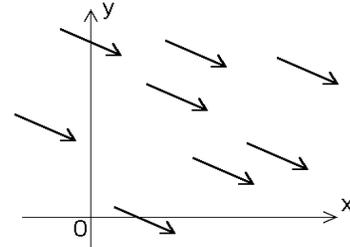


Figura 3.2

Supongamos ahora que la partícula en un instante  $t$  se encuentra en  $P$  y en un instante posterior  $t' > t$  se encuentra en el punto  $Q$  (ver figura 3.1). El vector que une el origen  $O$  con  $Q$  es el nuevo vector de posición de la partícula. Llamémoslo  $\vec{r}_Q$ . Por analogía al caso unidimensional, deberíamos definir el *vector desplazamiento* a la diferencia entre los dos vectores posición,  $\vec{r}_Q - \vec{r}_P$ . Pero entonces vemos que, para describir el movimiento, necesitamos definir la resta (es decir, en general, la suma) entre vectores. Por ahora podemos decir que, en el caso de la Fig. 3.1, el *vector desplazamiento* corresponde al vector conformado por el trazo  $PQ$  y cuyo sentido va desde  $P$  hacia  $Q$ , y corresponde precisamente a  $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_Q - \vec{r}_P$ . Pero para formalizar este hecho necesitamos definir antes la suma de vectores y estudiar sus propiedades.

### Suma de vectores

Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores. Traslademos paralelamente a sí mismo al vector  $\vec{B}$  hasta que su extremo romo se superponga con el extremo aguzado (punta de flecha) del vector  $\vec{A}$ . El vector suma  $\vec{A} + \vec{B} \equiv \vec{C}$  se define como el trazo que comienza en el extremo romo de  $\vec{A}$  y termina en el extremo aguzado de  $\vec{B}$ . Esta definición se conoce con el nombre de *regla del paralelogramo*.

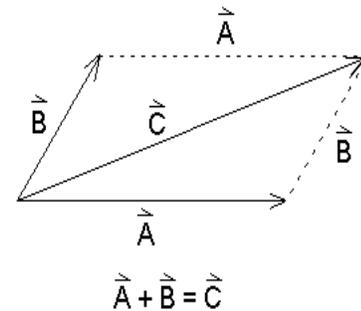


Figura 3.3

Equivalentemente, podemos decir que para sumar dos vectores basta colocar un vector a continuación del otro. Al unir el origen del primer vector con la flecha del segundo vector, se obtiene el vector suma (en el caso de la Fig. 3.3, corresponde a considerar sólo el “semi-paralelogramo” inferior; claramente el resultado es el mismo).

**Ejemplo:**

Un excursionista parte desde una cierta posición y camina 4 km hacia el Este y luego 3 km hacia el Sur. ¿Cuál es el vector desplazamiento resultante  $\vec{C}$ ?

El vector  $\vec{C}$  es la suma vectorial de los desplazamientos parciales realizados por el excursionista, hacia el este  $\vec{A}$  y luego hacia el sur  $\vec{B}$ . Gráficamente la situación está ilustrada en la figura 3.4. La magnitud del desplazamiento resultante se calcula utilizando el teorema de Pitágoras

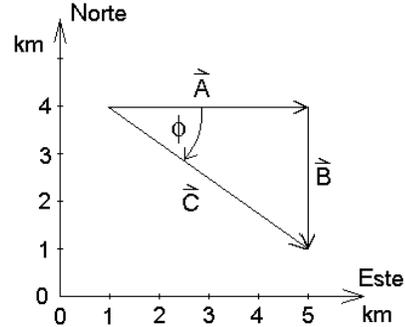


Figura 3.4

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ km} .$$

La dirección de  $\vec{C}$  queda definida por el ángulo  $\phi$  que forma el vector  $\vec{C}$  con la dirección Oeste–Este. Consideraremos un ángulo positivo cuando se mide en sentido contrario a los punteros del reloj, luego

$$\tan \phi = -\frac{3}{4} = 0.75 , \text{ es decir, } \phi = -36.9^\circ .$$

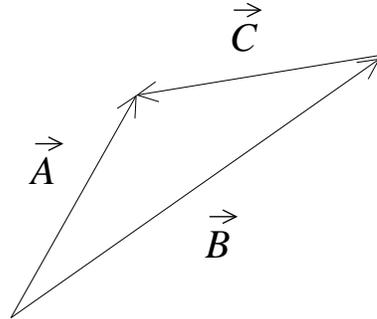
Que el ángulo  $\phi$  sea negativo significa que está medido en el mismo sentido de los punteros del reloj.

La suma de vectores tiene las siguientes propiedades:

- i) Conmutatividad:  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$  .
- ii) Asociatividad:  $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$  .
- iii) Existe un vector nulo tal que  $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$  .
- iv) Para cada vector  $\vec{A}$  existe un vector opuesto, que denotaremos por  $-\vec{A}$ , tal que  $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$  .

De hecho, son éstas propiedades las que permiten llamar “suma” a la operación definida en la Fig. 3.3. En general, a cualquier operación que satisfaga las cuatro propiedades anteriores se le puede llamar suma, y asignarle el símbolo “+”.

¿Y cómo se restan dos vectores? Por una parte, podemos calcularlo sumando un vector con el opuesto aditivo del otro. Alternativamente, podemos verlo como sugiere la figura siguiente:



Si  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ , entonces  $\vec{C}$  debe ser tal que  $\vec{C} + \vec{B} = \vec{A}$ , esto es, al poner el vector  $\vec{C}$  a continuación del vector  $\vec{B}$ , debería obtenerse el vector  $\vec{A}$ . Esto es lo que muestra la figura anterior, y por tanto el vector  $\vec{A} - \vec{B}$  es el vector que une las puntas de los dos vectores involucrados, y apunta en dirección de  $\vec{B}$  hacia  $\vec{A}$ .

También es posible definir la multiplicación de un vector por un escalar, como veremos a continuación.

### Multiplicación de un vector por un escalar real.

La multiplicación de un vector  $\vec{A}$  por un número real  $\alpha$  (escalar real) se define como un nuevo vector  $\vec{B}$  de magnitud  $\alpha|\vec{A}|$ , cuyo sentido coincide con el de  $\vec{A}$  si  $\alpha > 0$  y es opuesto al de éste si  $\alpha < 0$ .

Propiedades de la multiplicación por un escalar real.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos números reales y  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores, entonces:

- i)  $\alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$ .
- ii)  $(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}$ .
- iii)  $(\alpha\beta)\vec{A} = \alpha(\beta\vec{A})$ .
- iv) Para todo vector  $\vec{A}$  se cumple que  $1\vec{A} = \vec{A}$ .

**Ejercicio:** Compruebe gráficamente, con algunos ejemplos concretos, que se cumplen todas las propiedades de los vectores recién señaladas.

Las dos operaciones que hemos definido son fundamentales para un vector. De hecho, desde el punto de vista matemático, un vector es un objeto para el cual se puede definir una suma y un producto por escalar (es decir, dos operaciones, una entre vectores y otra entre un vector y un escalar, con las propiedades indicadas más arriba). Cualquier objeto que tenga tales operaciones con dichas propiedades, podrá ser llamado vector. La imagen de un vector como una flecha es, entonces, sólo

pictórica, nos permite tener una intuición, pero matemáticamente podemos ser más abstractos aún.

### Componentes cartesianas y polares de un vector.

Para describir unívocamente un vector en dos dimensiones necesitamos las dos componentes del par ordenado que lo representa, por ejemplo. A dichos números se les denomina las *componentes cartesianas* del vector. Dos vectores  $\vec{A} = (A_x, A_y)$  y  $\vec{B} = (B_x, B_y)$  son iguales si cada una de sus componentes son iguales:  $A_x = B_x$ , y  $A_y = B_y$ .

Sin embargo, la anterior no es la única posibilidad de descripción. Como se ve en la Fig. 3.4, también es posible caracterizar al vector dando *otros* dos números, a saber, su módulo y su dirección, en la forma de un ángulo respecto al eje  $x$ . A éstos se les denomina las *coordenadas polares* del vector.

El vector es, desde luego, uno solo. Lo único que cambia son los números (las coordenadas) con las cuales se decide describirlo. Debe existir, entonces, una relación entre ambos sistemas de coordenadas.

Sea  $\vec{A} = (A_x, A_y)$  un vector cualquiera del plano  $x$ - $y$ . Expresemos el vector, alternativamente, en función de su magnitud  $A$  y del ángulo  $\theta$  que forma con el semieje  $x$  positivo. La figura 3.5 muestra que

$$A_x = A \cos \theta \quad A_y = A \sin \theta ,$$

y que

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{A_y}{A_x} .$$

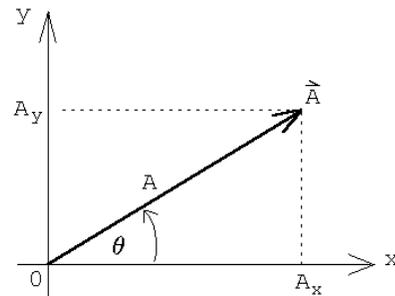


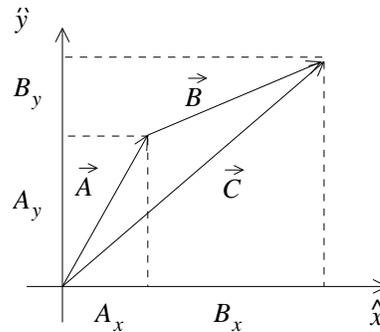
Figura 3.5

Los números  $(A_x, A_y)$  se denominan las *coordenadas cartesianas* del vector; los números  $(A, \theta)$  reciben el nombre de *coordenadas polares* del vector  $\vec{A}$ . Cualquiera sea el caso, un vector en un plano queda determinado si se conocen dos números.

Notemos que al calcular las coordenadas polares en términos de las cartesianas, es necesario invertir una función trigonométrica. Como el cociente  $A_y/A_x$  no distingue entre vectores en los cuadrantes I y III, por un lado, ni en los cuadrantes II y IV, por otro, es importante tener presente esto y no usar la calculadora ciegamente.

Ahora que manejamos el concepto de coordenadas, es conveniente notar la forma que tienen las dos operaciones que hemos definido sobre vectores, pero ahora en coordenadas cartesianas. Esto, en la práctica, y dependiendo del problema en cuestión, puede ser más conveniente que manejar sólo las definiciones geométricas dadas hasta ahora.

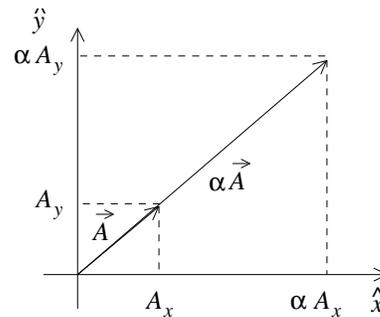
En la siguiente figura, representamos la suma de dos vectores:



Es claro de la figura que, de la definición de suma de vectores, ésta es, en coordenadas cartesianas,

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y) .$$

Análogamente, para la multiplicación por un escalar:



se tiene que

$$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y) .$$

Los análisis anteriores han sido realizados para vectores en dos dimensiones, pero naturalmente pueden ser generalizados a tres. En este caso, el módulo de un vector en coordenadas cartesianas es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} ,$$

la suma entre vectores es

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) ,$$

y el producto por un escalar es

$$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z) .$$

**Vectores unitarios.**

Habiendo definido la multiplicación entre escalares y vectores, sería interesante tener ciertos vectores “elementales”, tal que un vector arbitrario se pudiera escribir como un múltiplo de esos vectores elementales. Para ello definimos los *vectores unitarios*, que son los vectores de módulo uno. Para distinguirlos del resto de los vectores, los denotamos con un “tongo”:  $\hat{A}$ . Para caracterizar una dirección, entonces, basta con indicar *el* vector unitario que tiene dicha dirección (existe uno solo; todos los otros vectores con la misma dirección no son unitarios).

Dado cualquier vector  $\vec{A}$  es posible obtener el vector unitario con su misma dirección: basta dividirlo por su módulo. En efecto, el vector

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \left( \frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A} \right)$$

es unitario:

$$|\hat{A}| = \sqrt{(A_x/A)^2 + (A_y/A)^2 + (A_z/A)^2} = \sqrt{\frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2}} = 1 .$$

Es posible, entonces, encontrar infinitos vectores unitarios. Existen, sin embargo, tres vectores unitarios que merecen mención especial. Éstos son los vectores unitarios  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  que apuntan en sentido positivo sobre cada uno de los ejes coordenados de un sistema cartesiano en tres dimensiones. (En algunos libros estos vectores se designan con  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente.)

Observemos la figura 3.6. Recordando que la suma de vectores equivale a poner un vector a continuación del otro, es claro que el vector  $\vec{A}$  se puede escribir como la suma de tres vectores:  $A_x\hat{x}$  (un vector en la dirección  $\hat{x}$ , de módulo  $A_x$ ),  $A_y\hat{y}$  (dirección  $\hat{y}$ , módulo  $A_y$ ), y  $A_z\hat{z}$  (dirección  $\hat{z}$ , módulo  $A_z$ ). Es decir,

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} .$$

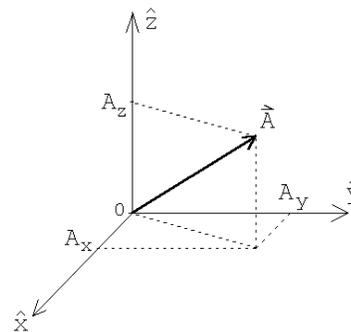


Figura 3.6

Sabemos sumar vectores y multiplicarlos por escalares. ¿Es posible definir otras operaciones, análogas a las conocidas entre números reales? ¿Por ejemplo, un producto entre vectores? La respuesta es sí, pero no hay una única manera de hacerlo. Revisemos a continuación una de ellas.

**Producto escalar o producto punto de dos vectores**

Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores arbitrarios. Se define el *producto punto* entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  mediante la expresión

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \gamma ,$$

donde  $\gamma$  es el ángulo entre los dos vectores (ver figura 3.7).<sup>1</sup>

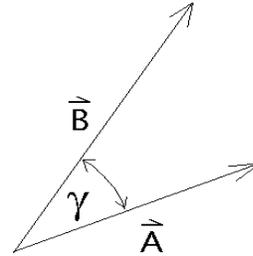


Figura 3.7

De la definición se desprende que el producto punto de dos vectores es un número real. Podemos reinterpretar geoméricamente el producto punto como el producto entre el módulo de un vector ( $A$ ) y el módulo de la *proyección del otro vector* sobre éste ( $B \cos \gamma$ ). Y viceversa.

Es claro que si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son rotados simultáneamente, en el mismo ángulo, su producto punto no cambia.

Se tiene también que si dos vectores son paralelos, el producto punto es simplemente el producto de sus módulos. Por su parte, si dos vectores son perpendiculares el producto punto entre ellos es cero.

En particular, para los vectores unitarios  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ :

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

y

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 .$$

Otras características importantes del producto punto son su conmutatividad

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

y distributividad

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} .$$

**Ejercicio:** Demuestre las dos propiedades anteriores a partir de las definiciones geométricas de suma de vectores y producto punto.

Es claro que

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} .$$

<sup>1</sup>A diferencia del producto entre números reales, el punto que representa el producto escalar entre vectores no se puede omitir.

Notemos que, a diferencia del producto entre reales, no existe un elemento neutro. Si existiera (llamémoslo  $\vec{N}$ ), sería un vector tal que  $\vec{A} \cdot \vec{N}$  sea igual a  $\vec{A}$ , lo que es imposible, ya que el primero es un escalar, y el segundo un vector. Por tanto, tampoco existe un elemento inverso bajo el producto punto, y no es posible definir una “división” entre vectores.

Usando las propiedades conocidas, evaluemos el producto punto entre los dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en términos de sus coordenadas cartesianas. Se tiene

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \cdot \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \cdot \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \cdot \hat{z} + A_y B_x \hat{y} \cdot \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \cdot \hat{y} + \\ &\quad + A_y B_z \hat{y} \cdot \hat{z} + A_z B_x \hat{z} \cdot \hat{x} + A_z B_y \hat{z} \cdot \hat{y} + A_z B_z \hat{z} \cdot \hat{z} , \end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z .$$

Note que la última expresión permite evaluar el ángulo entre dos vectores si se conocen sus componentes cartesianas.

**Ejemplo**

Evaluemos nuevamente el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

Sea  $\vec{A}$  el vector a lo largo de la diagonal que une el punto (0,0,0) con el punto (1,1,1) y  $\vec{B}$  el vector a lo largo de la diagonal que une el punto (1,0,0) con el punto (0,1,1). Los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , por lo tanto, pueden escribirse en coordenadas cartesianas de la forma

$$\vec{A} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} .$$

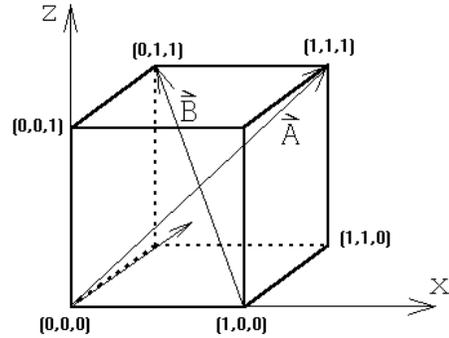


Figura 3.8

Evaluemos el producto punto de estos dos vectores. Se tiene

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \gamma = \sqrt{3} \sqrt{3} \cos \gamma ,$$

donde  $\gamma$  es el ángulo entre los dos vectores (o sea, el ángulo entre las dos diagonales). Por otra parte, usando coordenadas cartesianas

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 .$$

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que  $\cos \gamma = 1/3$ , o sea,  $\gamma = 70.53^\circ$ .

### 3.2 Cinemática

Habiendo ya definido los aspectos fundamentales de vectores, es directo generalizar los conceptos de la cinemática de una a dos y tres dimensiones.

Supongamos que  $\vec{r}(t)$  representa la posición de cierta partícula. Entonces su velocidad y aceleración (instantánea) vendrán dadas por

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta) - \vec{r}(t)}{\Delta}$$

y

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta) - \vec{v}(t)}{\Delta}.$$

De la expresión anterior se deduce que si

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z},$$

donde  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  son las componentes del vector de posición, entonces

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} \hat{x} + \frac{y(t + \Delta) - y(t)}{\Delta} \hat{y} + \frac{z(t + \Delta) - z(t)}{\Delta} \hat{z} \right],$$

es decir

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z},$$

o sea, para encontrar la velocidad se puede derivar cada componente del vector posición por separado. Análogamente,

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z}.$$

Introduzcamos también el concepto de *velocidad relativa*. Supongamos que una partícula  $A$  se mueve con velocidad  $\vec{v}_A$  y otra partícula  $B$  con velocidad  $\vec{v}_B$ , entonces la velocidad con que  $A$  observa que se mueve  $B$ , viene dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A.$$

Se dice que “ $\vec{v}$  es la velocidad relativa de  $B$  respecto a  $A$ ”.

#### Ejemplo:

Suponga que la corriente de un canal tiene una velocidad de 10 km/h en dirección Este. Un transbordador navega en la dirección de 30° Noroeste, a una velocidad de 20 km/hora con respecto a la corriente del canal (ver figura 3.9). ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según un observador situado en la ribera?

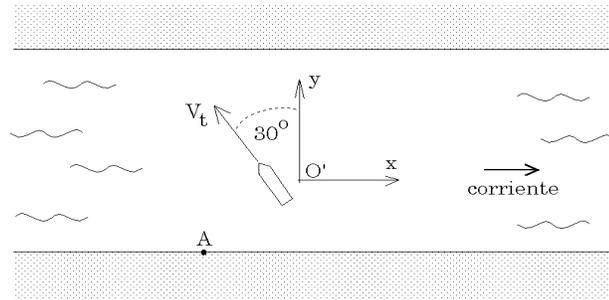


Figura 3.9

Para resolver el problema introduciremos un sistema de coordenadas  $\hat{x}, \hat{y}$  cuyo origen  $O'$  se mueve junto al agua del canal. Para el observador  $O'$ , un punto fijo en la orilla se mueve con velocidad

$$\vec{v}_A = [-10, 0] \text{ km/h} ,$$

mientras que el transbordador se aleja con una velocidad

$$\vec{v}_t = [-20 \sin(30^\circ), 20 \cos(30^\circ)] \text{ km/h} = [-10, 10\sqrt{3}] \text{ km/h} .$$

Luego, la velocidad con que el observador parado en la orilla en el punto  $A$  ve alejarse al transbordador (o sea, la velocidad relativa entre el transbordador y la orilla), será

$$\vec{v} = \vec{v}_t - \vec{v}_A = [0, 10\sqrt{3}] \text{ km/h} = 10\sqrt{3} \hat{y} \text{ km/h} ,$$

un movimiento puramente transversal a la corriente del canal.

Analicemos ahora el problema de otra forma. Supongamos que nos damos un intervalo de tiempo arbitrario, por ejemplo, 1 hora (porque es el más fácil de usar en este caso) e imaginemos que durante ese intervalo la corriente del canal está detenida. Calculamos el desplazamiento del transbordador en este caso. En una hora el ferry se desplaza 20 km desde  $O$  hasta el punto  $P'$ . En seguida —y siempre en nuestra imaginación— dejemos fluir la corriente del canal durante una hora, pero ahora con el ferry detenido (dejando que simplemente flote en la corriente). El desplazamiento debido al arrastre del canal llevará al ferry desde el punto  $P'$  hasta  $P$  (10 km hacia la derecha), como mostramos en la figura 3.10.

El desplazamiento total del ferry es el vector de  $O$  hasta  $P$ . Este desplazamiento, como es fácil de demostrar, coincide con el que el ferry hubiese tenido en una hora si los dos movimientos hubiesen estado presentes simultáneamente. Es decir, para resolver el problema podemos descomponer el movimiento en dos movimientos separados, congelando uno y otro sucesivamente. El movimiento total es la *superposición* de ambos movimientos. Esta operación, sólo posible en la imaginación, arroja

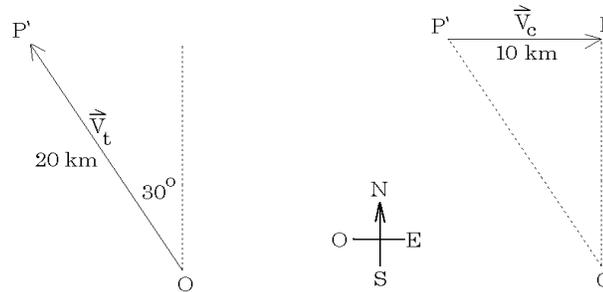


Figura 3.10

los mismos resultados que se observan en la vida real, y es extremadamente útil para describir movimientos complejos, al considerarlos como superposición de dos o más movimientos más sencillos.

Demos otro ejemplo del uso del principio de superposición. Consideremos un anillo que rueda (sin resbalar) por una superficie horizontal con velocidad constante. Tomemos un punto cualquiera sobre el anillo y analicemos su movimiento. Para un observador  $O$  en reposo respecto a la superficie, el movimiento del punto tendrá un aspecto complicado. Sin embargo, al trasladarnos uniformemente con la misma velocidad que el centro del anillo, el movimiento del punto se tornará muy simple: es un movimiento circular uniforme. Así, el movimiento complicado que observa  $O$  se puede descomponer en dos movimientos simples, un movimiento de traslación uniforme superpuesto a un movimiento circular uniforme (ver problema 13).

#### Problema resuelto en clases: 3.19

#### Caída libre

Podemos utilizar el principio de superposición para describir la caída de una partícula en el campo gravitatorio terrestre.

La figura 3.11, a la izquierda, muestra la posición de una pelota en caída libre durante varios instantes equiespaciados. A la derecha se muestra la situación que se observa si el cuerpo además inicialmente tiene una velocidad horizontal. La trayectoria en este caso es una parábola. Históricamente, los filósofos se esforzaron mucho para intentar explicar este movimiento, sin éxito. Fue Galileo Galilei quien comprendió que la solución era describir el movimiento de la manera más sencilla y directa. Fue él quien, por primera vez, estudió la caída de una partícula como una superposición de dos movimientos: i) la tendencia natural de los cuerpos a mantener su velocidad (ley de inercia) y ii) la caída libre de un cuerpo debida a la atracción

gravitatoria. Cuando ambos movimientos se superponen simultáneamente, se puede mostrar, geoméricamente, que dan origen al movimiento parabólico, tal como se observa experimentalmente.<sup>2</sup>

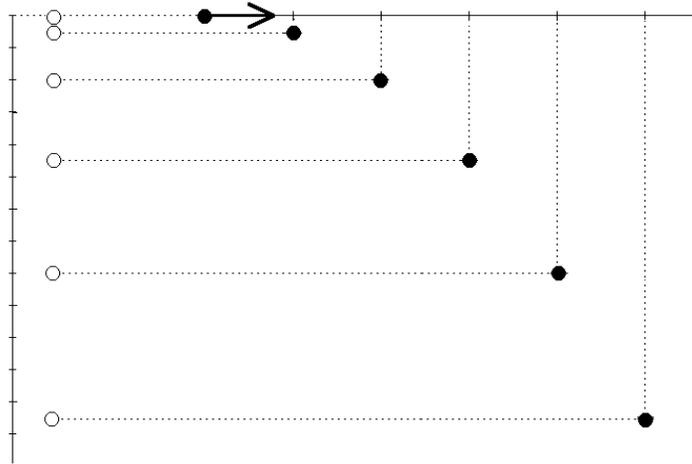


Figura 3.11

Analicemos ahora vectorialmente este problema. Para comenzar, especifiquemos el sistema de referencia. El eje  $\hat{x}$  lo elegimos de manera que su dirección coincida con la proyección de la velocidad sobre el plano horizontal, mientras que el eje  $\hat{z}$  lo elegimos hacia arriba (o sea, una partícula al caer acelera en la dirección  $-\hat{z}$ ). De acuerdo a las observaciones del propio Galileo, la aceleración en todo instante es  $\vec{a}(t) = -g\hat{z}$ . También supondremos que la velocidad en el instante  $t = 0$  viene dada por  $\vec{v}(0) = v_x^{(0)}\hat{x} + v_z^{(0)}\hat{z}$  y que la partícula se encuentra en el lugar  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = x_0\hat{x} + z_0\hat{z}$ . Deseamos encontrar, con toda esta información, la posición de la partícula,  $\vec{r}(t)$ , para todo instante  $t$ . Puesto que  $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t)$ , el problema corresponde, matemáticamente, integrar dos veces el vector  $\vec{a}(t)$ ; la primera vez obtendremos la velocidad, y la segunda vez la posición. Pero ya sabemos que derivar un vector equivale a derivar cada componente por separado; es claro que lo mismo debe ocurrir con la operación inversa: integrar un vector equivale a integrar cada componente por separado [basta recordar que integrar  $\vec{a}(t)$  es encontrar aquella función tal que su derivada es  $\vec{a}(t)$ .] En la práctica, esto significa que podemos analizar cada una de las

<sup>2</sup>Es importante notar la gran intuición física que implica, de parte de Galileo, el haber sido capaz de separar el movimiento de este modo, en una época en que las condiciones para hacer experimentos de precisión era muy limitada, y ni siquiera existía el concepto de la necesidad de realizar experimentos de precisión.

componentes del vector  $\vec{a}$  por separado.

Componente  $x$  : La aceleración no tiene componente en la dirección  $x$ , o sea,

$$a_x = 0 .$$

La velocidad  $v_x$  es, por lo tanto, constante, igual al valor inicial:

$$v_x(t) = v_x^{(0)} \quad \forall t .$$

Para el desplazamiento en la dirección  $x$  se encuentra que

$$x(t) = x_0 + v_x^{(0)} t .$$

Componente  $z$  : La aceleración es

$$a_z = -g .$$

La velocidad  $v_z$  y el desplazamiento en la dirección  $z$  vendrán dados por

$$v_z(t) = v_z^{(0)} - gt$$

y

$$z(t) = z_0 + v_z^{(0)} t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Estos resultados los podemos condensar escribiéndolos en forma vectorial:

$$\vec{a}(t) = -g\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}^{(0)} - gt\hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}^{(0)} t - \frac{1}{2}gt^2\hat{z} .$$

Con esto hemos resuelto completamente el problema. Es posible, a partir de estas ecuaciones, mostrar que la trayectoria corresponde, efectivamente, a una parábola (ver Problema 3.21).

Notemos, finalmente, cómo el hecho de usar vectores para describir el movimiento nos permitió (por argumentos puramente matemáticos), separar el movimiento en dos componentes, que analizamos por separado. Pero éste es precisamente el espíritu del principio de superposición que había usado Galileo. Esto no es casualidad: el hecho de que sea posible usar superposición para describir movimientos complejos en términos de movimientos más sencillos, y el hecho de que podamos describir el movimiento con cantidades vectoriales, están íntimamente relacionados.

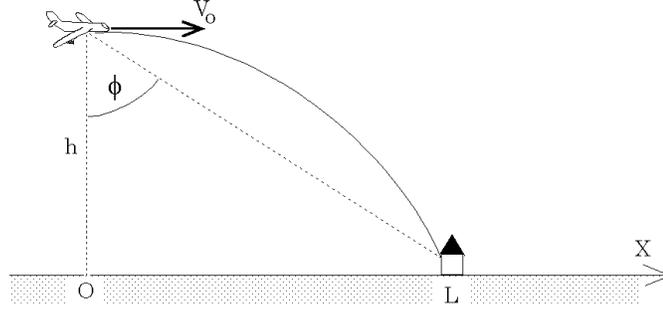


Figura 3.12

**Ejemplo**

Un bombardero vuela con una velocidad horizontal  $v_0$ , constante, y a una altura  $h$  en una trayectoria que pasa directamente por sobre su objetivo. ¿A qué ángulo de visión  $\phi$  debe soltar la bomba, de forma que ésta llegue a su objetivo? (Ignore el efecto debido al roce del aire.)

La bomba en el instante en que se deja libre tiene la misma velocidad que el bombardero. Definimos el sistema de coordenadas de acuerdo a lo que se observa en la figura 3.12. Entonces la posición y la velocidad inicial de la bomba vienen dadas por  $\vec{r}_0 = h\hat{z}$  y  $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ , respectivamente. ¿Cuánto demora la bomba en caer? La bomba llegará al suelo cuando  $z(t) = h - gt^2/2 = 0$ . Esto ocurre en el instante  $\tau = \sqrt{(2h/g)}$ . Durante el intervalo de tiempo  $\tau$  la bomba alcanza a recorrer una distancia horizontal  $L = v_0 \tau$ . Luego para el ángulo de visión obtenemos

$$\tan \phi = \frac{L}{h} = \frac{v_0}{h} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{gh}}.$$

Observemos que, mientras mayor es la velocidad del bombardero, mayor es el ángulo al cual debe lanzarse la bomba. En particular, cuando  $v_0 \rightarrow \infty$ ,  $\phi = \pi/2$ , lo que significa que el lanzamiento debe producirse cuando el avión se encuentra infinitamente lejos del objetivo. Otro límite interesante es  $h \rightarrow \infty$ , en cuyo caso  $\phi = 0$ , lo cual dice que cuando el avión se encuentra a una altura demasiado grande, hay que arrojar la bomba cuando el avión se encuentra directamente sobre el objetivo. Lo cual suena contradictorio a primera vista, ya que si el avión se mueve, siempre habrá un desplazamiento horizontal de la bomba, y éste será cada vez mayor precisamente mientras más alto se encuentre el avión. La solución es que, precisamente debido a que el movimiento es acelerado en la dirección vertical, para alturas demasiado grandes la bomba tiene mucho tiempo para aumentar su velocidad, superando cualquier velocidad horizontal que pueda haber tenido inicialmente. Esto hace que su desplazamiento horizontal termine siendo despreciable respecto al vertical, y eso corresponde a  $\phi$  despreciable, es decir cero.

Notemos también que si el campo gravitatorio disminuyera, sería necesario arrojar la bomba desde ángulos cada vez mayores, lo cual también está de acuerdo con la intuición, ya que la bomba demoraría más en caer.

**Problema resuelto en clases: 2.34**

**Movimiento circular uniforme**

Además del movimiento parabólico antes descrito, el movimiento circular es otro movimiento sencillo que podemos describir en dos dimensiones.

Consideremos una partícula que gira con rapidez constante sobre una trayectoria circular de radio  $R$  (que define el plano  $x$ - $y$ ). Eligiendo el origen al centro del círculo, que el movimiento sea uniforme significa que el ángulo del vector posición con el eje  $\hat{x}$  aumentará en la forma:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t \text{ ,}$$

donde  $\phi_0$  es el ángulo en el instante  $t = 0$  y  $\omega_0$  es una constante que determina cuán rápido varía el ángulo. Observemos la analogía entre la expresión anterior y la ecuación de itinerario para la posición en un movimiento uniforme en una dimensión. La variable lineal  $x$  es reemplazada por el ángulo  $\phi$ , y la velocidad lineal  $v$  por la así llamada *velocidad angular*  $\omega$ .

Las componentes  $x$  e  $y$  del vector posición vienen dadas por

$$x(t) = R \cos \phi(t) = R \cos(\phi_0 + \omega_0 t)$$

e

$$y(t) = R \sin \phi(t) = R \sin(\phi_0 + \omega_0 t).$$

El vector posición es, por lo tanto,

$$\vec{r}(t) = R \cos(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{x} + R \sin(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{y} \text{ .}$$

Derivando  $\vec{r}(t)$  se encuentra la velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = & - R\omega_0 \sin(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{x} \\ & + R\omega_0 \cos(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{y} \text{ .} \end{aligned}$$

Evaluemos el módulo de la velocidad (rapidez):

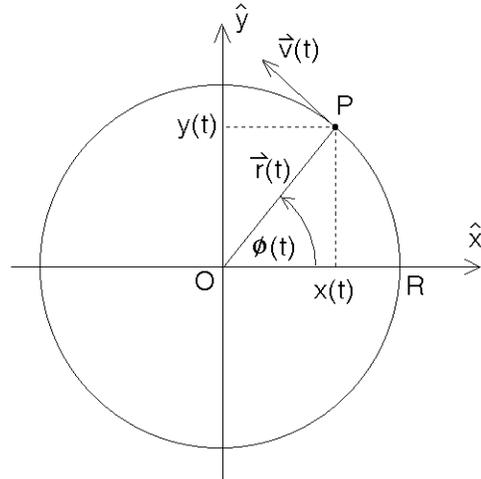


Figura 3.13

$$\begin{aligned}
 v &= |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \\
 &= \sqrt{R^2\omega_0^2 \sin^2(\phi_0 + \omega_0 t) + R^2\omega_0^2 \cos^2(\phi_0 + \omega_0 t)} = R\omega_0 .
 \end{aligned}$$

A pesar de que la rapidez es constante (no depende del tiempo), la velocidad no lo es, ya que continuamente cambia de sentido (y por tanto, existe una aceleración). Esta última ecuación enseña que la velocidad angular es la rapidez de la partícula dividida por el radio de giro. Lo cual es razonable, considerando lo siguiente: si la velocidad angular es constante, entonces la partícula debe dar una vuelta completa al círculo (es decir, recorrer un ángulo  $2\pi$ ), siempre en el mismo tiempo (el período  $T$ ). Equivalentemente, la partícula debe recorrer la circunferencia completa (una distancia  $2\pi R$ , en el mismo tiempo  $T$ ). Es decir:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{R} \frac{2\pi R}{T} = \frac{1}{R} v .$$

Si observamos la expresión para  $\vec{v}$  recién obtenida, notaremos que, cuando la partícula se encuentra sobre el eje  $\hat{x}$  ( $\phi(t) = 0$ ), su velocidad es  $R\omega_0\hat{y}$ , vertical hacia arriba. Cuando se encuentra sobre el eje  $\hat{y}$  ( $\phi(t) = \pi/2$ ), su velocidad es  $-R\omega_0\hat{x}$ , horizontal hacia la izquierda. Así sucesivamente, esto sugiere que la velocidad es un vector siempre tangente a la circunferencia.

Podemos verificar lo anterior evaluando el producto punto entre  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ :

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = x(t)v_x(t) + y(t)v_y(t) = 0 .$$

Como el producto punto de dos vectores no nulos vale cero sólo si los dos vectores son perpendiculares, se halla que la velocidad de una partícula en un movimiento circular uniforme es siempre perpendicular al radio.

Derivando la velocidad se encuentra la aceleración:

$$\vec{a}(t) = -R\omega_0^2 \cos(\phi_0 + \omega_0 t)\hat{x} - R\omega_0^2 \sin(\phi_0 + \omega_0 t)\hat{y} .$$

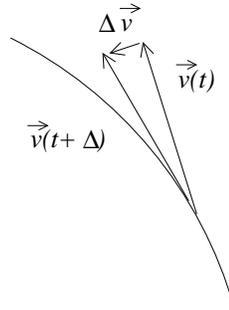
Note que en todo instante

$$\vec{a}(t) = -\omega_0^2 \vec{r}(t) ,$$

o sea, la aceleración siempre apunta hacia el origen (razón por la cual se llama *aceleración centrípeta*). La magnitud de la aceleración siempre es constante y vale

$$a = |\vec{a}(t)| = R\omega_0^2 .$$

Observemos que podríamos haber concluido desde un comienzo que la aceleración debía ser radial. En efecto, la aceleración es proporcional a la diferencia de velocidades entre dos instantes infinitamente cercanos,  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta)$ . Si la velocidad se debe mantener tangente al círculo, breves segundos de reflexión nos deberían convencer que el vector diferencia  $\Delta v(t) = \vec{v}(t + \Delta) - \vec{v}(t)$  debe ser puramente radial:



### 3.3 Coordenadas polares

#### Los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ .

Hemos visto que el movimiento de un punto  $P$  en el plano  $x, y$  se puede especificar usando dos funciones que describan sus coordenadas cartesianas del punto, o sea,

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} .$$

También podemos especificar el movimiento  $P$  usando coordenadas polares, es decir, dando las funciones  $r(t)$  y  $\theta(t)$ . Debería ser posible, por analogía a las coordenadas cartesianas, escribir el vector posición en la forma:

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r} + \theta(t) \hat{\theta} .$$

¿Qué son los vectores  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ ?

Al menos para  $\hat{r}$  es evidente cómo definirlo:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} ,$$

un vector unitario en la dirección radial (ver Fig. 3.14). De la misma figura podemos deducir que

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} .$$

¿Y  $\hat{\theta}$ ? Debería ser un vector perpendicular a  $\hat{r}$ , y por tanto tangente a la circunferencia de radio  $r$ . Existen dos direcciones perpendiculares, pero elegimos  $\hat{\theta}$  de modo que apunte en la dirección en que aumenta el ángulo  $\theta$ , como se indica en la Fig. 3.14. Nuevamente, podemos deducir de la figura que

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} .$$

**Ejercicio:** Demuestre que los vectores  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  efectivamente son unitarios. También demuestre que son *ortonormales*, es decir,  $\hat{r} \perp \hat{\theta}$ .

Observe que estos vectores unitarios generalmente (cuando  $\theta = \theta(t)$  depende del tiempo) son tiempo dependientes. El vector  $\hat{r}$  apunta en la dirección radial, mientras que el vector  $\hat{\theta}$  es tangencial al círculo que pasa por  $P$  y tiene su centro en el origen.

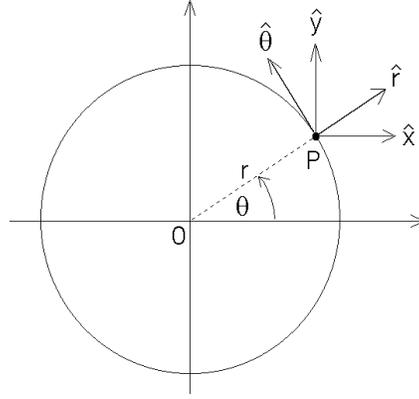


Figura 3.14

En principio, puede parecer incómodo el haber definido dos vectores unitarios que dependen del tiempo. Y no sólo que dependen del tiempo, sino que dependen de la posición de la propia partícula cuyo movimiento se intenta describir. Efectivamente, es menos sencillo trabajar en este sistema de coordenadas que en el sistema cartesiano, que es independiente del tiempo y de la partícula a observar. Pero nada, en principio, nos prohíbe trabajar en tal sistema, y de hecho encontraremos muchas situaciones en que es la mejor opción (a pesar de las apariencias).

Ya que los vectores unitarios varían con el tiempo, calculemos su derivada temporal. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\hat{r}} &= \frac{d}{dt} [ \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} ] \\ &= \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \hat{x} + \frac{d \sin \theta(t)}{dt} \hat{y} \\ &= -\sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{x} + \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{y} \\ &= \dot{\theta}(t) [ -\sin(\theta(t)) \hat{x} + \cos(\theta(t)) \hat{y} ] = \dot{\theta} \hat{\theta} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\hat{\theta}} &= \frac{d}{dt} [ -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} ] \\ &= -\frac{d \sin \theta(t)}{dt} \hat{x} + \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \hat{y} \\ &= -\cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{x} - \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{y} \\ &= -\dot{\theta}(t) [ \cos(\theta(t)) \hat{x} + \sin(\theta(t)) \hat{y} ] = -\dot{\theta} \hat{r} \end{aligned}$$

Resumen:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} \tag{3.1}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} . \quad (3.2)$$

Los resultados anteriores son completamente generales, y no dependen de que el movimiento sea uniforme, y ni siquiera circular. Notemos además que son completamente esperables. En efecto, de la Fig. 3.14 es evidente que si  $\hat{r}$  cambia, la única posibilidad es que la partícula cambie su ángulo  $\theta$ . Cambios en su coordenada  $r(t)$  mantienen el vector  $\hat{r}$  constante. Por lo tanto,  $\dot{\hat{r}}$  debía ser un vector paralelo a la dirección  $\hat{\theta}$ , y además proporcional a  $\dot{\theta}$  (de modo que si  $\theta$  es constante,  $\hat{r}$  también lo sea). Análogamente, si  $r(t)$  cambia ello no altera  $\dot{\hat{\theta}}$  en la Fig. 3.14. Nuevamente, la única manera de que  $\dot{\hat{\theta}}$  cambie es que  $\theta$  lo haga, de modo que  $\dot{\hat{\theta}}$  debe ser proporcional también a  $\dot{\theta}$ . Pero ahora, al cambiar el ángulo,  $\hat{\theta}$ , que es tangente a la circunferencia, cambia en dirección radial hacia el centro del círculo (la razón es la misma que la que hace que la aceleración en un movimiento circular uniforme sea centrípeta), y por tanto  $\dot{\hat{\theta}}$  debía ser proporcional a  $-\hat{r}$ .

### Movimiento circular (en coordenadas polares).

Estudiemos ahora el mismo problema anteriormente resuelto, de una partícula en movimiento circular, pero ahora en coordenadas polares.

Consideremos un punto  $P$  que se mueve entorno al origen sobre un círculo de radio  $R$  y sea  $\theta(t)$  el ángulo polar (medido respecto al eje  $\hat{x}$  y en el sentido contrario al avance del reloj). El vector posición del punto  $P$  es:

$$\vec{r}(t) = R \hat{r}(t) .$$

La velocidad es:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = R \dot{\hat{r}} = R \dot{\theta} \hat{\theta} ,$$

y la aceleración es:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) &= R \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \hat{\theta}) \\ &= R (\ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}}) \\ &= R \ddot{\theta} \hat{\theta} - R \dot{\theta}^2 \hat{r} \end{aligned}$$

En el caso particular en que el movimiento es uniforme, la *velocidad angular*  $\dot{\theta} \equiv \omega_0$  es constante. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R \hat{r} , \\ \vec{v} &= R \omega_0 \hat{\theta} , \\ \vec{a} &= -R \omega_0^2 \hat{r} . \end{aligned}$$

Estos resultados, por supuesto, son consistentes con los anteriormente obtenidos en coordenadas cartesianas. De hecho, es trivial recuperar todos los hechos que ya discutimos sobre el movimiento circular uniforme simplemente inspeccionando las igualdades anteriores: La distancia al origen es constante ( $|\vec{r}|$  es constante); la rapidez es constante e igual a  $|\vec{v}| = R\omega_0$ ; el módulo de la aceleración es constante e igual a  $|\vec{a}| = R\omega_0^2$ ; la velocidad es perpendicular a la posición en todo momento ( $\vec{r}$  es proporcional a  $\hat{r}$ , mientras que  $\vec{v}$  lo es a  $\hat{\theta}$ ); y la aceleración es centrípeta ( $\vec{a}$  tiene dirección  $-\hat{r}$ ).

Podemos apreciar, entonces, que la descripción del movimiento circular uniforme es considerablemente más sencilla en coordenadas polares, a pesar de que, al introducirlas, los vectores unitarios dependen del tiempo. Naturalmente, lo complejo del movimiento circular, que antes se traducía en tener que derivar funciones trigonométricas, ahora se traduce en tener que derivar los vectores unitarios. Ahí esta encapsulada la no trivialidad del movimiento. Pero una vez que sabemos cómo dependen  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  del tiempo, encontrar la posición, la velocidad y la aceleración es muy sencillo, y la interpretación es inmediata, no como en el caso de coordenadas cartesianas.

Notemos que si el movimiento ahora es no uniforme, sigue siendo cierto que la velocidad es perpendicular a la posición. Debe ser así, porque la velocidad es, por la propia definición de derivada, tangente a la trayectoria, de modo que si ésta es un círculo, la velocidad debe tener dirección  $\hat{\theta}$ . En cambio, la aceleración deja de ser puramente centrípeta. Además de una aceleración radial  $-R\dot{\theta}^2\hat{r}$ , aparece un término  $R\ddot{\theta}\hat{\theta}$ . Esta *aceleración tangencial* debía aparecer, puesto que un movimiento circular sólo puede ser no uniforme si el ángulo no varía linealmente con el tiempo, en cuyo caso  $\ddot{\theta} \neq 0$ , y si dicha aceleración es precisamente en la dirección angular,  $\hat{\theta}$ . La aceleración, así, tiene dos términos, uno radial, que se encarga de que el cuerpo se mueva en un círculo, y uno tangencial, que cambia la velocidad con la cual se recorre el círculo.

### 3.4 Problemas

1. Sean  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  los vectores  $\vec{A} = 2\hat{x} + \hat{y}$ ,  $\vec{B} = 3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$  y  $\vec{C} = \hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$ .

- Encuentre el módulo de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ .
- Encuentre el módulo del vector suma, o sea, evalúe

$$D = |\vec{D}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| .$$

- ¿Cuál vector es más largo:  $\vec{A} + \vec{B}$  o  $\vec{A} + \vec{C}$ ? En vista de lo calculado en la parte a), ¿le sorprende este resultado?
- Encuentre el ángulo entre los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ .

Respuesta: d)  $49,86^\circ$ .

2. Demuestre que los vectores:

$$\vec{A} = \cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{y}$$

$$\vec{B} = \cos(\beta)\hat{x} + \sin(\beta)\hat{y}$$

son vectores unitarios que forman un ángulo  $\alpha$  y  $\beta$  con el eje  $\hat{x}$ , respectivamente. Evalúe  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  y encuentre una fórmula para  $\cos(\alpha - \beta)$ .

3. Considere los tres puntos cuyas coordenadas cartesianas vienen dadas por:  $P_1 = (1, 1, 1)$ ,  $P_2 = (1, 2, 0)$  y  $P_3 = (2, 3, 1)$ . Demuestre que ellos definen los vértices de un triángulo rectángulo.
4. Encuentre un vector unitario  $\hat{A}$  que sea simultáneamente perpendicular a los vectores  $\vec{u} = 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$  y  $\vec{v} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$ . ¿Cuántos vectores unitarios  $\hat{A}$  existen con esta propiedad?

5. Definamos los vectores:

$$\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$$

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + \hat{y})$$

- (a) Grafique  $\vec{s}$  y  $\vec{t}$ .
- (b) Evalúe  $s = |\vec{s}|$  y  $t = |\vec{t}|$ .
- (c) Encuentre el ángulo entre  $\vec{s}$  y  $\vec{t}$ .

Comentario: Note que  $\vec{s}$  y  $\vec{t}$  pueden considerarse como un nuevo conjunto de ejes de referencia  $(\hat{s}, \hat{t})$ . Para indicar que  $\vec{s}$  y  $\vec{t}$  son vectores unitarios se ha usado la convención de reemplazar las flechas por tongos.

- (d) Considere los vectores  $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y}$  y  $\vec{B} = 2\hat{x} - 3\hat{y}$ . Exprese estos vectores en términos de los nuevos vectores unitarios, es decir, escriba  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de la forma

$$\vec{A} = a_s\hat{s} + a_t\hat{t}$$

$$\vec{B} = b_s\hat{s} + b_t\hat{t}$$

y evalúe las constantes  $a_s$ ,  $a_t$ ,  $b_s$  y  $b_t$ .

- (e) Evalúe  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  de dos maneras distintas: primero usando las componentes respecto al sistema de referencia  $(\hat{x}, \hat{y})$  y luego usando las componentes respecto al sistema de referencia  $(\hat{s}, \hat{t})$ .

6. Sea  $\vec{A} = \hat{x} + 3\hat{z} - 2\hat{y}$ . Encuentre un vector  $\vec{B}$  en el plano  $\hat{x}, \hat{y}$  que sea perpendicular a  $\vec{A}$ .

Respuesta:  $\vec{B} = \alpha (2\hat{x} + \hat{y})$ , donde  $\alpha$  es un número real no nulo.

7. Considere la siguiente situación en nuestro espacio físico de tres dimensiones: Desde cierto origen emergen cuatro vectores de igual tamaño, de manera que los ángulos entre cualquier par de vectores sean iguales. Encuentre el valor de ese ángulo. (Para resolver este problema relaciónelo con el de las diagonales de un cubo considerado en la sección 3.1.)

Comentario: Las “puntas” de los cuatro vectores forman los vértices de un tetraedro regular. La molécula de metano  $\text{CH}_4$  es un ejemplo de lo arriba planteado. En tal molécula el átomo de carbono se encuentra al centro de los cuatro átomos de hidrógeno que están distribuidos de la manera más regular posible.

8. Encuentre el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de largo, si el vector suma forma un ángulo de  $50^\circ$  con el mayor de ellos. Encuentre también la magnitud del vector suma.
9. La suma de dos vectores mide 30 unidades y forma ángulos de  $25^\circ$  y  $50^\circ$  con ellos. ¿Cuál es la magnitud de cada uno de los vectores?
10. Suponga que la posición  $\vec{r}$  de una partícula en función del tiempo  $t$  viene dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r_0 \left( \cos \left( \frac{t}{t_0} \right) \hat{x} + \sin \left( \frac{t}{t_0} \right) \hat{y} \right),$$

con  $t_0 = 1$  min y  $r_0 = 3$  cm. ¿Qué trayectoria recorre la partícula? ¿Cuánto tiempo tarda la partícula en volver al punto de partida?

11. Supongamos que la posición  $\vec{r}$  de una partícula en función del tiempo  $t$  viene dada por

$$\vec{r} = at\hat{x} + (b - ct^2)\hat{y},$$

con  $a = 2$  m/s,  $b = 10$  m y  $c = 9.8$  m/s<sup>2</sup>. Grafique la trayectoria. ¿Qué tipo de trayectoria es? ¿En qué instante la partícula cruza el eje  $\hat{x}$ ?

12. Un barco a vapor se dirige hacia el sur con una velocidad  $v_b = 25$  km/h en un área donde sopla un viento desde el suroeste con velocidad  $v_0 = 18$  km/h. Encuentre el ángulo  $\theta_0$  que forma el humo emitido por el vapor con la dirección norte-sur (ver figura 3.15).

Respuesta:  $\theta_0 \simeq 18,64^\circ$

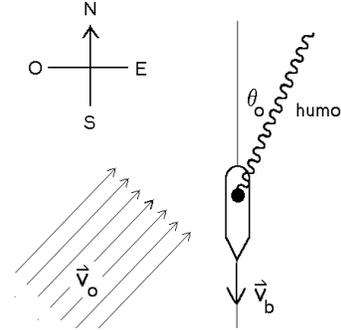


Figura 3.15

13. Considere un disco de radio  $R = 50$  cm que rueda sobre una recta (el eje  $\hat{x}$ ) con una velocidad angular  $\omega = 2$  s<sup>-1</sup>. Considere un punto  $P$  ubicado en el perímetro del disco, y designe por  $\vec{r}$  al vector que va desde el origen hacia el punto  $P$ . Encuentre una expresión para  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ; suponga que en el instante  $t = 0$  el punto  $P$  está en el origen.

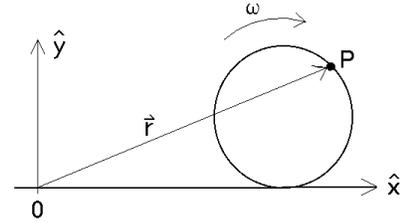


Figura 3.16

Haga un gráfico de  $\vec{r}(t)$  para el intervalo  $t \in [0\text{ s}, 10\text{ s}]$ . ¿Cuánto tarda la rueda en dar una vuelta completa?

14. Una partícula recorre una trayectoria circular en el plano  $x$ - $y$ , cuyo radio es  $R = 5$  m con una velocidad constante  $v_0 = 15$  m/s y en el sentido del reloj. Encuentre el vector posición  $\vec{r}(t)$ , el vector velocidad  $\vec{v}(t)$  y el vector aceleración  $\vec{a}(t)$  (en coordenadas cartesianas) si en el instante  $t = 0$  la partícula se encuentra en  $\vec{r}_0 = -5\hat{y}$ .

15. Considere un disco de radio  $R$  en el plano  $x$ - $y$ . Sea  $\theta$  el ángulo de un punto ubicado en el borde del disco respecto al eje  $\hat{x}$ . Suponga que el disco gira con una *aceleración angular* constante  $\alpha_0$  (es decir,  $\ddot{\theta}(t) = \alpha_0$ ). Encuentre la velocidad y aceleración de  $P$  en función del tiempo. Suponga que en el instante  $t = 0$  el punto  $P$  se encontraba en reposo sobre el eje  $\hat{x}$ .

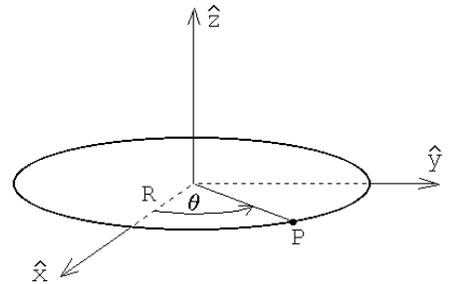


Figura 3.17

16. Estime (en m/s y km/h) la velocidad máxima con la que usted puede lanzar

una piedra.

17. Una pelota sale rodando del descanso de una escalera con velocidad horizontal  $v_0 = 1.52$  m/s. Los escalones son de 20 cm de alto y 20 cm de ancho. ¿Cuál será el primer escalón al que llegue la pelota? Dibuje una figura para ilustrar el problema.

18. Un cañón se encuentra a una distancia  $D$  de un edificio. Encuentre el ángulo de elevación  $\theta_0$  y la velocidad  $v_0$  de la bala de manera que el proyectil entre horizontalmente por la ventana que se encuentra a una altura  $h$  (ver figura 3.18).

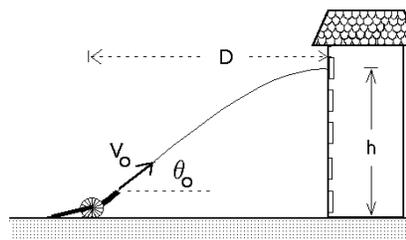


Figura 3.18

19. Considere un río de ancho  $L$  en el cual el agua fluye con velocidad  $v_0$ . Un nadador recorre el trayecto  $A \rightarrow B \rightarrow A$ , mientras que un segundo nada el trayecto  $C \rightarrow D \rightarrow C$  (ver figura 3.19). Los puntos  $C$  y  $D$  están anclados fijamente al fondo del río y la separación entre  $C$  y  $D$  es la misma que entre  $A$  y  $B$ . Si ambos nadan con la misma velocidad  $v$  respecto al agua, ¿quién ganará la carrera?

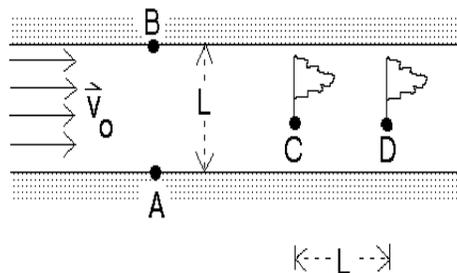


Figura 3.19

20. Un pato vuela horizontalmente en línea recta con velocidad  $v_p$  a una altura  $h$ . Un niño con una honda, que puede disparar piedras con una velocidad  $v_0$ , hace uso de su arma en el instante que el pato lo sobrevuela.

(a) ¿Cuál es el ángulo respecto a la normal con el cual debe disparar la piedra?

(b) ¿Qué distancia  $d$  alcanza a recorrer el pato antes de ser alcanzado por el proyectil?

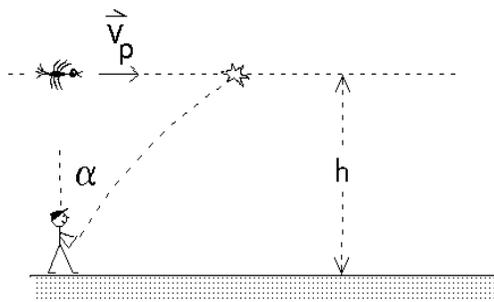


Figura 3.20

- (c) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener el proyectil para que éste llegue al pato?

21. Se lanza un proyectil con cierto ángulo de elevación  $\theta_0$ . El alcance del proyectil es  $R$  (ver figura 3.21). Si se desprecia el roce con el aire, demuestre que la trayectoria viene dada por la ecuación

$$y(x) = -\left(\frac{\tan \theta_0}{R}\right)x^2 + x \tan \theta_0 .$$

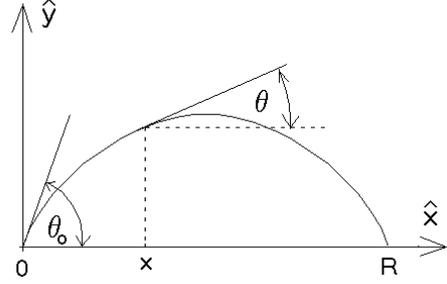


Figura 3.21

Note que esta ecuación corresponde a una parábola. Demuestre también que el ángulo de la tangente en el punto  $x$  viene implícitamente dado por

$$\tan \theta = \left[1 - \frac{2x}{R}\right] \tan \theta_0 .$$

22. Grafique en papel polar la trayectoria de una partícula si su posición en coordenadas polares, en función del tiempo, viene dada por:

(a) 
$$\begin{cases} r(t) = r_0 \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con  $r_0 = 1$  [m] y  $t_0 = 2\pi$  [s].

(b) 
$$\begin{cases} r(t) = At \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con  $A = 1/(4\pi)$  [m/s] y  $t_0 = 2\pi$  [s].

(c) 
$$\begin{cases} r(t) = r_0 + B \cos(t/2t_0) \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con  $r_0 = 1$  [m],  $t_0 = 2\pi$  [s] y  $B = 0.5$  [m].

23. Una partícula se encuentra en el instante  $t = 0$  en el lugar  $\vec{r}(0) = 10\hat{y}$  cm y tiene una velocidad  $\vec{v}(0) = 2\hat{x}$  cm/s. La aceleración en todo instante es

$$\vec{a} = -G \frac{\vec{r}}{r^3} ,$$

con  $G=200$  cm/s<sup>2</sup>. Encuentre numéricamente la trayectoria de la partícula para  $t \in [0, 3.5$  s]. ¡Grafique!

Indicación: programe las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + \Delta) &\simeq \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta \\ \vec{v}(t + \Delta) &\simeq \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \Delta \\ \vec{a}(t + \Delta) &= -G\vec{r}(t + \Delta)/r^3(t + \Delta).\end{aligned}$$

24. Calcule la máxima distancia  $\Delta$  que un objeto puede alejarse del borde de un “peldaño” para evitar ser alcanzado por los objetos lanzados con velocidad  $v_0$  desde el punto A. La distancia desde A al borde del peldaño es  $L$  y la altura de éste es  $H$ .

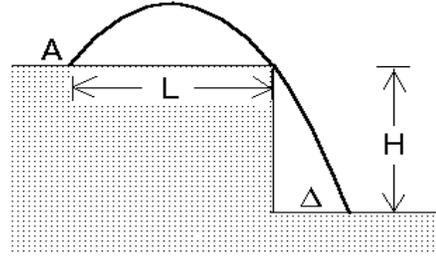


Figura 3.22

25. Un proyectil se lanza con velocidad inicial  $v_0$  y ángulo de lanzamiento  $\theta$ , ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de ancho  $a$  conocido, pero altura  $h$  desconocida, rozando sus dos vértices A y B (ver figura 3.23). Encuentre la distancia  $d$  que separa el punto de lanzamiento con la pared más cercana al obstáculo. También encuentre la altura  $h$  de la barrera.

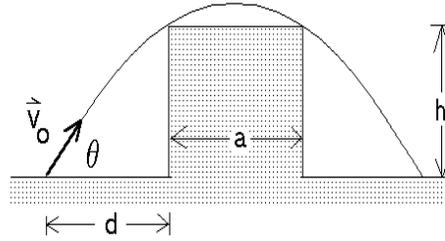


Figura 3.23

26. Una partícula tiene un vector posición dado por  $\vec{r} = 30 \cdot t \hat{x} + (40 \cdot t - 5 t^2) \hat{y}$ , donde  $r$  está en metros y  $t$  en segundos. Encuentre los vectores velocidad y aceleración instantáneas.
27. Desde una distancia  $d$  del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura  $h$  y un largo  $b$ , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

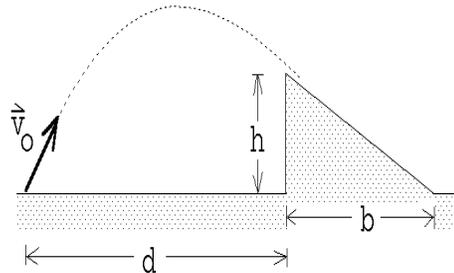


Figura 3.24

Respuesta:

$$\vec{v} = d \sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}} \hat{x} + (2b+d) \sqrt{\frac{hg}{2b(b+d)}} \hat{z} .$$

28. Supongamos que  $r(t)$  y  $\theta(t)$  son las coordenadas polares de un punto que se mueve en un plano. Demuestre que la velocidad de tal punto, en coordenadas cartesianas, viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left[ \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right] \hat{x} + \left[ \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right] \hat{y} \\ &= \left[ \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \right] \hat{x} + \left[ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \right] \hat{y} . \end{aligned}$$

Encuentre la velocidad en coordenadas cartesianas para los tres casos del problema 22.

29. Una partícula tiene aceleración constante

$$\vec{a} = (6 \cdot \hat{x} + 4 \cdot \hat{y})[\text{m/s}^2] .$$

En  $t = 0$  la velocidad es cero y el vector posición es  $\vec{x}_0 = 10 \cdot \hat{x}$  [m].

- Encuentre los vectores velocidad y posición en un instante  $t$  cualquiera.
  - Encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano y dibújela.
30. De un cañón se disparan dos proyectiles: el primero con un ángulo de elevación  $\theta_1 = 60^\circ$  y el segundo con un ángulo de elevación  $\theta_2 = 45^\circ$ . La velocidad de los proyectiles, al emerger del cañón es  $v_0 = 250$  m/s. Despreciando la resistencia del aire, encuentre el intervalo de tiempo entre los dos disparos que asegure que los proyectiles choquen.

31. La figura indica la conexión en una caja de cambios de un automóvil. Encuentre la razón entre los radios de ambos engranajes, que es la misma para ambos pares, si uno desea que en la primera marcha, con el motor a 2000 RPM, el auto tenga una velocidad de 30 Km/h. Por cada cinco vueltas en la salida de la caja de cambios, las ruedas, cuyo radio es de 50 cm, dan una vuelta.

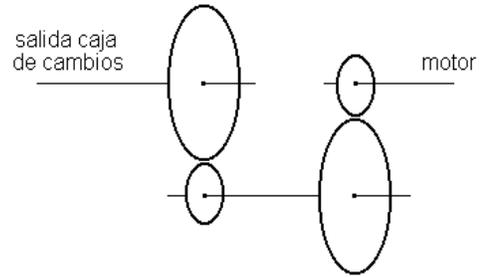


Figura 3.25

32. Consideremos una turbina hidráulica. Supongamos que el agua ingresa a la turbina con una velocidad  $\vec{v}$ , con  $v = |\vec{v}| = 15$  m/s, formando un ángulo con la tangente al rotor en el punto de entrada  $\alpha = 30^\circ$  (ver figura 3.26). Suponga además que el radio externo del rotor es  $R = 2$  m y que, en su estado estacionario, el rotor gira a 30 RPM (o sea, con frecuencia  $\nu = 0,5$  s $^{-1}$ ). La forma de las paletas de un rotor de una turbina hidráulica es tal que la velocidad relativa entre el agua que ingresa a la turbina y la paleta en el punto de entrada, sea tangente a la paleta (de esta manera el agua ingresa a la turbina sin choques).

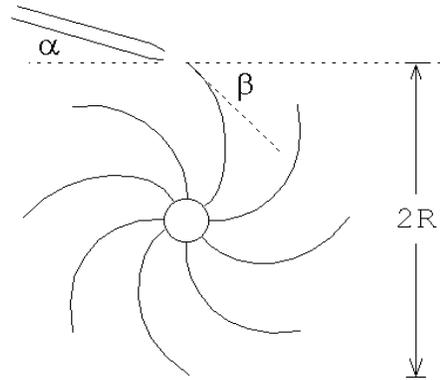


Figura 3.26

Determine el ángulo  $\beta$  entre la paleta del rotor y la tangente al rotor en el punto de entrada de agua. Encuentre también la velocidad relativa  $v_r$  del agua (respecto a la paleta) en ese punto.

Respuesta: 
$$\tan \beta = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - 2\pi R\nu} ; \quad v_r = 10,06 \text{ [m/s]} .$$

33. Una partícula se mueve en el plano  $x$ - $y$  con una velocidad (que depende de la posición)  $\vec{v} = a\hat{x} + bx\hat{y}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen ( $x(0) = y(0) = 0$ ). Encuentre la ecuación de la trayectoria  $y(x)$ .

Respuesta: 
$$y(x) = \frac{b}{2a}x^2 .$$

34. Un mono está colgado a una altura  $h$  de un árbol. Un cazador apunta con una cerbatana directamente al mono desde una distancia  $d$  (ver figura 3.27). En el mismo instante en que el cazador sopla el dardo envenenado el mono se suelta del árbol. ¿Sobrevivirá el mono? (Desprecie el efecto de fricción del dardo con el aire)

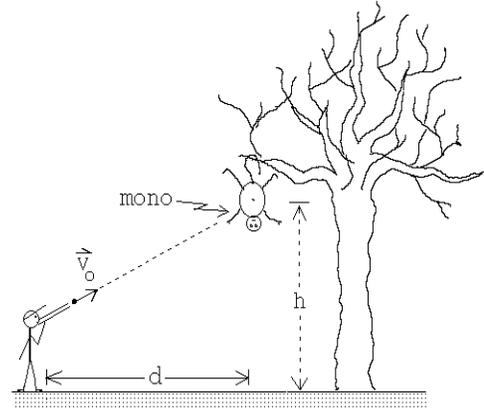


Figura 3.27

35. Una rueda gira en torno a un eje horizontal a  $30 \text{ rpm}$  ( $1 \text{ rpm} =$  una revolución por minuto  $= 1$  vuelta por minuto), de manera que su parte inferior queda a nivel del suelo, pero sin rozarlo. (O sea, la rueda gira sin rodar).

Sobre el borde de la rueda se han adosado dos piedrecitas, en posiciones diametralmente opuestas.

- (a) Suponga que cuando el diámetro que une a las piedras pasa por la posición horizontal, éstas se desprenden del borde, en forma simultánea (figura 3.28a), y una de ellas llega al suelo antes que la otra. Se observa que durante el intervalo de tiempo entre la llegada al suelo de una y otra piedra, la rueda da una vuelta completa. Determine el radio de la rueda.
- (b) ¿Qué ángulo  $\alpha$  debe formar la línea que une a ambas piedras con la vertical para que, si las piedras se desprenden en esa posición, lleguen al suelo al mismo tiempo?

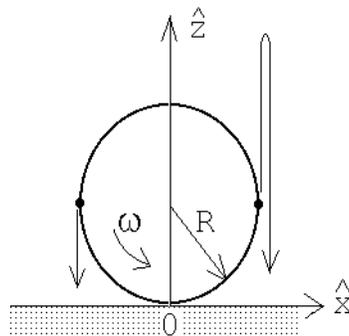


Figura 3.28a

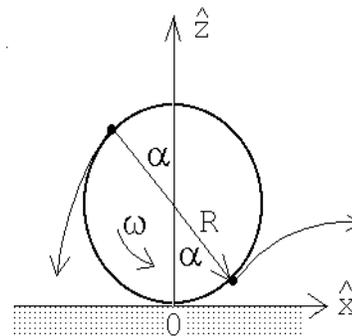


Figura 3.28b

36. Un globo sonda es soltado desde la tierra y se aleja con velocidad constante en trayectoria recta la cual forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical. La velocidad del viento con respecto al suelo es de  $10 \text{ [km/h]}$ , estable, hacia el norte.

- (a) Calcule la velocidad del globo respecto al aire.  
 (b) Calcule el tiempo que tarda el globo en alcanzar una altura de  $1 \text{ km}$  con respecto al suelo.

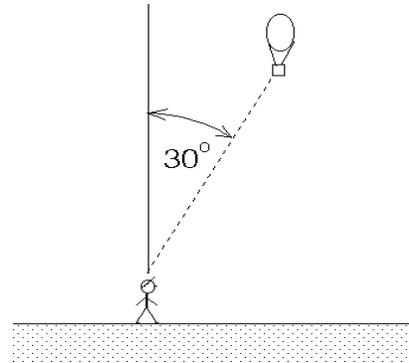


Figura 3.29

37. \* Una rueda de radio  $0,25 \text{ [m]}$  ha estado girando en forma uniforme a razón de una revolución por segundo. En cierto instante la rueda es frenada y se detiene, uniformemente, después de haber girado media vuelta. Calcule la aceleración tangencial y centrípeta de un punto fijo en el borde de la rueda cuando ésta comienza a ser frenada.

38. Dos proyectiles son lanzados simultáneamente desde el mismo punto en un plano horizontal. Los proyectiles son lanzados con igual rapidez y con ángulos con respecto a la horizontal  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente ( $\alpha < \beta$ ). Ambos proyectiles llegan al mismo punto en la horizontal pero a instantes diferentes. Demuestre que lo descrito es posible y encuentre la razón entre los tiempos de llegada. (Expresar el resultado en términos de  $\alpha$ ).

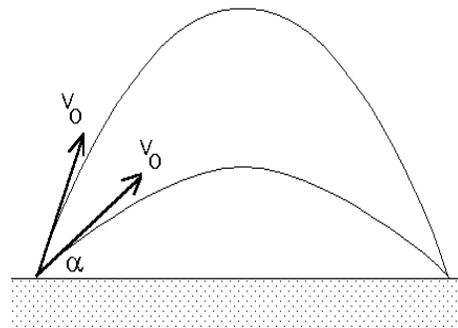


Figura 3.30

39. Un proyectil es lanzado desde un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación con la horizontal es  $\alpha$ . Si el proyectil es lanzado con rapidez  $v_0$  y con un ángulo de eyección  $\beta$  con respecto al plano (ver figura 3.31), calcule el alcance  $D$  del proyectil a lo largo del plano.

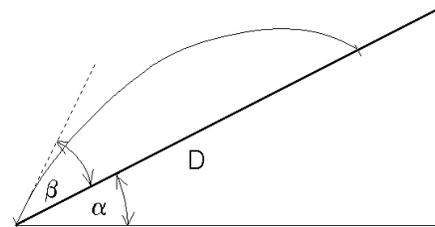


Figura 3.31

40. El *avix*, una apetitosa ave del tiempo de las cavernas, desarrolló por un proceso de evolución, una coraza en la parte inferior de su cuerpo de manera que los trogloditas no podían cazarlas con arcos y flechas.

Ogú, un ingenioso troglodita, desarrolló un método para cazarla aprovechando que el ave no tiene coraza sobre el dorso. El disparaba flechas que impactarían al *avix* por arriba.

Dados la velocidad del ave  $v_{ave}$ , la altura  $h$  a la que vuela, la velocidad  $v_0$  con que la flecha es impulsada por el arco y el ángulo  $\theta$  (respecto a la horizontal) con que el troglodita dispara la flecha, calcular:

- El tiempo que le toma a la flecha pasar por la altura  $h$  la segunda vez.
- El valor de la distancia  $d$  entre el ave y la vertical por el punto de lanzamiento, en el instante del lanzamiento, para que la flecha impacte al ave.

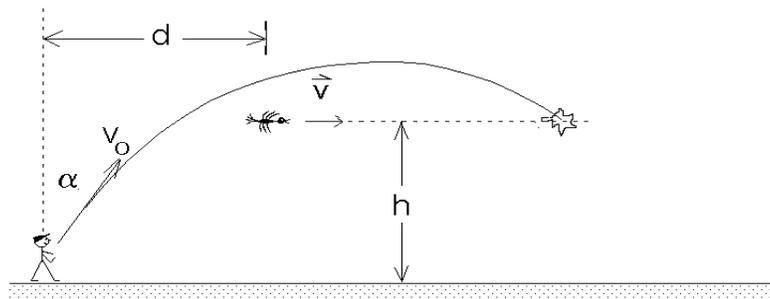


Figura 3.32

41. Se lanzan dos proyectiles  $A$  y  $B$  de modo que tienen igual alcance horizontal  $L$ .  $A$  se lanza horizontalmente desde una altura  $h$ , que es igual a la altura máxima que alcanza  $B$  durante su vuelo (ver figura 3.33)

- Calcule la razón entre los tiempos de vuelo de  $A$  y  $B$ .
- Calcule la razón entre las componentes horizontales de la velocidad de los proyectiles.
- ¿Cuál es la rapidez (magnitud de la velocidad) de cada uno de ellos al llegar al suelo?

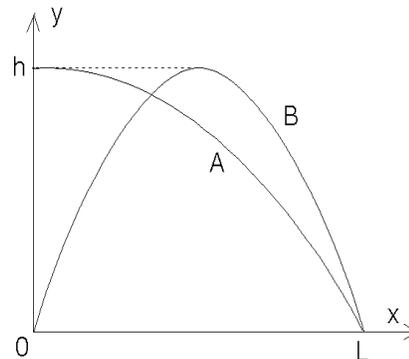


Figura 3.33

### 3.5 Solución a algunos de los problemas

#### Solución al problema 18.

Coloquemos el origen en el lugar en que está ubicado el cañón y sean  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$  los ejes horizontal y vertical, respectivamente. La posición de la bala (siendo  $t = 0$  el instante del disparo) vendrá dada por las coordenadas

$$x(t) = v_0 \cos \theta_0 t$$

y

$$z(t) = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

La componente vertical de la velocidad de la bala será

$$v_z(t) = v_0 \sin \theta_0 - gt .$$

Sea  $t^*$  el instante en que la bala penetra por la ventana. En ese instante deben cumplirse las relaciones

$$v_0 \cos \theta_0 t^* = D$$

y

$$v_0 \sin \theta_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = h .$$

La condición de que la bala penetre en forma horizontal por la ventana exige que en  $t^*$  la velocidad vertical de la bala sea nula. O sea, además de las dos relaciones anteriores, debe cumplirse que

$$v_0 \sin \theta_0 - gt^* = 0 .$$

Despejando  $t^*$  de la última relación y reemplazándola en las dos anteriores se obtiene

$$v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = Dg \tag{1}$$

y

$$v_0^2 \sin^2 \theta_0 = 2hg . \tag{2}$$

Dividiendo la última por la antepenúltima se encuentra

$$\tan \theta_0 = \frac{2h}{D} .$$

Esta relación permite encontrar el ángulo de elevación del disparo  $\theta_0$ . Para determinar el valor de  $v_0$  elevamos al cuadrado la ecuación (1):

$$v_0^4 \sin^2 \theta_0 (1 - \sin^2 \theta_0) = D^2 g^2 .$$

Despejando  $\sin^2 \theta_0$  de (2), sustituyéndolo en la última ecuación se encuentra para  $v_0$  la expresión

$$v_0^2 = \frac{(D^2 + 4h^2)g}{2h} .$$

**Solución al problema 30.**

Sea  $x-y$  el plano en que se mueven los proyectiles,  $\hat{z}$  el eje que apunta hacia arriba y coloquemos el origen en el lugar en que se encuentra el cañón.

Sea  $t$  el tiempo transcurrido desde el disparo de la bala # 1. La posición de esa bala viene dada por

$$\begin{cases} z_1(t) &= v_0 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_1(t) &= v_0 \cos \theta_1 t . \end{cases}$$

Sea  $t'$  el tiempo transcurrido desde el disparo de la bala # 2. La posición de la segunda bala viene, análogamente, dada por

$$\begin{cases} z_2(t') &= v_0 \sin \theta_2 t' - \frac{1}{2}gt'^2 \\ x_2(t') &= v_0 \cos \theta_2 t' . \end{cases}$$

Para que las balas choquen deben coincidir las dos coordenadas de ambas balas, o sea, debe cumplirse

$$\cos \theta_1 t = \cos \theta_2 t' \quad (3.3)$$

y

$$v_0 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta_2 t' - \frac{1}{2}gt'^2 . \quad (3.4)$$

Despejando  $t'$  de la primera de estas ecuaciones y reemplazándola en la segunda se obtiene

$$v_0 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta_2 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} t - \frac{1}{2}g \frac{\cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2} t^2 .$$

Luego dividimos por  $t$ , multiplicamos por  $\cos \theta_2$  y reordenamos los términos:

$$v_0 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1) = \frac{gt}{2 \cos \theta_2} (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1) . \quad (3.5)$$

Sea  $\Delta t$  el tiempo entre ambos disparos. Se tiene entonces que  $t' = t - \Delta t$ . Sustituyendo esto en (5.6) se encuentra que

$$t = \left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_2 - \cos \theta_1} \right) \Delta t . \quad (3.6)$$

Sustituyendo esta relación a su vez en (5.9), se obtiene:

$$v_0 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1) = \frac{g}{2} \frac{(\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1)}{\cos \theta_2 - \cos \theta_1} \Delta t ,$$

o sea,

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} \simeq 11 \text{ s} .$$

**Solución al problema 33.**

Sea  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$  la posición de la partícula. Derivando respecto al tiempo se encuentra su velocidad:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y}.$$

Por otra parte, de acuerdo al enunciado, sabemos que

$$\vec{v}(t) = a\hat{x} + bx(t)\hat{y}.$$

Igualando ambas expresiones, componente a componente, obtenemos

$$\dot{x}(t) = a$$

y

$$\dot{y}(t) = bx(t).$$

La primera de estas expresiones indica que, para la componente a lo largo del eje  $\hat{x}$ , el movimiento es uniforme, o sea,

$$x(t) = x(0) + at.$$

Pero, de acuerdo al enunciado,  $x(0) = 0$ , luego  $x(t) = at$ . Sustituyendo esto en la ecuación para  $\dot{y}(t)$  se encuentra

$$\dot{y}(t) = bat.$$

De aquí se deduce que el movimiento a lo largo del eje  $\hat{y}$  es uniformemente acelerado, luego

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{2}bat^2 = \frac{1}{2}bat^2.$$

De esta manera hemos encontrado que las coordenadas  $x$  e  $y$  de la partícula, en función del tiempo, vienen dadas por

$$x = at$$

$$y = \frac{ab}{2}t^2.$$

Despejando  $t$  de la primera de estas ecuaciones y reemplazándolo en la segunda, se obtiene finalmente la ecuación de la trayectoria

$$y = y(x) = \frac{b}{2a}x^2.$$

**Solución al problema 36.**

a) Sea  $v_0$  la velocidad del globo respecto a un observador fijo en la Tierra. La velocidad vertical y horizontal serán

$$v_z = v_0 \cos 30^\circ = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2}$$

y

$$v_x = v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2} ,$$

respectivamente. La componente horizontal de la velocidad del globo debe coincidir con la del viento, o sea,  $v_x = v_0/2 = v_v$ . De aquí se deduce que  $v_0 = 2v_v = 20$  km/h.

La componente vertical de la velocidad del globo es precisamente la velocidad con que éste se mueve respecto al aire (su movimiento horizontal se debe al viento). Esta velocidad vertical viene dada por  $v_z = v_0 \sqrt{3}/2 = 17,3\dots$  km/h.

b) Conociendo  $v_z$  es fácil evaluar el tiempo  $t^*$  que demora el globo en alcanzar una altura de  $h = 1$  km. Este viene dado por

$$t^* = \frac{h}{v_z} \simeq \frac{1}{17,3} \quad [\text{h}] \simeq 3,46 \quad [\text{minutos}] .$$

**Solución al problema 37.**

Sea  $\omega_0$  la velocidad angular de la rueda antes de ser frenada:  $\omega_0 = 2\pi \text{ s}^{-1}$ . Sea  $\alpha$  la aceleración angular que sufre la rueda al ser frenada. Si  $t = 0$  es el instante en que se aplica el freno, se tiene que la velocidad angular vendrá dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t ,$$

mientras que el ángulo que rotará la rueda será

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 .$$

Sea  $t^*$  el tiempo que tarda la rueda en quedar en reposo. De acuerdo al enunciado del problema, debe cumplirse que  $\omega(t^*) = 0$  y  $\theta(t^*) = \pi$ , o sea,

$$\pi = \omega_0 t^* + \frac{1}{2} \alpha t^{*2} \quad \text{y} \quad \omega_0 + \alpha t^* = 0 .$$

De estas ecuaciones podemos despejar  $t^*$  y  $\alpha$ . En particular para la aceleración angular se obtiene

$$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\pi} = -2\pi \quad [\text{s}^{-2}] .$$

La magnitud de la aceleración tangencial y centrípeta (ver sección 3.3) vienen dadas por  $a_t = R\alpha$  y  $a_c = -R\omega^2$ . Usando estas expresiones con  $R = 0,25$  [m] y  $\omega = \omega_0 = 2\pi \text{ s}^{-1}$  se encuentra que la aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto fijo en el borde de la rueda, cuando ésta comienza a ser frenada, son  $a_t = -1,57$  [m/s<sup>2</sup>] y  $a_c = 9,87$  [m/s<sup>2</sup>].

**Solución al problema 41.**

a) Lo que  $A$  tarda en llegar hasta el suelo es igual a lo que demora  $B$  desde su punto máximo (ambos ahí tienen una velocidad vertical nula).  $B$  demora lo mismo en subir que en bajar, luego la razón entre los tiempos de vuelo de  $A$  y  $B$  es

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{2}.$$

b) La velocidad horizontal de ambos proyectiles es constante. Ambos recorren la misma distancia horizontal y como  $B$  para ello demora el doble que  $A$ , se deduce que la velocidad horizontal de  $B$  debe ser la mitad de la de  $A$ .

c) La velocidad vertical con que  $A$  y  $B$  llegan al suelo es la misma (la de una caída libre de una altura  $h$ ). Esta es  $v_v = \sqrt{2gh}$ . El tiempo de caída de  $A$  es  $t^* = \sqrt{(2h/g)}$ . En ese tiempo  $A$  avanza en dirección horizontal una distancia horizontal  $L$ . Como la velocidad horizontal es uniforme se deduce que ésta (para la partícula  $A$ ) debe ser  $v_h = L/t^* = L\sqrt{g/(2h)}$ . La rapidez de  $A$  cuando llega al suelo es, por lo tanto,

$$|\vec{v}_A(t^*)| = \sqrt{v_v^2 + v_h^2} = \sqrt{2gh + \frac{L^2g}{2h}}.$$

Para la partícula  $B$  la componente vertical de la velocidad es la misma, mientras que la componente horizontal es la mitad de la de  $A$ , o sea,

$$|\vec{v}_B(t^*)| = \sqrt{v_v^2 + (v_h/2)^2} = \sqrt{2gh + \frac{L^2g}{8h}}.$$

## Capítulo 4

# Las leyes de Newton

versión 4 junio 2008

Hasta el momento, sólo nos hemos preocupado de *describir* el movimiento. Ahora que tenemos las herramientas adecuadas para ello, podemos ocuparnos del problema siguiente, que es estudiar las *causas* del movimiento, es decir, estudiaremos la *dinámica* del movimiento.

En principio, es sencillo: basta con enunciar las así llamadas tres *Leyes de Newton*. Sin embargo, en realidad no es tan simple, y de hecho dedicaremos este capítulo, y prácticamente todo el resto de este curso, a analizar sus consecuencias. El resultado, es decir, la descripción de la Naturaleza basada en las leyes de Newton, se denomina *Mecánica Clásica*. En estricto rigor, es posible hacer ciertas objeciones desde el punto de vista lógico a estudiar la mecánica partiendo de las leyes de Newton. Existen alternativas a esta formulación de la mecánica clásica, pero son más abstractas y por ende no tan adecuadas para un primer curso de Mecánica. Además, esta forma de proceder corresponde mejor al desarrollo histórico de la Física

Pero antes incluso de enunciar las famosas leyes de Newton, debemos discutir algunos conceptos preliminares.

### 4.1 Espacio y tiempo

En la *Mecánica Newtoniana* se supone que las partículas, como también los observadores, “viven” en un espacio *euclidiano tridimensional*. Que sea tridimensional no es una suposición realmente sorprendente, ya que nuestra experiencia avala que, para determinar únicamente la posición de una partícula, necesitamos tres coordenadas. Por su parte, que sea euclidiano significa que se cumplen los cinco postulados de Euclides. En particular, el quinto postulado. Éste indica que por un punto externo

a una recta pasa sólo una recta paralela a la recta original<sup>1</sup> Estos cinco postulados determinan completamente lo que se denomina Geometría Euclidiana, que es la que estudiaron los griegos naturalmente, y que nos parece completamente natural en la vida cotidiana. Por ejemplo, a partir de estos postulados (¡y en particular el quinto!) es posible demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre  $180^\circ$ . Otra característica de un espacio euclidiano es, por ejemplo, que la suma de dos vectores de desplazamiento es conmutativa.

Es interesante notar que es posible considerar también espacios no euclidianos. Un ejemplo es la superficie de una esfera. Sobre una esfera es imposible trazar “una recta”, en el sentido tradicional. Podemos salvar este punto notando que una recta, en el espacio euclidiano, es el camino de menor longitud entre dos puntos dados. Si usamos ese hecho para definir una “recta”, entonces sí podemos trazar “rectas” sobre una esfera: el camino de menor distancia entre dos puntos dados corresponde en tal caso a los *meridianos* (técnicamente, para una superficie cualquiera se dice que el camino de menor longitud entre dos puntos dados es una *geodésica*). Y ahora nos preguntamos: ¿es posible trazar, por un punto externo a un meridiano dado, otro meridiano paralelo (es decir, que no se cruce con el otro meridiano en ningún punto)? La respuesta es no, y sabemos por qué: los dos meridianos se encontrarán invariablemente en los polos. Vemos que, sobre una esfera, el quinto postulado de Euclides no se cumple: no es posible trazar ninguna “recta” paralela a una recta dada. A pesar de ello, es posible construir una geometría completamente consistente desde el punto de vista matemático, sólo que el espacio resultante es no euclidiano. Este caso fue estudiado por Riemann. En un espacio de Riemann se presentan varias situaciones curiosas. Por ejemplo, al viajar en línea “recta” en ese espacio, en algún instante uno vuelve al punto de partida. Además, la suma de los ángulos interiores de un triángulo dibujado sobre tal esfera es mayor a  $180^\circ$  y también la suma de dos vectores es no conmutativa.

También es posible violar el quinto postulado de Euclides en el sentido opuesto, es decir, proponer un espacio en el cual es posible trazar *infinitas* rectas paralelas a una recta dada. Esto da origen a la geometría de Lobachevsky, y corresponde a una superficie tipo silla de montar.

El espacio que Newton usa para desarrollar la mecánica no sólo es euclidiano sino que también homogéneo e isótropo. Esto significa que todos los lugares del espacio son equivalentes y que el espacio tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.

Para desarrollar la mecánica también es indispensable decir algo sobre el concepto de tiempo. Newton usó la suposición de que: “*El tiempo matemático, absoluto y verdadero fluye, debido a su propia naturaleza, parejamente y en forma independiente a cualquier agente externo*”. Esta suposición también nos parece completamente natural, avalada por nuestra experiencia: el hecho de que el tiempo avanza homogénea y continuamente, independiente de la posición de un observador, de su velocidad, de cualquier cosa.

Ahora bien, notemos que Newton no nos entrega precisamente una noción de tiempo. De hecho, nos dice que el tiempo fluye “parejamente”, pero sin conocer de

---

<sup>1</sup>En realidad, Euclides formuló el quinto postulado de otro modo, pero ésta es la formulación quizás más famosa, debida a Ptolomeo.

antemano lo que es el tiempo, la palabra “parejamente” no tiene sentido. De modo que, desde el punto de vista estrictamente lógico, la concepción del tiempo anterior es insatisfactoria. Pero, de todos modos, no es fácil decir algo sobre la noción *tiempo* que sea mejor o que clarifique lo expresado por Newton, consecuentemente, no intentaremos hacerlo aquí. Más bien apelaremos a nuestra intuición y experiencia cotidiana sobre lo que entendemos como “tiempo”.

Hay muchos modos de verificar que la noción Newtoniana del tiempo como algo independiente de todos los observadores es “correcta” o por lo menos “plausible”. Si dos personas se encuentran y sincronizan sus relojes en un momento dado, sabemos que sus relojes permanecerán sincronizados siempre, independiente de lo que hagan. En eso se basan todas nuestras actividades. Si decimos que una clase comienza a las 10 de la mañana, un programa de televisión a las 9 de la noche, o quedamos de encontrarnos con un amigo en 20 minutos más, dichas afirmaciones tienen un carácter absoluto para todos.

Este hecho, que relojes inicialmente sincronizados permanecen sincronizados, es básico en la mecánica newtoniana. Por ejemplo, el movimiento rotatorio de la Tierra en torno al Sol se usa para definir la unidad de tiempo llamada *año*; el movimiento de la Tierra en torno a su propio eje puede usarse para definir *día solar*. Un péndulo, o una masa colgada de un resorte, también puede usarse como reloj.

Supongamos que un observador  $O$  tiene numerosos relojes idénticos a su disposición, que los ha sincronizado y que tales relojes no modifican su ritmo si se los aleja, cada uno de los demás. De esta manera el observador  $O$  puede tener en todos los lugares del espacio relojes sincronizados con el que él posee. Para el observador  $O$ , dos eventos que ocurren en lugares distintos, serán *simultáneos* si los relojes ubicados en los dos lugares marcan la misma hora al ocurrir los eventos. Una consecuencia de la concepción newtoniana del tiempo es que si dos eventos son simultáneos para un observador, también lo serán para todos los demás observadores. En la mecánica newtoniana el concepto *simultaneidad* tiene una validez absoluta.

Como hemos dicho, todas éstas son suposiciones. Razonables, pero suposiciones. Validadas, en todo caso, por nuestra experiencia cotidiana. Es oportuno indicar, sin embargo, que más adelante (en futuros cursos) nos veremos forzados a abandonar este concepto intuitivo del tiempo. Y no solamente del tiempo; en algún momento nos veremos obligados a revisar muchos otros conceptos que ya creíamos tener claramente establecidos. La razón esencial es que nuestra experiencia cotidiana sólo alcanza a un conjunto limitado de fenómenos. Las leyes de Newton no son necesariamente (y de hecho no lo son) aplicables a fenómenos que ocurren en el mundo microscópico o en escalas cosmológicas, fracasando estrepitosamente cuando los sistemas son muy pequeños o las partículas se desplazan a velocidades comparables a la velocidad de la luz. No obstante, esto no invalida la necesidad de nuestro estudio: la mecánica newtoniana es una buena descripción para una gran diversidad de fenómenos, y sus éxitos (aunque ahora sepamos que están restringidos a un cierto ámbito de fenómenos) son indiscutibles.

## 4.2 Las leyes de Newton

Éstos son los postulados fundamentales de la mecánica que Isaac Newton publicó en su libro “*Principia Mathematica*” en 1687.

Primera ley:

*Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que una fuerza, que actúa sobre el cuerpo, lo comine a cambiar de estado.*

Si miramos con cuidado, notamos que esta ley está escrita en términos de un concepto aún no definido, la *fuerza*. Sólo podemos apelar a nuestro conocimiento intuitivo sobre qué es una fuerza: una fuerza es lo que hacemos, por ejemplo, al usar nuestros músculos para empujar un objeto.

Estamos diciendo entonces que mientras no haya una fuerza sobre un objeto, éste va a seguir en reposo si está en reposo, o en movimiento rectilíneo uniforme si está en movimiento. Es decir, si no hay fuerzas sobre un objeto éste tendrá velocidad constante (nula o no). Este principio, también conocido como *ley o principio de inercia*, ya había sido enunciado por Galileo.

Ahora bien, consideremos la siguiente situación: estamos dentro de un auto en reposo, y observamos un árbol en la calle. Nadie empuja o tira del árbol, y éste no se mueve. Eso es precisamente lo que dice la primera ley de Newton. Pero ahora el auto *acelera*. Repentinamente, vemos que, a pesar de que nadie empuja al árbol, éste se mueve. Es decir, en nuestro sistema de referencia, dentro de ese automóvil, el árbol acelera a pesar de que no hay fuerzas sobre él. ¿Qué significa esto, entonces? ¿Qué la primera ley de Newton no es cierta? Efectivamente. La primera ley de Newton *no se cumple* en sistemas de referencia acelerados (como nuestro auto cuando parte). Esto no significa que un sistema de referencia acelerado “sea malo”; simplemente significa que la primera ley de Newton no se cumple. Diremos que un sistema de referencia en que se cumple la primera ley de Newton es un *sistema de referencia inercial*. Por lo tanto, podemos considerar que la primera ley de Newton no es tanto una afirmación sobre lo que le ocurre a un cuerpo cuando aplico o no una fuerza, sino que, en realidad, es la *definición* de sistema de referencia inercial.

En general en Física, y lo haremos así en este curso, preferimos trabajar con sistemas de referencias inerciales, porque la descripción es más sencilla. En nuestro problema del árbol visto desde un auto acelerando, cualquier explicación sobre las causas del movimiento del árbol será inverosímil, pues de verdad no hay nada en el Universo que haya intentado mover el árbol. Claro, si alguien ve esta situación desde la acera, va a ser evidente para ese observador adicional que, desde dentro del auto, el árbol *parece* acelerar porque en realidad es el auto el que acelera, pero hacer Física en el interior del auto significa trabajar sólo sobre observaciones que se pueden

realizar desde el interior del auto. Es posible, sin embargo, hacer Física en sistemas no inerciales, lo cual será tema de un capítulo posterior en este mismo curso. No es que los sistemas no inerciales no sirvan para hacer Física, sino simplemente que la descripción es más complicada.

Para enunciar la segunda ley debemos definir previamente una cantidad física nueva: el concepto de *cantidad de movimiento*, *momentum*, *momento* o *momento lineal* de una partícula. El momentum de una partícula es el producto de la masa de la partícula por su velocidad. Como el producto de un escalar (la masa) por un vector (la velocidad), es un vector, el momentum de una partícula es un vector:

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

Nuevamente estamos en dificultades con el lenguaje acá. La velocidad tiene un significado claro, pero ¿qué es la masa? Y nuevamente tendremos que apelar a nuestra intuición cotidiana. La *masa*  $m$  de un cuerpo será una magnitud que es proporcional a su *peso*, es decir, dicho de alguna manera imprecisa, proporcional al esfuerzo que es necesario realizar para levantarlo o suspenderlo. Si un cuerpo pesa más que otro, esto se debe a que el primero tiene una masa mayor que el segundo.

La unidad de masa en el sistema internacional de unidades SI es el *kilógramo*, y corresponde a la masa del *kilógramo patrón* guardado en una oficina en París. Sin embargo, para la mayoría de los efectos prácticos podemos definir a un kilogramo como la cantidad de masa que posee un litro de agua dulce.

Con esta definición, podemos enunciar la segunda ley de Newton.

Segunda ley:

*El cambio de momentum  $\Delta\vec{p}$  de una partícula es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, como también al intervalo  $\Delta t$  durante el cual ella se aplica, y apunta en la dirección y sentido de esta fuerza, o sea,*

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \Delta t .$$

Más adelante definiremos a la cantidad  $\vec{F}\Delta t$  como el *impulso*, de modo que la segunda ley de Newton se puede enunciar diciendo que el cambio de momentum es igual al impulso.

Observamos de inmediato que esta ley sólo es válida si la fuerza  $\vec{F}$  es constante durante el intervalo  $\Delta t$  y si las magnitudes son observadas desde un sistema de referencia inercial.

Pero notemos también que en la expresión anterior, conocemos las definiciones de tiempo, masa y velocidad, de modo que la segunda ley es, en realidad, la *definición de fuerza*.

Si una partícula está sometida a una fuerza  $\vec{F}$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , cambiará su velocidad y, por tanto, su momentum. De acuerdo a la segunda ley, podemos definir la fuerza que actúa sobre la partícula haciendo el cociente:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} ,$$

donde con los paréntesis  $\langle \cdot \rangle$  indicamos que esto en realidad corresponde a la *fuerza media* que siente la partícula durante el tiempo  $\Delta t$  (de modo análogo a los conceptos de velocidad y aceleración media en el Cap. 2).

La fuerza instantánea se obtiene en el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , o sea, viene dada por

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Ésta será nuestra definición de fuerza. En todo momento podemos determinar explícitamente el momentum de una partícula como función del tiempo. Su derivada temporal *es* la fuerza. Notemos que es evidente que la fuerza es también una magnitud vectorial.

Si la masa de una partícula no varía a medida que transcurre el tiempo, entonces

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} .$$

Es decir, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual al producto de su masa y su aceleración. La anterior es ciertamente una formulación popularmente conocida de la segunda ley de Newton, pero enfatizamos que es sólo válida si la masa es constante. Hay muchas situaciones en que la masa no es constante: por ejemplo, un cohete que sube desde la superficie terrestre quemando combustible, un auto que va gastando gasolina, etc. En tales casos, lo correcto es utilizar la expresión original, en términos del momentum.

En el sistema de unidades SI, si la masa se mide en kg y la aceleración en  $\text{m/s}^2$ , entonces la fuerza viene dada en newtons (N):

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Tercera ley:

*Si un cuerpo **A** ejerce una fuerza sobre otro **B**, entonces este último ejercerá sobre **A** una fuerza de igual magnitud y en la misma dirección, pero en sentido opuesto.*

La tercera ley se conoce también como *ley de acción y reacción*. De acuerdo a ella, una fuerza nunca aparece en forma solitaria, sino que siempre vendrá acompañada de otras fuerzas, de manera que la suma vectorial de todas ellas sea nula. Por ejemplo, la Tierra nos atrae hacia ella, y esto no nos genera ninguna complicación conceptual, pues la Tierra tiene mucho más masa que nosotros. Pero la tercera ley de Newton asegura que también es cierto que nosotros atraemos a la Tierra, con una fuerza igual a nuestro peso. Estamos acostumbrados a atornillar tornillos en nuestras casas, pero si hiciéramos eso en ausencia de gravedad, al intentarlo el tornillo nos haría girar a nosotros en dirección contraria, con la misma fuerza que nosotros aplicamos sobre él, pues no habría otras fuerzas sobre nosotros que lo impidieran.

Si no lo pensamos con cuidado, la tercera ley nos puede llevar a imaginar ciertas paradojas. Por ejemplo, si un caballo intenta tirar una carreta, puesto que la carreta ejerce la misma fuerza sobre el caballo, ¿cómo es posible que el caballo mueva a la carreta? ¿No debería ser la suma de las fuerzas igual a cero? Bueno, la suma de esas dos fuerzas es cero, pero es crucial notar que *no actúan sobre el mismo cuerpo*, y la primera ley de Newton asegura que un cuerpo comenzará a moverse si la fuerza total *sobre él* es cero. En este caso, el caballo ejerce una fuerza sobre la carreta, y ésta sobre el caballo, de modo que sobre ambos, carreta y caballo, se ejerce una fuerza neta distinta de cero, y por tanto es posible que se muevan. (El hecho de que en efecto se muevan en la dirección que el caballo tira tiene que ver en realidad con otros efectos, relacionados con el suelo; de hecho, si el suelo fuera muy resbaloso, el caballo tampoco lograría mucho, pero dejaremos la discusión de estos efectos para más adelante.)

A pesar de que no se menciona explícitamente, al aplicar la tercera ley se supone que la acción y reacción aparecen en forma simultánea. Esto debe ser cierto independiente de la distancia en que se encuentren. Por ejemplo, dos cuerpos pueden interactuar a distancia a través de la interacción gravitacional, y los pares de fuerza de acción y reacción deben aparecer simultáneamente tanto para una manzana cerca de la Tierra, el sistema Tierra-Sol, entre galaxias, entre quasares. . . Por lo tanto, implícitamente estamos aceptando que, en la mecánica newtoniana, debe existir una manera de transmitir la información de un cuerpo a otro con una velocidad infinita. Ahora sabemos que en la naturaleza tales velocidades infinitas no existen; hoy en día sabemos que la velocidad de la luz en el vacío es un límite superior para las velocidades con que se puede trasladar algo material o información de un lugar a otro. Por esta razón, la tercera ley es generalmente una muy buena aproximación, pero no tiene una validez universal; por ejemplo, en colisiones atómicas no es siempre aplicable.

### 4.3 Uso de las leyes de Newton

Para aprender a manejar las leyes de Newton y comprender su significado, lo mejor es ilustrar su uso en algunas situaciones concretas.

Ejemplos:

1. Analicemos las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae.

Debido a la atracción gravitatoria, todo objeto sufrirá una fuerza que apunta hacia el centro de la tierra. Es esta fuerza la que acelera al cuerpo durante su caída.

¿Cuál es el tamaño de esta fuerza? Sabemos que al realizar experimentos con cuerpos sobre la superficie terrestre, al soltarlos todos ellos caen con la misma aceleración hacia la superficie. Esta aceleración constante, llamada *aceleración de gravedad*, se denota por  $g$ , y su valor es aproximadamente  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . (En realidad, al realizar estos experimentos hay que asegurarse de que los efectos de la densidad y viscosidad de la atmósfera sean despreciables. Más aún, el experimento debe realizarse sin alejarse demasiado—a lo más unas pocas decenas de kilómetros—de la superficie terrestre, además de haber pequeñas variaciones con la latitud. Pero para todos los efectos prácticos, cerca de la superficie terrestre la aceleración de gravedad se puede considerar constante.)

Conociendo la aceleración del cuerpo y su masa  $m$  podemos (usando la segunda ley de Newton) establecer cuál es la fuerza gravitacional que actúa sobre el cuerpo. Definiendo al vector unitario  $\hat{z}$  como un vector que apunta hacia arriba, el vector aceleración del cuerpo vendrá dado por  $\vec{a} = -g\hat{z}$ . La fuerza sobre el cuerpo es entonces

$$\vec{F} = m(-g\hat{z}) = -mg\hat{z} .$$

A la magnitud de esta fuerza gravitacional es lo que se llama *peso* del objeto. Usando la letra  $W$  para denotar al peso se tiene

$$|\vec{F}| \equiv W = mg = \text{peso del objeto} .$$

El peso de un objeto no es sino la fuerza que ejerce la Tierra sobre él. En el lenguaje coloquial, es habitual decir que el “peso” se mide en kilogramos. Pero vemos que el peso es una fuerza, y por tanto se mide en newtons; es la masa, una cantidad escalar, la que se mide en kilogramos. Ambos conceptos pueden considerarse intercambiables, sin embargo, mientras estemos en la Tierra, pues masa y peso difieren en un factor constante para todos los cuerpos, igual a  $g$ . Pero en rigor, siempre debemos hacer la distinción entre masa y peso.

2. Analicemos las fuerzas que actúan sobre un libro de masa  $M$ , en reposo sobre una mesa (superficie horizontal).

Ya sabemos que sobre el libro actúa una fuerza, debido a la gravedad terrestre, que es

$$\vec{W} = -Mg\hat{z} .$$

Por otra parte, debido a que el libro se encuentra (y se mantiene) en reposo, la fuerza neta sobre el libro debe ser nula. ¿Quién o qué ejerce otra fuerza, igual a  $-\vec{W}$ , sobre el libro? La respuesta es: la mesa. Efectivamente, el libro se apoya sobre la mesa y la superficie de ella ejerce sobre el libro una fuerza hacia arriba,  $\vec{R}$ , cuya magnitud es igual al peso del libro, y de sentido opuesto,  $\vec{R} = -\vec{W}$ .

A su vez, como  $\vec{R}$  es la fuerza ejercida por la mesa sobre el libro, éste debe ejercer una fuerza de igual magnitud y sentido opuesto,  $\vec{S}_1 = -\vec{R}$ , sobre la mesa. Y también es cierto que el libro debe ejercer una fuerza de magnitud igual a  $\vec{S}_2 = -\vec{W}$  sobre la Tierra. Pero aunque  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}_2$  existen en este problema, no actúan sobre el libro, y por tanto son completamente ignorables cuando se trata de estudiar el comportamiento del libro. Más aún, el hecho mismo de que el libro sea atraído por la Tierra y de que esté sobre la mesa es irrelevante, ya que lo único que le importa al libro es que sobre él actúan fuerzas  $\vec{W}$  y  $\vec{R}$ . Toda la influencia de la Tierra y la mesa se reduce a la existencia de dichas fuerzas sobre el libro. Esto sugiere que es posible estudiar al libro aislado de todos los otros cuerpos del Universo, como si éstos no existieran, y reemplazando aquellos que tienen efecto sobre él por las fuerzas respectivas:

*Al analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es conveniente aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Para ello cada objeto que interactúa con este cuerpo es sustituido por una fuerza que cumple con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es el así llamado diagrama de cuerpo libre del objeto.*

Para el caso del libro, la interacción de éste con la tierra se reemplaza por el vector  $\vec{W}$  que apunta hacia abajo y cuya magnitud coincide con el peso del libro; el efecto de la mesa sobre el libro se reemplaza por el vector  $\vec{R}$ , (ver figura 4.1). Si el libro se mantiene en reposo, la segunda ley de Newton requiere que  $\vec{W} + \vec{R} = 0$ .

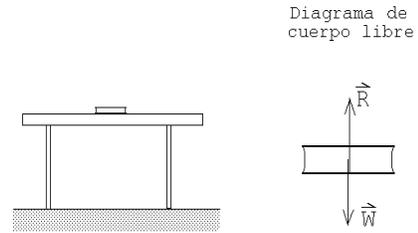


Figura 4.1

A la fuerza  $\vec{R}$  se le denomina fuerza *normal*, pues es perpendicular a la superficie sobre la cual está apoyado el objeto. La fuerza normal es la responsable de que el cuerpo no “atravesase” la superficie. En el caso sencillo analizado recién, la fuerza normal  $\vec{R} = -\vec{W}$ . Un error usual es decir que la fuerza normal es la reacción al peso. Es el mismo vector que la fuerza de reacción al peso, pero en realidad son fuerzas distintas, pues la normal es una fuerza que ejerce la mesa sobre el libro, y la reacción al peso es la fuerza que ejerce el libro sobre la Tierra.

Y además, la normal tiene igual magnitud que el peso sólo en este caso, en que la superficie de apoyo es horizontal.

3. Consideremos un objeto de masa  $m$  que cuelga del techo sujetado por una cuerda ideal (ver figura 4.2). ¿Cuál es la fuerza que la cuerda ejerce sobre el gancho en el techo y cuál es la tensión de la cuerda?

Una *cuerda ideal* es una cuerda que, a menos que se especifique lo contrario, no tiene masa, es perfectamente flexible y no es extensible. Que una cuerda sea perfectamente flexible quiere decir que sólo es capaz de transmitir una fuerza a lo largo de ella; no puede ejercer fuerzas transversales.

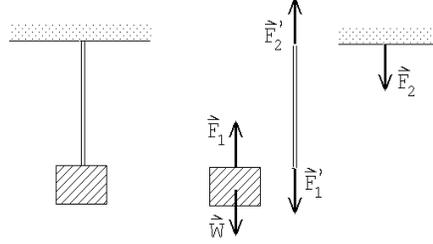


Figura 4.2

Sobre el objeto actúan dos fuerzas; una es el peso  $\vec{W} = -mg\hat{z}$  y la otra es la fuerza  $\vec{F}_1$  ejercida por la cuerda. Como el objeto no acelera, la fuerza neta (es decir, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él) debe ser nula. Por consiguiente,  $\vec{F}_1 = -\vec{W}$ .

Debido al principio de acción y reacción, debe haber una fuerza ejercida por el objeto sobre la cuerda igual a  $\vec{F}_1' = -\vec{F}_1$ . Sobre la cuerda también hay una fuerza ejercida por el gancho,  $\vec{F}_2'$ .

Nuevamente, debido al principio de acción y reacción, la cuerda debe ejercer sobre el gancho una fuerza igual a  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_2'$ .

Ahora, debido a que la cuerda no tiene masa, las únicas fuerzas que actúan sobre ella serán  $\vec{F}_1'$  y  $\vec{F}_2'$ . Al estar en equilibrio (la cuerda no acelera), la suma de ambas fuerzas debe ser cero, luego  $\vec{F}_2' = -\vec{F}_1'$ . Resumiendo, tenemos que

$$-mg\hat{z} = \vec{W} = -\vec{F}_1 = \vec{F}_1' = -\vec{F}_2' = \vec{F}_2,$$

o sea, la fuerza  $\vec{F}_2$  que la cuerda ejerce sobre el gancho es igual al peso  $-mg\hat{z}$ .

Cada uno de los extremos de la cuerda ejerce una fuerza sobre los objetos a los cuales está unida. Cuando la masa de la cuerda es nula, la magnitud de esa fuerza es la misma. A esta magnitud se le llama *tensión* de la cuerda. A lo largo de una cuerda ideal, que no tiene masa, la tensión no varía. Para la cuerda del presente problema, la tensión es  $\tau = mg$ . La tensión es un escalar.

A primera vista, uno podría haber adivinado que si colgamos del techo una masa, la fuerza que se va a ejercer sobre el gancho del que todo cuelga será igual al peso del objeto suspendido. Pero notemos la cadena de implicaciones que han conducido a este resultado, en particular la importancia de que el sistema esté en reposo.

4. Máquina de Atwood.

Consideremos dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por una cuerda ideal sin masa que pasa sobre una polea ideal (ver figura 4.3). Deseamos encontrar la aceleración de las masas y las tensiones de las cuerdas.

Con la expresión *polea ideal* nos estamos refiriendo a una polea que no tiene masa y gira sin roce. El objetivo de la polea es simplemente cambiar la dirección de la cuerda y, por lo tanto, de la fuerza (que actúa siempre a lo largo de la cuerda). La tensión a la que está sometida una cuerda no se modifica al pasar por una polea ideal.

Sea  $\tau$  la tensión de la cuerda que une ambas masas y  $\vec{a}_1 = a_1 \hat{z}$  la aceleración que sufrirá la masa 1. La fuerza neta que actúa sobre la masa 1 es  $(-m_1 g + \tau) \hat{z}$ , luego, de acuerdo a la segunda ley de Newton

$$(-m_1 g + \tau) \hat{z} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 a_1 \hat{z} .$$

De esta relación se deduce que

$$\tau - m_1 g = m_1 a_1 . \tag{4.1}$$

Análogamente, aplicando la segunda ley de Newton a la segunda masa se obtiene la expresión

$$\tau - m_2 g = m_2 a_2 . \tag{4.2}$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) contienen toda la información que se puede extraer a partir de las fuerzas. Sin embargo, no permiten encontrar la aceleración de cada masa, pues son dos ecuaciones para las tres incógnitas:  $a_1$ ,  $a_2$  y  $\tau$ . ¿De dónde se puede extraer una ecuación adicional? La respuesta es típica de este tipo de problemas, con poleas: la tercera ecuación es una condición *geométrica*, no dinámica, que se deduce del hecho de que la cuerda es inextensible. En efecto, como el largo de la cuerda es constante, debe tenerse que el desplazamiento de la masa 1 en un tiempo dado debe ser igual en módulo y de signo opuesto que el desplazamiento de la masa 2 en el mismo tiempo; es decir, lo que sube (baja)  $m_1$ , debe bajarlo (subirlo)  $m_2$ :

$$\Delta z_1 = -\Delta z_2 .$$

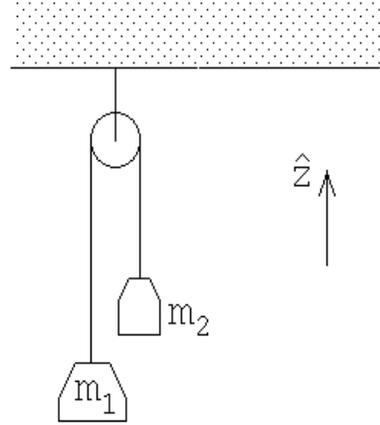


Figura 4.3

Dividiendo por el tiempo  $\Delta t$  durante el cual ha ocurrido este desplazamiento, y tomando el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , esta expresión queda  $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2$ . Derivando una vez más respecto al tiempo queda  $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$ , es decir,

$$a_1 = -a_2 .$$

Ésta es la tercera ecuación que necesitamos para resolver el sistema.

Sea entonces

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = a_0 \hat{z} .$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) podemos despejar las dos incógnitas  $a_0$  y  $\tau$ :

$$\tau = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

y

$$a_0 = - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Como la polea no tiene masa y ésta no sufre aceleraciones, la tensión de la cuerda que la sujeta deberá ser igual a  $2\tau$ .

Casos particulares:

Si  $m_1 = m_2$ , entonces  $a_0 = 0$  y  $\tau = m_1 g = m_2 g$ . Tal como era de esperarse, si las masas son iguales, ninguna de ellas acelera.

Si  $m_1 > m_2$  entonces  $a_0$  resulta ser una magnitud negativa. Esto quiere decir que  $\vec{a}_1 = a_0 \hat{z}$  es una aceleración que apunta hacia abajo; tal como debe ser, la masa 1 baja, mientras que la masa 2 sube.

Si  $m_1$  es muy parecida a  $m_2$ , entonces  $|a_0| \ll g$ . O sea, cada una de las masas realizará un movimiento uniformemente acelerado, pero con una aceleración mucho menor que  $g$ .

Si  $m_1 = 0$ , entonces  $a_0 = g$  y  $\tau = 0$ . En este caso la cuerda deja de tener tensión, y por consiguiente la partícula 2 caerá con aceleración  $g$ .

El método expuesto es muy general, permitiendo abordar una gran variedad de problemas con poleas y cuerdas. Es interesante notar, sin embargo, que el sistema analizado es particularmente sencillo, y existen otros modos de llegar a la misma solución. En efecto, notemos que, para todo efecto práctico, la cuerda tiene sólo el efecto de mantener unidas las dos masas, y que éstas pueden ser consideradas como un solo cuerpo. Si ponemos este sistema de dos masas unidas por una cuerda en el suelo, horizontalment, podemos pensar que está sometido a dos fuerzas: los pesos de cada masa, uno hacia la derecha, el otro hacia la izquierda. Por lo tanto, uno podría escribir la fuerza neta sobre el sistema:

$$\vec{F} = -m_1 g \hat{x} + m_2 g \hat{x} ,$$

lo que debe ser igual, por la segunda ley de Newton, a:

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)a_0\hat{x} .$$

Despejando  $a_0$  de estas ecuaciones, se recupera el resultado ya obtenido. Este procedimiento tan sencillo, sin embargo, es posible porque el problema es en sí sencillo. Para configuraciones más complicadas, es mejor proceder del modo general anteriormente expuesto, escribiendo cuidadosamente las fuerzas sobre cada masa, y cualquier condición geométrica adicional sobre los desplazamientos de las mismas.

5. Considere una cuerda flexible de masa  $M$  que cuelga entre dos paredes, siendo  $\alpha$  el ángulo que forma la cuerda con la pared (ver figura 4.4). Se desea encontrar la tensión que la cuerda tiene en el punto mínimo. (En este caso, a diferencia de los anteriores, la tensión no es constante, precisamente porque la cuerda tiene masa.)

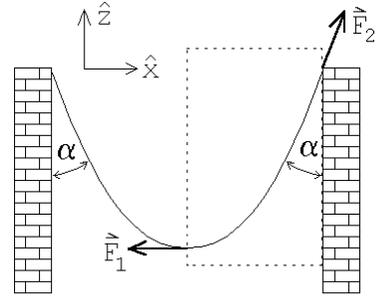


Figura 4.4

Para resolver el problema consideremos como nuestro sistema sólo la mitad derecha de la cuerda. Este “truco” es en el mismo espíritu que el diagrama de cuerpo libre. De hecho, es un diagrama de cuerpo libre, para la mitad derecha de la cuerda. Estamos reemplazando, en el fondo, la mitad izquierda de la cuerda por la fuerza que ésta ejerce sobre la otra mitad,  $\vec{F}_1$ . A la mitad derecha de la cuerda le da lo mismo lo que haya al lado izquierdo, sea una cuerda, una pared, una persona, o cualquier agente, mientras ejerza la misma fuerza  $\vec{F}_1$  en el mismo punto.

Hay tres fuerzas que actúan sobre el sistema considerado:

- i) El peso  $\vec{W} = -\frac{1}{2}Mg\hat{z}$ .
- ii) La fuerza  $\vec{F}_1$  ejercida por la parte izquierda de la cuerda. La magnitud de esta fuerza es igual a la tensión de la cuerda en el mínimo, que llamaremos  $\tau_0$ . Se tiene que  $\vec{F}_1 = -\tau_0\hat{x}$  .
- iii) La fuerza que ejerce el gancho sobre la cuerda. Como la cuerda es flexible la fuerza necesariamente es a lo largo de la tangente de la cuerda. Si a la magnitud de esta fuerza la llamamos  $f_0$ , se tiene que  $\vec{F}_2 = f_0 \cos \alpha \hat{z} + f_0 \sin \alpha \hat{x}$ .

Como nuestro sistema está en equilibrio (no acelera), la suma de las tres fuerzas

debe ser nula:

$$\vec{W} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{1}{2}Mg\hat{z} - \tau_0\hat{x} + f_0 \cos \alpha \hat{z} + f_0 \sin \alpha \hat{x} = \vec{0} .$$

Pero para que un vector sea cero es necesario que cada una de sus componentes sea nula. Este hecho nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{componente } z: \quad -\frac{1}{2}Mg + f_0 \cos \alpha = 0$$

y

$$\text{componente } x: \quad -\tau_0 + f_0 \sin \alpha = 0 .$$

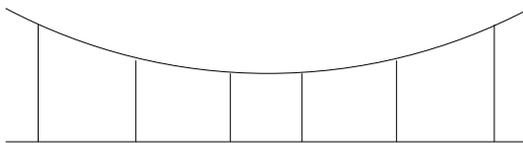
De estas dos ecuaciones podemos despejar  $\tau_0$  y  $f_0$ , obteniéndose

$$\tau_0 = \frac{1}{2}Mg \tan \alpha$$

y

$$f_0 = \sqrt{\tau_0^2 + \left(\frac{Mg}{2}\right)^2} .$$

Notemos cómo para  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ , o sea, a medida que la cuerda se cuelga en forma más “tirante”, la tensión de la cuerda tiende a infinito. Esto viene, matemáticamente, del hecho de que si  $\alpha$  es muy parecido a  $\pi/2$ , la fuerza ejercida por el gancho tiene una componente vertical muy pequeña. Como debe contrarrestar a la única otra fuerza vertical, el peso de la cuerda, se sigue que  $|\vec{F}_2| = f_0$  debe ser muy grande. En el límite  $\alpha = \pi/2$ ,  $f_0 \rightarrow \infty$ . Esto tiene importantes consecuencias prácticas. Los cables del tendido eléctrico, entre postes, tienen una cierta curvatura. Intentar colocarlos completamente horizontales sería un gran riesgo, ya que estarían sometidos a una tensión demasiado alta, y cualquier perturbación podría romperlos. Si uno desea suspender un cable horizontalmente una solución posible es utilizar cuerdas auxiliares:



Solución que, por cierto, se utiliza en puentes colgantes, por ejemplo.

6. Consideremos una masa  $m$  que gira en el plano  $x, y$ , en un círculo de radio  $R$  y con una velocidad angular constante,  $\omega_0$ . Encontramos la fuerza neta a la que está sometida la masa.

En la sección 3.3 ya analizamos el movimiento circular y demosotramos que la aceleración de la masa  $m$  viene dada por  $\vec{a}(t) = -R\omega_0^2 \hat{r}$ . De acuerdo a la tercera ley de Newton, el hecho que la masa  $m$  esté acelerada implica que sobre ella está actuando una fuerza neta

$$\vec{F} = m\vec{a} = -Rm\omega_0^2 \hat{r} .$$

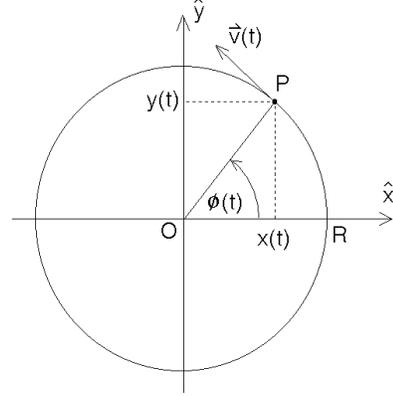


Figura 4.5

Esta fuerza (de magnitud constante) apunta hacia el origen y por esta razón se le denomina *fuerza centrípeta*.

Debido a la importancia de este resultado lo reiteramos: Una masa  $m$  que realiza un movimiento circular uniforme, está sometida a una fuerza que apunta hacia el centro de giro. La magnitud de esta fuerza centrípeta es

$$F_{\text{cent}} = mR\omega_0^2 = \frac{mv^2}{R} ,$$

donde  $R$  es el radio del círculo,  $\omega_0$  la velocidad angular y  $v = \omega_0 R$  el módulo de la velocidad de la partícula.

**Problema resuelto en clases: 4.6**

### 4.4 Roce cinético y estático

Si un cuerpo se desliza sobre otro, tarde o temprano se detendrá a menos que exista una fuerza externa que perpetúe el movimiento. La fuerza que se opone al deslizamiento relativo entre los dos cuerpos se denomina *fuerza de roce cinético*. Se origina en la interacción de ambas superficies en contacto.

La fuerza de roce no sólo aparece cuando dos cuerpos están en movimiento relativo, sino que también puede estar presente cuando los dos cuerpos se encuentran en reposo relativo. En efecto, si, por ejemplo, intentamos deslizar una mesa por el piso, notamos que aparece una fuerza que impide que este deslizamiento comience. A esta fuerza se le denomina *fuerza de roce estático*.

También existen otras fuerzas de roce que aparecen en diversas circunstancias (por ejemplo, el *roce rodante*, el *roce viscoso*, etc), sin embargo, en el presente capítulo centraremos nuestro interés en las fuerzas de roce cinético y estático.

Se sabe relativamente poco acerca de ambos y es difícil cuantificarlos porque dependen de la naturaleza de los materiales y de propiedades de la superficie como el pulido, la existencia de óxidos en la interfase, etc. Lo que dificulta aún más la cuantificación de la fuerza de roce es su dependencia de la historia de las superficies: el paso del roce estático al roce dinámico depende de si las superficies se han deslizado previamente o no.

Las fuerzas de roce tienen un origen microscópico. Dos superficies, por suaves que parezcan, a nivel microscópico tienen irregularidades. Estas protuberancias forman, en algunos casos, microsoldaduras, y son el origen de la fuerza adicional que uno debe aplicar para poder iniciar un movimiento relativo entre los cuerpos. Una vez que éstos están en movimiento, estas aristas microscópicas se “enganchan” unas con otras y dan origen al roce cinético (también a veces llamado “*roce cinemático*” o “*roce dinámico*”). Por otra parte, cuando dos superficies están en reposo relativo, aparecen fuerzas entre las moléculas de cada superficie, y estas fuerzas son las que hay que vencer para comenzar a desplazar entre sí las superficies, dando origen así al roce estático.

Lo cierto es que no hay una teoría completa, de primeros principios, para el roce. Lo cual causa problemas desde el punto de vista teórico, porque es un efecto que evidentemente está presente, pero que es difícil de modelar en general. En todo caso, numerosos estudios experimentales permiten extraer algunas conclusiones generales sobre el roce. No se trata de “leyes fundamentales de la naturaleza”, sino de resultados fenomenológicos y cualitativos sobre el roce, suficientes para introducir los efectos del roce en las ecuaciones dinámicas.

Consideremos un bloque de masa  $M$  que descansa sobre una superficie, el cual intentamos deslizar aplicando sobre él una fuerza horizontal  $\vec{F}$ , que incrementamos paulatinamente. Designemos por  $\vec{f}$  a la fuerza de roce que aparece debido a la fricción entre las dos superficies y describamos la forma en que típicamente varía esta fuerza.

- a) Mientras la fuerza horizontal externa  $F = |\vec{F}|$  varía desde 0 hasta un cierto valor  $f_e^{(\max)}$ , el bloque  $M$  no se desplazará. Como no hay aceleración, la fuerza neta horizontal sobre el cuerpo debe ser nula, o sea, debe haber otra fuerza horizontal sobre el bloque que exactamente cancele a la fuerza  $\vec{F}$ . Ésta es la fuerza de roce estática  $\vec{f}$ . Se tiene, por lo tanto, que  $\vec{f} = -\vec{F}$ .
- b) Cuando la fuerza horizontal externa  $F$  sobrepasa cierto valor  $f_e^{(\max)}$ , la fuerza de roce no sigue aumentando. Como ahora la componente horizontal de la fuerza neta no es nula, el bloque comenzará a acelerar. Tan pronto como los cuerpos se deslizan con cierta velocidad relativa, la fuerza de roce se vuelve constante,

siendo su magnitud algún valor  $f_c$  (menor que  $f_e^{(\max)}$ ) y su sentido opuesto al movimiento relativo.

De ahí en adelante, si se desea mantener el bloque deslizándose con una velocidad constante, debe aplicarse una fuerza horizontal de exactamente la magnitud  $f_c$ , en la dirección de movimiento.

Es decir, el resultado experimental es que, para mover, por ejemplo, un mueble sobre el piso, “cuesta” un poco más comenzar a moverlo que mantenerlo en movimiento.

Este comportamiento fenomenológico recién descrito, que muestra la fuerza de roce, se muestra en la figura 4.6. Empíricamente se ha observado que, para dos superficies (secas) en contacto, tanto la fuerza de fricción dinámica  $f_c$  como el máximo de la fricción estática  $f_e^{(\max)}$ , son proporcionales a la fuerza normal entre ambas superficies, o sea,

$$f_c = \mu_c F_N$$

y

$$f_e^{(\max)} = \mu_e F_N .$$

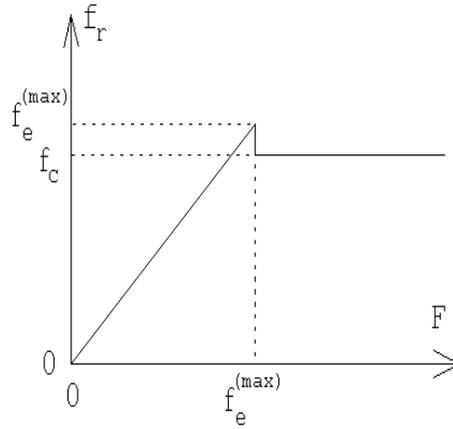


Figura 4.6

$\vec{F}_N$  es la fuerza normal entre las superficies (es decir, perpendicular a la interfase formada por las dos superficies) y  $\mu_c$  y  $\mu_e$  son los *coeficientes de fricción* o de roce. Los coeficientes de fricción de alguna manera engloban nuestra ignorancia de los distintos parámetros que intervienen en el problema. Siempre se tiene que el coeficiente de roce cinemático es menor al coeficiente de roce dinámico:  $\mu_c < \mu_e$ . Ambas fuerzas de roce actúan en la dirección paralela a las superficies. El sentido de la fuerza de roce estático es opuesto a la fuerza horizontal neta que actúa sobre el cuerpo, mientras que el sentido de la fuerza de roce dinámico es siempre opuesto al movimiento relativo (y no a la fuerza) entre las dos superficies.

Ilustremos los conceptos anteriores con un ejemplo.

**Problema:**

Considere el montaje experimental mostrado en la figura 4.7. Supongamos que los coeficientes de fricción estático y cinemático entre la masa  $M=4$  Kg y el plano inclinado son  $\mu_e = 0.4$  y  $\mu_c = 0.3$ , respectivamente.

¿Qué rango de valores puede tener  $m$  para que el sistema se encuentre en equilibrio estático? Si la masa  $m$  justo sobrepasa ese máximo, ¿con qué aceleración se moverá el bloque sobre el plano?

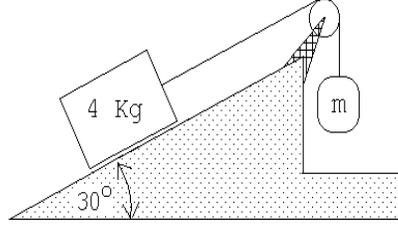


Figura 4.7

**Solución:**

Resolvamos primero el problema estático.

Lo primero que hay que tener claro es que el sistema puede estar en equilibrio para un *rango* de valores de  $m$ . En efecto: si no hay roce, es claro que hay un único valor de  $m$  (digamos  $m_0$ ), tal que el sistema se mantiene en equilibrio. Si  $m$  es ligeramente mayor que  $m_0$ , entonces el sistema intentará moverse hacia la derecha en la Fig. 4.7. Pero como hay roce, dicho movimiento no ocurrirá, a menos que  $m$  sea suficientemente grande para que la fuerza aplicada sobre el otro bloque sea mayor que la fuerza de roce estático máxima. Entonces, existe un valor *máximo* de  $m$  tal que el sistema puede mantenerse en equilibrio. Por argumentos similares, podemos convencernos de que existe también un valor *mínimo* de  $m$ . El problema ahora es encontrar dichos valores.

La figura 4.8 muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque que se encuentra sobre el plano inclinado. A priori no sabemos en qué sentido apunta la fuerza de roce  $f_r$ . La hemos dibujado apuntando a lo largo del plano hacia abajo; si después de realizar el cálculo  $f_r$  resulta tener un valor negativo entonces la fuerza de roce en realidad apunta en el sentido opuesto al mostrado en la figura. Sea  $Mg$  el peso,  $\tau$  la fuerza ejercida por la tensión de la cuerda y  $F_N$  la fuerza normal que ejerce el plano inclinado sobre el bloque. Debido al principio de acción y reacción,  $F_N$  también coincide con la magnitud de la fuerza que el bloque ejerce sobre el plano.

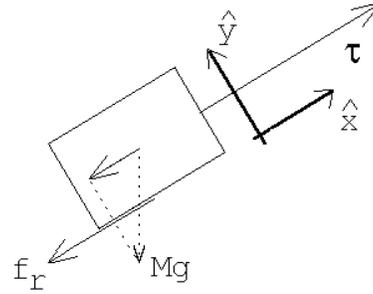


Figura 4.8

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas en que el eje  $\hat{x}$  es paralelo y el eje  $\hat{y}$  normal al plano inclinado (ver figura 4.8). Como el bloque está en reposo, la fuerza neta sobre el bloque debe ser nula, esto es, tanto la fuerza total a lo largo del eje  $\hat{x}$  como a lo largo del eje  $\hat{y}$ . Esto nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{eje } \hat{x}: \quad \tau - Mg \sin \alpha - f_r = 0$$

$$\text{eje } \hat{y}: \quad F_N - Mg \cos \alpha = 0 \quad ,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de elevación del plano inclinado. Como la masa  $m$  no acelera, la tensión de la cuerda debe ser  $\tau = mg$ . Luego, de la primera ecuación se deduce que

$$f_r = mg - Mg \sin \alpha \quad .$$

Recordemos que  $f_r$  puede ser positivo o negativo:  $f_r$  es positivo si  $m > M \sin \alpha$  y negativo si  $m < M \sin \alpha$ . También se tiene que

$$|f_r| \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg \cos \alpha \quad .$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} mg - Mg \sin \alpha &= +f_r \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg \cos \alpha && \text{si } m > M \sin \alpha \quad , \\ -mg + Mg \sin \alpha &= -f_r \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg \cos \alpha && \text{si } m < M \sin \alpha \quad , \end{aligned}$$

o sea el bloque de masa  $M$  no se desliza sobre el plano inclinado si

- i) para  $M \sin \alpha < m$  , se cumple que  $m \leq M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha)$ ,
- ii) para  $M \sin \alpha > m$  , se cumple que  $m \geq M(\sin \alpha - \mu_e \cos \alpha)$ .

Para los valores numéricos del enunciado, el bloque no se deslizará por el plano si  $0.61 \text{ kg} < m < 3.4 \text{ kg}$ .

Observemos que, si  $\alpha = 0$ , resulta  $-M\mu_e \leq m \leq M\mu_e$ . En este caso, la superficie es completamente horizontal, y la masa  $m$  es simplemente equivalente a una fuerza externa  $mg$ . Para que el sistema se mantenga en equilibrio se requiere simplemente que dicha fuerza externa (que puede ir hacia la derecha o hacia la izquierda) no sea mayor que la fuerza de roce estático máxima.

Por su parte, si  $\alpha = \pi/2$ , se tiene  $M \leq m \leq M$ , es decir, el sistema se mantiene en equilibrio sólo si  $m = M$ . Lo cual es evidente, ya que cuando la superficie es completamente vertical la fuerza normal sobre el bloque es cero, de modo que el roce desaparece del problema. Tenemos entonces un sistema de dos masas colgando de los extremos de una cuerda que pasa por una polea, el cual sólo se mantiene en equilibrio si las masas en ambos extremos son iguales.

Analícemos ahora lo que sucede si  $m$  sobrepasa (en una magnitud infinitesimal) al valor  $M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha)$ . En ese caso, el bloque comenzará a deslizarse hacia arriba. La fuerza de roce, por lo tanto, será

$$\vec{f}_r = -\mu_c Mg \cos \alpha \hat{x} \quad .$$

La fuerza neta sobre el bloque y su aceleración, en la dirección  $\hat{x}$ , vendrán dados por

$$F_x = \tau - f_r - Mg \sin \alpha = \tau - \mu_c Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha \quad .$$

y

$$a_x = \frac{F_x}{M} = \frac{\tau}{M} - g(\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha) .$$

Por otra parte, la fuerza neta sobre la masa  $m$  y su aceleración en la dirección vertical, serán

$$F' = \tau - mg .$$

y

$$a' = \frac{F'}{m} = \frac{\tau}{m} - g = -a_x .$$

La última igualdad en la ecuación anterior se debe a que la cuerda es inextensible; por consiguiente, cuando el bloque acelera hacia arriba, la masa  $m$  acelerará con la misma magnitud, pero hacia abajo. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$a_x = g \left[ \frac{\left( \frac{m}{M} - \mu_c \cos \alpha - \sin \alpha \right)}{\frac{m}{M} + 1} \right] . \quad (4.3)$$

Este resultado también lo podemos escribir de otra manera. Recordemos que  $m$  sobrepasa en una magnitud infinitesimal al valor  $M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha)$ , luego

$$m = M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha) , \quad (4.4)$$

o sea,

$$\frac{m}{M} = \mu_e \cos \alpha + \sin \alpha .$$

Sustituyendo esto en la expresión para  $a_x$  se obtiene

$$a_x = g \frac{(\mu_e - \mu_c) \cos \alpha}{1 + \mu_e \cos \alpha + \sin \alpha} . \quad (4.5)$$

Con los valores numéricos del enunciado se obtiene  $a_x \simeq 0.047 g$ .

Note que la tensión de la cuerda es distinta en el caso estacionario que en el caso dinámico. En el primer caso es  $\tau = mg$ , mientras que en el segundo viene dada por  $\tau = m(g - a_x)$ .

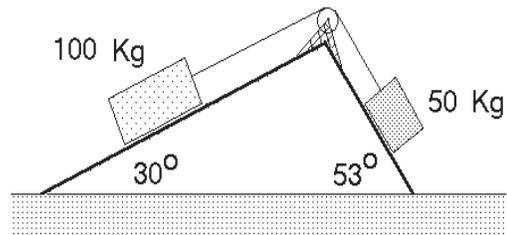
En el caso dinámico, el límite  $\alpha = \pi/2$  es problemático, pues (4.5) da  $a_x = 0$ , lo que es imposible, pues si  $m$  supera ligeramente el valor de equilibrio (que en este límite es igual a  $M$ ), el sistema debería acelerar. El problema es que, en rigor, (4.4) debería ser  $m = M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha) + \epsilon$ , con  $\epsilon \ll 1$ . En ese caso, la expresión (4.5) adquiere un término adicional de orden  $\epsilon$ . Dicho término es irrelevante para ángulos arbitrarios, siendo el término dominante el que aparece en (4.5), es decir, la aceleración es esencialmente independiente de la diferencia  $\epsilon$  entre  $m$  y su valor de equilibrio. Pero para ángulos muy grandes, en particular  $\alpha = \pi/2$ , la situación se invierte, es el término independiente de  $\epsilon$  el que es despreciable, y  $a_x \sim \epsilon$ , tal como sugiere la intuición, esto es, la aceleración depende exclusivamente de la diferencia de las masas  $m$  y  $M$ .

**Problema resuelto en clases: 4.35**

**Problema resuelto en clases: 4.32**

## 4.5 Problemas

- Un automóvil de 2000 kg moviéndose a 80 km/h puede llevarse al reposo en 75 m mediante una fuerza de frenado constante:
  - ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse?
  - ¿Cuál es la fuerza necesaria para detener el coche en esa distancia? ¿Quién o qué ejerce esa fuerza horizontal que detiene al coche?
- Una carga de 2 toneladas se levanta mediante una grúa.
  - Inicialmente, durante cierto intervalo de tiempo, la carga sube con una aceleración  $a = 1.3 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuál es la tensión del cable que la soporta?
  - Después de un breve período de aceleración, la carga sigue elevándose con una velocidad constante. ¿Cuál es la tensión del cable en ese caso?
- Dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, descansan sobre planos lisos como se muestra en la figura 4.9.
  - ¿En qué sentido se moverá el sistema?
  - ¿Cuál es la aceleración de los bloques?
  - ¿Cuál es la tensión de la cuerda?
- Una pelota de 2 kg cae libremente llegando, en cierto instante, a tener una rapidez de 6 m/s. ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5 m? ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5 s?



*Figura 4.9*

5. ¿Qué fuerza  $\vec{F}$  debe aplicarse al carro de masa  $M$  (ver figura adjunta) para que el carro de masa  $m_2$  no suba ni baje?

Respuesta:  $F = g(M + m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1}$

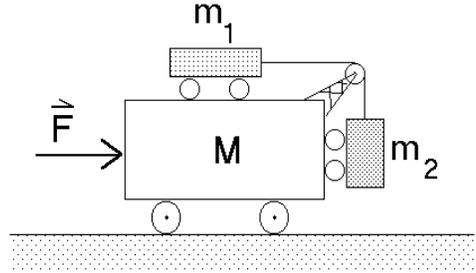


Figura 4.10

6. Considere un péndulo que consiste en una masa  $m$  colgada de un hilo de largo  $\ell$ . En presencia de un campo gravitacional constante, al sacar el péndulo de su posición de equilibrio y soltarlo, éste oscilará. Encuentre la aceleración de la masa  $m$  en el instante en que el péndulo forma un ángulo  $\theta$  con la normal.

Si  $\theta \ll 1$ , demuestre que

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \theta(t) = 0 ,$$

con  $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ .

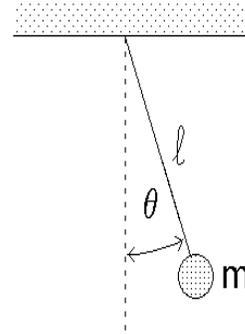


Figura 4.11

7. Considere una masa  $m$  adosada a un resorte de constante de restitución  $k$ . Sea  $x = 0$  la posición de equilibrio del sistema. De acuerdo a la *Ley de Hook*, al desplazar la masa  $m$  una distancia  $x$  desde su posición de equilibrio, la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa es  $F = -kx$ . Demuestre que

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 ,$$

con  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Compare este resultado con el del problema anterior.

8. Un cuerpo de 500 g desliza por un plano inclinado liso. El cuerpo parte del reposo y durante el tercer segundo recorre una distancia de 120 cm. Encuentre el ángulo de inclinación del plano.

9. Una esfera de masa  $m$  es mantenida en la posición **A** por dos cuerdas (ver figura 4.12). Sea  $T_A$  la tensión de la cuerda indicada. Se corta la cuerda horizontal y el péndulo oscila hasta la posición **B**. ¿Cuál es la razón de las tensiones  $T_B/T_A$ ?

Respuesta:  $T_B/T_A = \cos^2 \alpha$ .

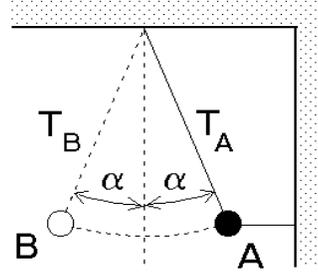


Figura 4.12

10. Considere el montaje mostrado en la figura 4.13, con  $M=1,650$  kg,  $m=0,150$  kg y  $d_0=4$  m. El sistema está en reposo cuando  $d = d_0 = 4$  m. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que la masa  $m$  llegue a la base de  $M$ ?

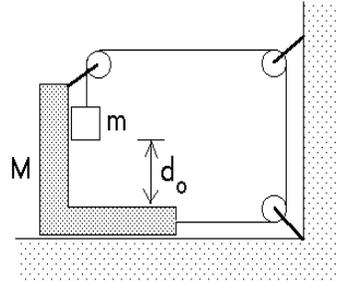


Figura 4.13

11. Un objeto se encuentra sobre un plano liso sin roce y es sometido a una fuerza  $\vec{F}$  que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es  $m$ , obtenga y grafique las siguientes magnitudes:

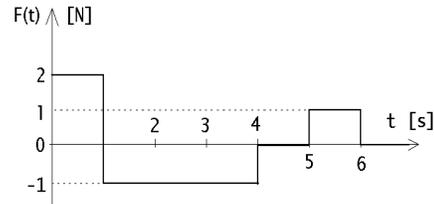


Figura 4.14

- (a) Aceleración del objeto en función del tiempo.
  - (b) Velocidad del objeto, si éste parte del reposo.
  - (c) Posición del objeto en función del tiempo.
12. Una pesa calibrada en Newtons se coloca sobre una plataforma móvil y se hace deslizar con una rapidez constante de 14 m/s sobre un terreno ondulado (ver figura 4.15). Sobre la pesa se coloca una caja que pesa 500 N.
- (a) Cuando la plataforma pasa sobre la cresta de una colina con radio de curvatura de 100 m, ¿cuál es la lectura de la pesa?
  - (b) Cuando la plataforma pasa por la parte inferior de una hondonada con radio de curvatura de 80 m, ¿cuál es la lectura de la pesa?

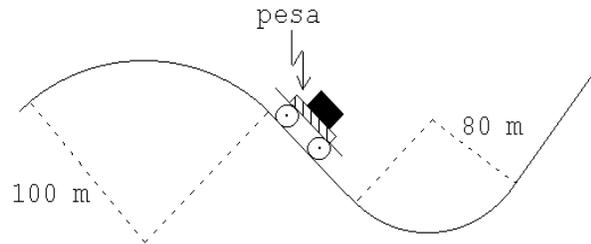


Figura 4.15

Respuesta: (parte b)  $\simeq 625$  N.

13. Un bloque de masa  $M$  es tirado hacia una muralla vertical mediante el uso de una cuerda y poleas como se muestra en la figura. El bloque se desliza sin roce sobre la superficie. La fuerza con que se tira la cuerda es  $F$ , el largo de la cuerda es  $2L$  y la separación inicial entre el bloque y la muralla es  $L$ . Determine el tiempo que transcurre hasta que se encuentren la punta de la cuerda y el bloque.

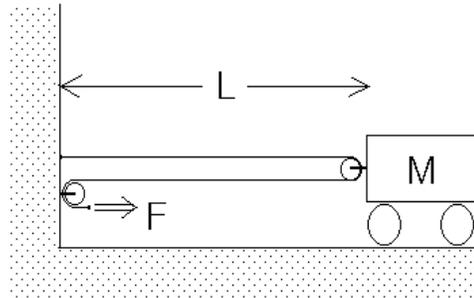


Figura 4.16

14. Un plato cónico de ángulo característico  $\alpha$  gira uniformemente entorno a su eje, el cual se mantiene en posición vertical. Una piedrecilla de masa  $m$  rota solidariamente con el plato. Suponiendo que no hay roce entre la piedrecilla y la superficie del plato, calcule el radio de la órbita circular que describe la piedrecilla.

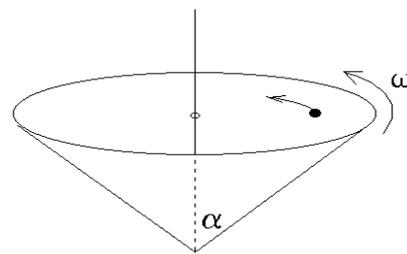


Figura 4.17

15. Una persona se para sobre una balanza dentro del ascensor y observa que ésta registra un peso igual a un 70% de su peso normal. Si el ascensor y el pasajero tienen masas  $M$  y  $m$  respectivamente, calcule la tensión a la que está sometido el cable que sujeta el ascensor. Compare esta tensión con la que se produciría si el ascensor acelera con la misma magnitud pero en sentido opuesto.

16. Considere el montaje mostrado en la figura 4.18. Suponga que las masas de la polea y del hilo, así como el rozamiento son despreciables. Se conocen las masas  $m$ ,  $M$  y el ángulo de la cuña. Encuentre la aceleración de la cuña.

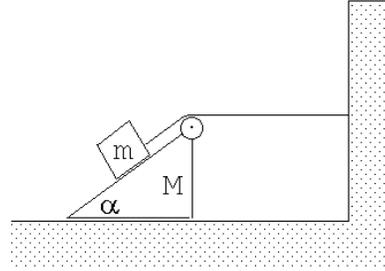


Figura 4.18

Respuesta: 
$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} .$$

17. Dos masas  $m$  y  $M$  se encuentran unidas por una cuerda de masa despreciable y largo  $\ell$ . En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme (en un plano horizontal) en torno al así llamado *centro de masas* del sistema. Suponga que el período del movimiento rotatorio es  $T$ . Encuentre la distancia entre la masa  $m$  y el centro de giro (para resolver esta parte del problema no es necesario conocer la definición de centro de masas). Calcule la tensión de la cuerda que une ambas masas.

Respuesta: 
$$\tau = \frac{mM}{m + M} \ell \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 .$$

18. Una cuña lisa de masa  $M$  se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal  $F$ . Sobre ella se coloca un bloque de masa  $m$ .

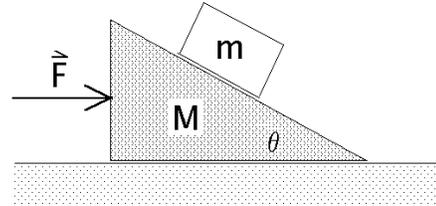


Figura 4.19

- (a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.  
 (b) Determine el valor de  $F$  para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña.

19. Dos bloques idénticos y de masa  $m$  posan sobre una superficie horizontal pulida. Uno de ellos es tirado mediante una cuerda en cuyo extremo libre se aplica una fuerza horizontal igual a  $Mg$ . El otro bloque es también tirado horizontalmente mediante una cuerda pero en cuyo extremo libre cuelga una bola de masa  $M$ . Determine cual de los bloques se mueve más rápido si ambos parten del reposo simultáneamente.

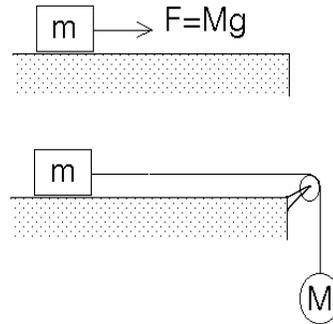


Figura 4.20

20. Un pintor que pesa 900 Newtons trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newtons. La silla misma pesa 300 Newtons.

- (a) ¿Cuál es la aceleración del pintor y de la silla?
- (b) ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?

Respuestas: a)  $a = 2g/3$  ; b)  $F_{tot} = 2000$  N.

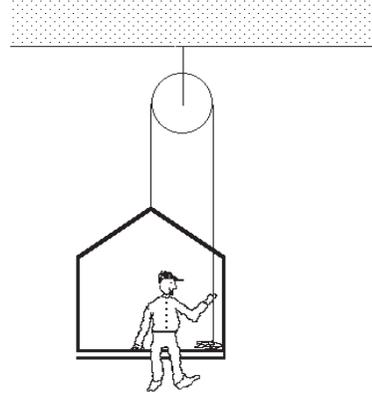


Figura 4.21

21. Considere el montaje mostrado en la figura 4.22. La masa del cuerpo # 1 es  $n = 4$  veces mayor que la del cuerpo # 2. Suponga que las masas de las poleas y de los hilos, así como el rozamiento son despreciables por su pequeñez. Cuando el cuerpo # 2 se suelta, la masa # 1 se encuentra a una altura  $h$ . ¿Cuál es la aceleración de la masa # 2 mientras  $m_1$  baja? ¿Cuál es la altura máxima del suelo  $H$  a la que subirá la masa # 2? (¡La altura máxima no es  $2h$ !)

Respuesta:  $H = 6hn/(n + 4)$  .

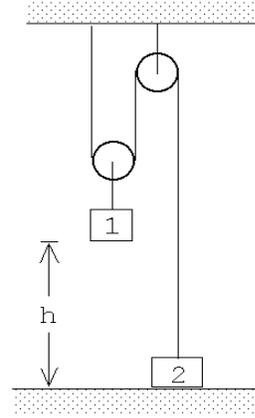


Figura 4.22

22. Una masa  $m$  se encuentra apoyada sobre una cuña de masa  $M$  y ángulo de elevación  $\alpha$ . La cuña se puede desplazar horizontalmente sin roce sobre un plano. Dos guías restringen el movimiento de la masa  $m$  de manera que sea sólo en dirección vertical. No hay roce entre la masa  $m$  y la cuña como tampoco entre las guías y la masa  $m$ .

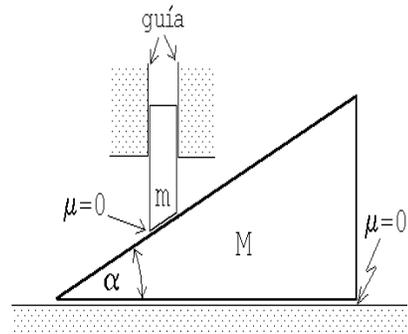


Figura 4.23

- a) Encuentre la relación que existe entre la aceleración vertical  $a_m$  de la masa

$m$  y la aceleración horizontal  $a_M$  de la cuña.

- b) Haga los diagramas de cuerpo libre de la masa  $m$  y de la cuña  $M$ .
- c) Encuentre la aceleración  $a_M$  de la cuña.
- d) Si entre la cuña y el suelo hay roce ¿cuánto es el valor mínimo que debe valer el coeficiente de roce estático  $\mu_e$  para que la cuña no acelere?
23. Considere dos masas  $M$  y  $m$  unidas por un hilo que pasa por una polea ideal tal como se muestra en la figura adjunta. Inicialmente la masa  $M$  se sujeta con un hilo auxiliar (que no se muestra en la figura) y el sistema se encuentra en reposo. En cierto instante el hilo auxiliar se corta. Demuestre que la aceleración de la masa  $M$  es (con el eje  $\hat{z}$  apuntando hacia arriba):

$$\vec{a} = -\frac{4M + 2m}{4M + m}g\hat{z} .$$

Demuestre que esta expresión da el valor correcto en los límites  $M \gg m$  y  $m \gg M$ .

24. Dos objetos 1 y 2, de igual masa, están atados a los extremos de una cuerda ideal de largo  $L$ . El conjunto descansa sobre un disco que gira en un plano horizontal con velocidad angular constante, en torno a su centro (ver figura). Suponga que no existe fricción entre el disco y el objeto 1, pero existe fricción entre el objeto 2 y la superficie del disco. Los coeficientes de fricción estático y cinético entre la masa 2 y el disco son  $\mu_e$  y  $\mu_c$ , respectivamente.

Se observa que cuando el disco gira con velocidad angular  $\omega_0$ , la cuerda se mantiene tensa y alineada en la dirección radial. En esta condición el objeto 2 está en reposo a una distancia  $R$  del eje de rotación. Cuando la velocidad angular es mayor que  $\omega_0$  el objeto 2 (y también el 1) resbala sobre el disco. Calcule el valor de  $\omega_0$ .

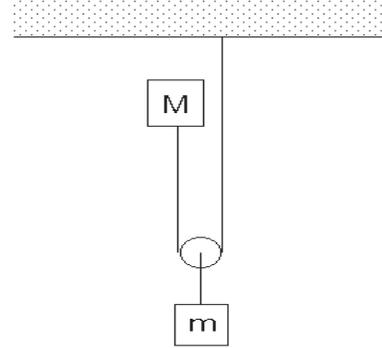


Figura 4.24

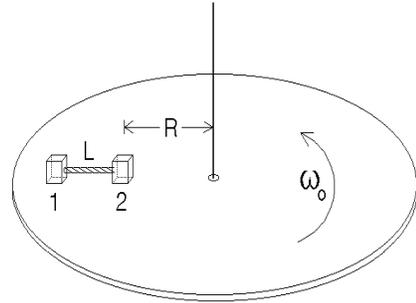


Figura 4.25

25. Tal como el campo gravitacional ejerce sobre una masa  $m$  una fuerza, un campo eléctrico  $\vec{E}$  ejerce una fuerza sobre una carga  $q$ . Esta última viene dada por

$$\vec{F} = q \vec{E}.$$

(En el sistema internacional de unidades SI, la unidad para la carga es el *Coulomb* [C] y la del campo eléctrico *Volt/metro* = *Newton/Coulomb*, siendo las abreviaciones [V/m]=[N/C]. Un campo de 1 [V/m] ejerce sobre una carga de 1 [C] una fuerza de 1 [N].)

Considere un electrón, inicialmente en reposo, que es acelerado entre dos placas (un condensador) separadas por una distancia de 1 cm. En el espacio entre las dos placas hay un campo eléctrico de 900 Volt/cm.

- (a) ¿Cuál es su velocidad terminal (la velocidad con que emerge del primer condensador)?
- (b) Suponga ahora que el electrón de la parte a), después de ser acelerado y emerger (por un pequeño agujero) del espacio entre las dos placas, ingresa a una región de largo  $L = 3\text{cm}$  en que existe un campo eléctrico transversal de magnitud  $|\vec{E}_\perp| = 30\text{ Volt/cm}$ . ¿Cuál será el ángulo de deflexión  $\theta$  con que emergerá el electrón del segundo condensador? (Ver figura 4.26). (En este problema Usted puede despreciar la interacción gravitatoria, es decir, puede suponer que  $g = 0$ . La carga de un electrón (universalmente denotada con la letra  $e$ ) es  $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$  [C] y su masa  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  [Kg].)

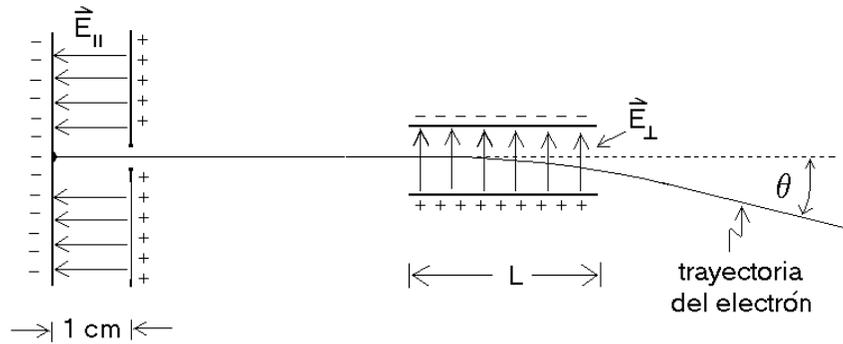


Figura 4.26

26. Un pulso de iones de  $\text{Cs}^+$  (simplemente ionizados) que han sido acelerados desde el reposo por un campo eléctrico de 1 (statvolt/cm) a lo largo de 0,33 cm, tarda un tiempo  $\Delta t = 87 \cdot 10^{-9}$  s para recorrer 1 mm después del proceso de aceleración (ver figura 4.27).

- (a) Encuentre la masa del  $\text{Cs}^+$ .
- (b) Si en lugar de  $\text{Cs}^+$  se realiza el experimento con deuterones, ¿cuánto sería el tiempo de travesía  $\Delta t$  ?
- (c) Suponiendo que los protones y los neutrones tienen la misma masa, encuentre la masa de un neutrón.
- (d) Con este dispositivo experimental, ¿será posible distinguir entre deuterones y partículas  $\alpha$  ?

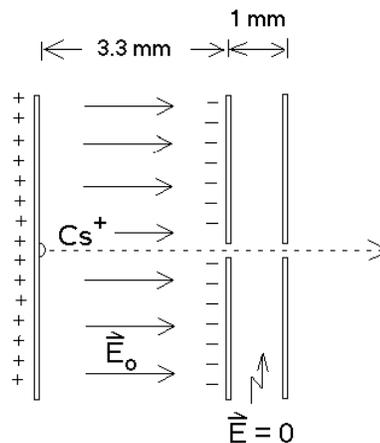


Figura 4.27

(Un deuterón es un núcleo atómico formado por un protón y un neutrón; una partícula  $\alpha$  es equivalente a un núcleo de un átomo de He y consiste en dos protones y dos neutrones. El núcleo de cesio consta de 58 protones y 84 neutrones, el ión  $\text{Cs}^+$  corresponde a un átomo de cesio que ha perdido un electrón).

- 27. Considere una carga  $q$  que en el instante  $t = 0$  se encuentra en el origen y en reposo. A partir de  $t = 0$  se le aplica un campo eléctrico alterno de la forma

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \hat{x} .$$

Encuentre la *ecuación diferencial* que describe el movimiento de la carga y encuentre la expresión más general para la posición  $x(t)$ .

- 28. Un bloque de masa  $M$  sube por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es  $\alpha$ . Los coeficientes de roce estático y cinético entre la masa  $M$  y el plano son  $\mu_e$  y  $\mu_c$ , respectivamente.

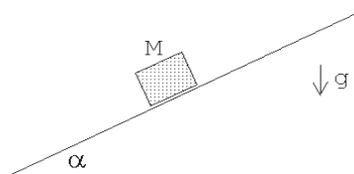


Figura 4.28

- (a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el bloque, si parte con velocidad  $v_0$  desde la base del plano?
- (b) ¿Qué condición debe satisfacerse para que el bloque vuelva a descender?
- (c) En caso de cumplirse la condición anterior, ¿con qué velocidad llegará a la base del plano inclinado?

29. Una masa de 100 kg se empuja a lo largo de una superficie en la cual el roce es despreciable mediante una fuerza  $\vec{F}$ , de modo que su aceleración es de  $6 \text{ m/s}^2$  (ver figura). Una masa de 20 kg desliza a lo largo de la parte superior de la masa de 100 kg y tiene una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$  (por lo tanto desliza hacia atrás respecto a la masa de 100 kg).

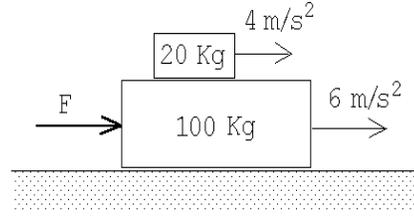


Figura 4.29

- (a) ¿Qué fuerza de rozamiento ejerce la masa de 100 kg sobre la masa de 20 kg?  
 (b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la masa de 100 kg? ¿Cuál es la fuerza  $\vec{F}$ ?  
 (c) Una vez que la masa de 20 kg se cae de la masa de 100 kg, ¿cuál es la aceleración de la masa de 100 kg?

30. Sea  $\mu$  el coeficiente de roce estático entre la masa  $m$  y el carro. ¿Cuál es la fuerza mínima que debe aplicarse al carro para que la masa  $m$  no caiga?

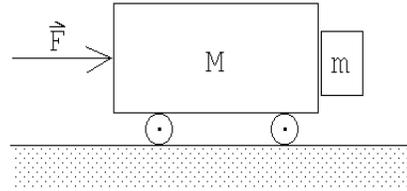


Figura 4.30

Respuesta:  $F^{min} = (M + m)g/\mu$ .

31. Las masas  $A$  y  $B$  son de 10 y 5 Kg respectivamente. El coeficiente de roce de  $A$  con la mesa es  $\mu = 0.2$ . Encuentre el mínimo valor de la masa  $C$  que impide el movimiento de  $A$ . Encuentre la aceleración de  $A$  si se saca  $C$ .

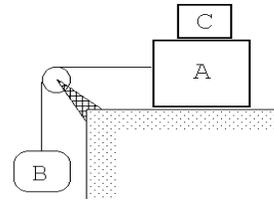


Figura 4.31

32. Una carretera está peraltada de modo que un automóvil, desplazándose a 80 Km/h, puede tomar la curva de 30 m de radio, incluso si existe una capa de hielo equivalente a un coeficiente de fricción aproximadamente cero.

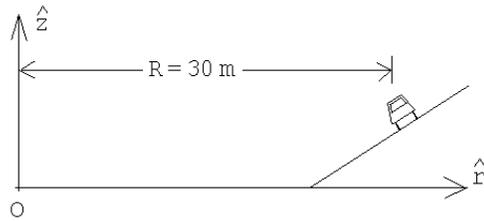


Figura 4.32

Determinar el intervalo de velocidades a que un automóvil puede tomar esta curva sin patinar, si los coeficientes de fricción estática y cinemática, entre la carretera y las ruedas, son  $\mu_e = 0.3$  y  $\mu_c = 0.26$ , respectivamente.

33. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener  $m_3$  para que  $m_1$  no se caiga si el coeficiente de fricción estático entre  $m_1$  y  $m_2$  es  $\mu_e$ , y el de fricción cinemática entre  $m_2$  y la mesa es  $\mu_c$ ?  
 Respuesta:

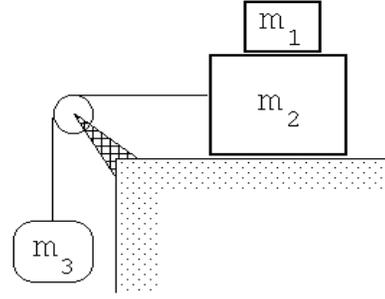


Figura 4.33

$$m_3^{max} = \begin{cases} (m_1 + m_2) \frac{\mu_c + \mu_e}{1 - \mu_e} & \text{si } \mu_e < 1 \\ \infty & \text{si } \mu_e > 1 \end{cases}$$

34. Un bloque de masa  $M$ , inicialmente en reposo, resbala por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es  $\theta$ . Después de recorrer una distancia  $D$  el cuerpo lleva una velocidad igual al 50% de la velocidad que habría adquirido en ausencia de roce. Encuentre una expresión para el coeficiente de roce cinemático  $\mu$  entre el plano y el bloque.

35. Sea  $\mu_c$  el coeficiente de roce cinético entre un escobillón, cuya masa es  $m$ , y el piso. Un hombre ejerce una fuerza  $\vec{F}$  a lo largo del palo del escobillón. Encuentre  $|\vec{F}|$  en función de  $\theta$ . ¿Existe una solución para todo  $\theta$  entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ ? (El barrendero avanza con velocidad uniforme.)

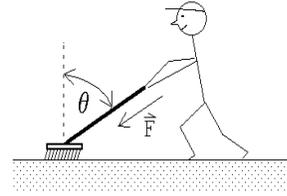


Figura 4.34

36. Una partícula de masa  $M$  descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Si el coeficiente de roce estático es  $\mu_e$ , encuentre la mínima fuerza horizontal  $\vec{F}_{min}$  transversal a la pendiente del plano, que se requiere para que la partícula comience a moverse.

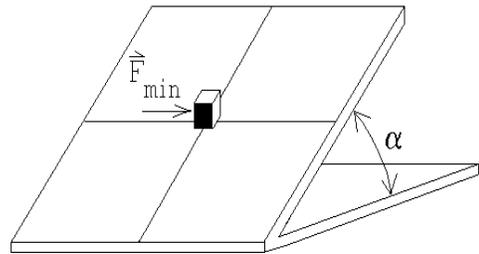


Figura 4.35

Respuesta: 
$$F_{min} = \begin{cases} Mg \sqrt{\mu_e^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} & \text{si } \mu_e > \tan \alpha \\ 0 & \text{si } \mu_e < \tan \alpha \end{cases}$$

37. Considere un paquete, de masa  $m$ , que se mueve sin roce y con rapidez  $v_0$  sobre una superficie de hielo. En cierto instante el paquete entra en contacto con el tablero horizontal de un trineo de masa  $M$ , que a su vez puede deslizarse sin roce sobre el hielo.

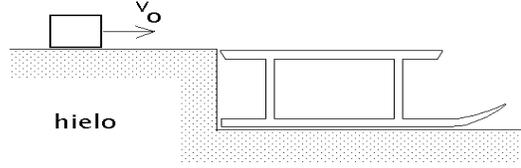


Figura 4.36

Suponga que el coeficiente de roce entre el paquete y el trineo es  $\mu$  y que el paquete se desliza sobre el trineo hasta finalmente quedar en reposo con respecto a éste.

- (a) Una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo, ¿cuál es la velocidad del trineo?
- (b) ¿Cuánto tiempo demora el paquete en quedar en reposo con respecto al trineo?
- (c) Evalúe el momento lineal del paquete antes de que entre en contacto con el trineo y compárelo con el momento lineal del conjunto (trineo más paquete) una vez que el paquete está en reposo respecto al trineo.

(El momento lineal de un objeto es el producto de su masa y velocidad).

38. Con dos bloques A y B se arman las configuraciones I y II que se indican en la figura adjunta. Suponga que las cuerdas y poleas tienen masas despreciables y el coeficiente de roce  $\mu$  es constante y es el mismo entre todas las superficies en contacto. El valor de las fuerzas aplicadas  $F_I$  y  $F_{II}$  es tal que el bloque A se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cociente entre el módulo de  $F_I$  y  $F_{II}$ .

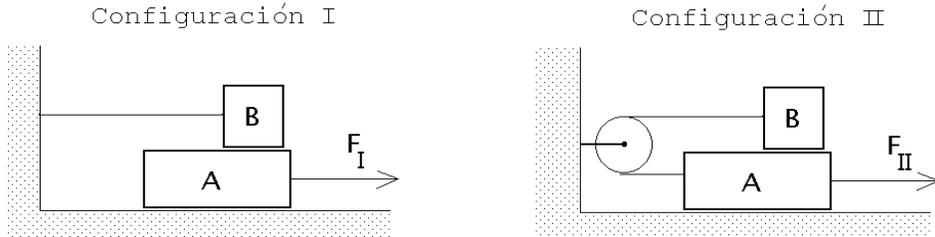


Figura 4.37

39. Considere un cuerpo que cae en la atmósfera. El aire se opone al movimiento con una fuerza que es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir

$$\vec{F}_{roce} = -kv\vec{v} \quad , \quad v = |\vec{v}| .$$

Encuentre la velocidad terminal.

40. Cuando un cuerpo cae en un líquido y el flujo es laminar (es decir, no es turbulento), el fluido se opone al movimiento con una fuerza que es proporcional a la velocidad, es decir

$$\vec{F}_{roce} = -\eta\vec{v} \quad , \quad v = |\vec{v}| .$$

Encuentre la velocidad terminal. (El coeficiente  $\eta$  depende del fluido y de la forma del objeto).

41. Sea  $\mu$  el coeficiente de roce cinemático que actúa entre las superficies de la masa  $m$  y las cuñas (ver figura adjunta). Entre las cuñas y el suelo el roce es nulo. Suponga que el valor del roce  $\mu$  es tal que el sistema no se encuentra en equilibrio (es decir, las cuñas se separan y el bloque baja). Sea  $\theta$  el ángulo,  $M$  la masa de las cuñas y  $m$  la masa del bloque. Determine la aceleración del bloque  $m$ .

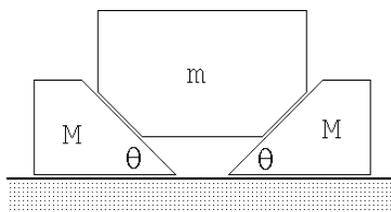


Figura 4.38

42. Sobre un plano inclinado liso, que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, se desliza un bloque partiendo del reposo. Después de recorrer una distancia  $D$ , el bloque entra en un tramo rugoso. El bloque se detiene luego de recorrer una distancia  $D$  en dicho tramo. Calcule el coeficiente de roce cinético entre el bloque y la superficie rugosa.

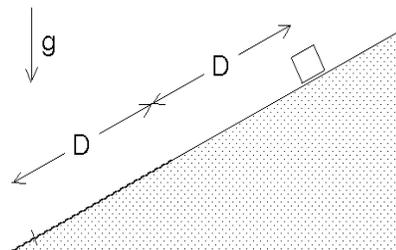


Figura 4.39

## 4.6 Solución a algunos de los problemas

### Solución al problema 12a

Al pasar la plataforma por la cresta de la colina hay dos fuerzas actuando sobre la caja:

- i) El peso,  $\vec{W} = -Mg\hat{z}$ . (Hemos elegido al eje  $\hat{z}$  apuntando hacia arriba,  $M$  es la masa de la caja.)

ii) La reacción de la pesa sobre la caja:  $\vec{F}_r = F_r \hat{z}$ .

La fuerza neta es, por lo tanto,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = (F_r - Mg) \hat{z} .$$

Por otra parte, sabemos que la caja está realizando un movimiento circular de radio  $R$  con rapidez constante, o sea, hay una fuerza neta sobre la caja que actúa hacia el centro del círculo (la fuerza centrípeta), que es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{Mv^2}{R} \hat{z} .$$

La fuerza centrípeta y la fuerza neta deben ser iguales, es decir, se tiene que

$$F_r - Mg = -\frac{Mv^2}{R} .$$

Despejando  $F_r$  se obtiene

$$\begin{aligned} F_r &= Mg \left( 1 - \frac{v^2}{gR} \right) \\ &= 500\text{N} \left( 1 - \frac{14^2}{9,81 \cdot 100} \right) \simeq 400 \text{ N} . \end{aligned}$$

### Solución al problema 16

Observe primero que, al moverse la cuña hacia la derecha, el bloque  $m$  se moverá en diagonal (hacia la derecha y hacia abajo). Sea  $\vec{r}_m$  el vector de traslación de  $m$  cuando la cuña se traslada en una magnitud  $s$ . Se tiene (ver figura 4.40) que

$$\vec{r}_m = s(1 - \cos \alpha) \hat{x} - s \sin \alpha \hat{y} .$$

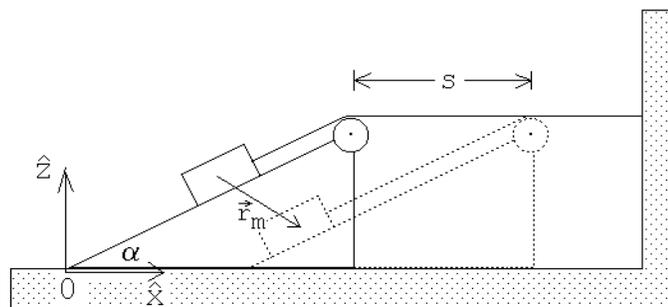


Figura 4.40

Por supuesto que la aceleración de la cuña  $M$  y del bloque  $m$  están relacionados. Si la aceleración de la cuña es

$$\ddot{\vec{r}}_M = a \hat{x},$$

entonces

$$\ddot{\vec{r}}_m = a(1 - \cos\alpha)\hat{x} - a \sin\alpha \hat{z}. \quad (4.6)$$

Sea  $\tau$  la tensión de la cuerda y  $\vec{R}$  la fuerza que la cuña ejerce sobre el bloque  $m$ . Debido a que no hay roce entre las superficies, esta fuerza de reacción  $\vec{R}$  es normal al plano inclinado.

La figura 4.41 muestra el diagrama de cuerpo libre para la masa  $m$ . Las componentes horizontal y vertical de la fuerza neta que actúa sobre el bloque  $m$  son

$$F_x^{(m)} = \tau \cos\alpha - R \sin\alpha \quad (4.7)$$

y

$$F_z^{(m)} = -mg + \tau \sin\alpha + R \cos\alpha, \quad (4.8)$$

respectivamente.

Usando la segunda ley de Newton y las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8), se encuentran las relaciones

$$\tau \cos\alpha - R \sin\alpha = m a (1 - \cos\alpha) \quad (4.9)$$

y

$$-mg + \tau \sin\alpha + R \cos\alpha = -m a \sin\alpha \quad (4.10)$$

Sobre la cuña actúan 4 fuerzas:

- i) El peso  $-Mg\hat{z}$ .
- ii) Una fuerza (de reacción)  $\vec{R}$  que el suelo ejerce sobre la cuña. Esta fuerza, cuya magnitud no nos interesará, actúa en la dirección  $+\hat{z}$ .
- iii) Una fuerza que el bloque  $m$  ejerce sobre la cuña. Por el principio de acción esta fuerza es  $-\vec{R}$ , o sea, las componentes horizontal y vertical son  $R \sin\alpha$  y  $-R \cos\alpha$ , respectivamente.

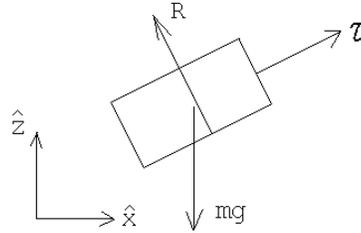


Figura 4.41

- iv) La fuerza ejercida por la roldana sobre la cuña (que es igual a la fuerza ejercida por la cuerda sobre la roldana). De la figura 4.42 se deduce que la fuerza total que ejerce la cuerda sobre la roldana es

$$\vec{F}_c = \tau(1 - \cos \alpha)\hat{x} - \tau \sin \alpha \hat{z} .$$

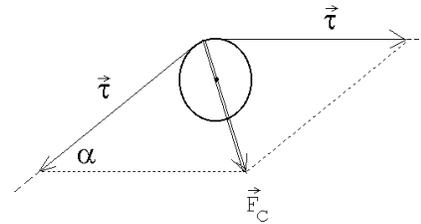


Figura 4.42

La cuña sólo se mueve a lo largo de la horizontal; por eso sólo nos interesa esa componente de la fuerza neta. Usando la segunda ley de Newton se obtiene

$$R \sin \alpha + \tau(1 - \cos \alpha) = Ma . \tag{4.11}$$

Las tres ecuaciones de movimiento (4.9), (4.10) y (4.11) con las tres incógnitas  $a$ ,  $\tau$  y  $R$ , permiten resolver el problema. Sumando (4.9) y (4.11) se obtiene

$$\tau = ma(1 \cos \alpha) + Ma \tag{4.12}$$

Multiplicando (4.9) por  $\cos \alpha$  y (4.10) por  $\sin \alpha$  y sumando ambas ecuaciones se obtiene

$$\tau = mg \sin \alpha + ma(\cos \alpha - 1) \tag{4.13}$$

De (4.12) y (4.13) se deduce finalmente que

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} .$$

### Solución al problema 22

La relación entre las aceleraciones es  $a_m = a_M \tan \alpha$ . Los diagramas de cuerpo libre de la masa  $m$  y de la cuña se muestran en la figura 4.43.  $F_N$  es la fuerza entre la masa  $m$  y la cuña.

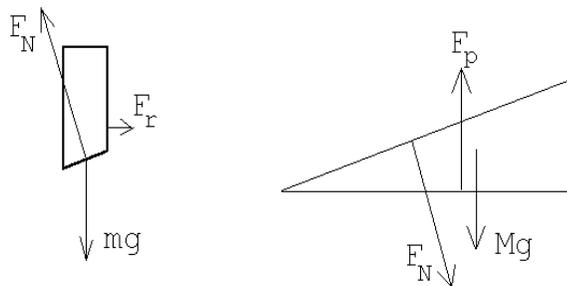


Figura 4.43

Debido a que no hay roce esta fuerza es normal al plano inclinado de la cuña.  $F_r$  es la fuerza que la guía ejerce sobre el bloque  $m$  (tal fuerza es perpendicular a la guía.)  $F_p$  es la fuerza que el piso ejerce sobre la cuña; en ausencia de roce esta fuerza es perpendicular al piso.

Las ecuaciones de movimiento para la masa  $m$  y la cuña son:

$$mg - F_N \cos \alpha = ma_m$$

y

$$F_N \sin \alpha = Ma_M .$$

Usando la relación entre las aceleraciones  $a_m$  y  $a_M$ , podemos despejar  $a_M$ , obteniéndose

$$a_M = g \frac{m \tan \alpha}{M + m \tan^2 \alpha} .$$

Si, debido al roce entre el suelo y la cuña el sistema está en equilibrio, entonces la suma de las fuerzas sobre  $m$  debe ser nula. Esto permite evaluar  $F_N$  de inmediato:

$$F_N \cos \alpha = mg .$$

Al diagrama de cuerpo libre de la cuña hay que agregar una fuerza de roce  $f_r$  horizontal (apuntando hacia la izquierda). Que la suma de las fuerzas horizontales sobre la cuña sean nulas nos da la relación

$$F_N \sin \alpha = f_r ,$$

o sea,

$$mg \tan \alpha = f_r .$$

Por otra parte, la fuerza de roce debe satisfacer la relación

$$f_r \leq \mu_e F_p = \mu_e (Mg + F_N \cos \alpha) = \mu_e (M + m)g .$$

De las relaciones anteriores se desprende que

$$mg \tan \alpha = \mu_e^{\min} (M + m)g ,$$

o sea,

$$\mu_e^{\min} = \frac{m}{m + M} \tan \alpha .$$

### Solución al problema 24

Del hecho que la velocidad angular es constante y las masas 1 y 2 siguen trayectorias circulares, se deduce que la fuerza neta que actúa sobre ellas es

$$\vec{F}_1 = -m\omega_0^2 (R + L) \hat{r}$$

y

$$\vec{F}_2 = -m\omega_0^2 R \hat{r} ,$$

respectivamente. Aquí  $m$  es la masa de cada una de partículas y  $\hat{r}$  es un vector unitario que apunta en la dirección radial.

La única fuerza radial real que actúa sobre la masa 1 es la que ejerce la cuerda, luego

$$\tau = m\omega_0^2 (R + L) ,$$

donde  $\tau$  es la tensión de la cuerda.

Sobre la partícula 2 actúan dos fuerzas radiales: la tensión de la cuerda  $\tau \hat{r}$  y la fuerza de roce  $-f_r \hat{r}$ . Se tiene

$$\tau - f_r = -m\omega_0^2 R$$

o sea,

$$f_r = \tau + m\omega_0^2 R = m\omega_0^2 (2R + L) .$$

Para que las masas no se deslicen la fuerza de roce debe satisfacer la desigualdad  $f_r \leq \mu_e mg$ . De las dos últimas ecuaciones se deduce que

$$m\omega_0^2 (2R + L) \leq \mu_e mg .$$

La velocidad angular límite a partir de la cual las masas comienzan a deslizarse es, por lo tanto,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_e g}{2R + L}} .$$

### Solución al problema 26

Sea  $M$  la masa,  $a$  la aceleración y  $t_*$  el tiempo que tardan las partículas de  $\text{Cs}^+$  en atravesar el *condensador*. La carga de cada ión de cesio es  $q = -e$ , donde  $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$  [C] es la carga de un electrón (ver problema 25). Durante el proceso de aceleración, la fuerza que actúa sobre cada ión es  $F = qE_0$ . Usando la segunda ley de Newton se obtiene que  $qE_0 = Ma$ . La aceleración del átomo de cesio (mientras se mueve al interior del condensador) es, por lo tanto,  $a = q/(ME_0)$ . El movimiento es uniformemente acelerado.

Durante el intervalo de tiempo  $[0, t_*]$  el ión alcanza a recorrer una distancia

$$s_1 = \frac{1}{2} at_*^2 = 0,33 \text{ cm},$$

siendo la velocidad con que emerge del condensador  $v_1 = at_*$ . A continuación los iones de cesio atraviesan con esa velocidad constante una región de ancho  $s_2 = 0,1$  cm, tardando para ello un tiempo  $\Delta t = 87 \cdot 10^{-9}$  s. Se tiene que

$$v_1 \Delta t = at_* \Delta t = s_2 ,$$

o sea

$$t_* = \frac{s_2}{a\Delta t}.$$

Por otra parte

$$t_*^2 = \frac{2s_1}{a}.$$

Eliminando  $t_*$  de las dos últimas ecuaciones se encuentra

$$a = \frac{s_2^2}{2s_1(\Delta t)^2}.$$

Igualando las dos expresiones que tenemos para la aceleración podemos despejar  $M$  (la masa de cada ión de cesio):

$$M = \frac{2|e|E_0s_1(\Delta t)^2}{s_2^2} = 2,4 \cdot 10^{-25} \text{ Kg}.$$

Cada ión de  $\text{Cs}^+$  está formado por 58 protones, 84 neutrones y 57 electrones. La masa de los electrones es despreciable frente al de los protones y neutrones y por consiguiente, lo ignoraremos. La masa de un neutrón es muy parecida a la de un protón y, en primera aproximación, podemos suponer que son iguales. En lo que a masa respecta, el ión de cesio lo podemos pensar como un aglomerado de  $58+84=142$  nucleones. (Nucleones es el nombre genérico que se le da a los protones y neutrones). Dividiendo la masa del ión de cesio por 142 se encuentra que la masa de un nucleón es aproximadamente  $1,69 \cdot 10^{-27}$  Kg, valor que difiere en  $\sim 1\%$  del valor medido usando otros métodos.

Al acelerar deuterones (un protón + un neutrón) en lugar de iones de cesio, sólo cambia la masa ya que, igual que en el caso del cesio, la carga neta del deuterón es  $+|e|$  (o sea, la fuerza que actúa sobre la partícula acelerada en ambos casos es la misma). El tiempo de travesía  $\Delta t$  es proporcional a  $\sqrt{M}$  luego, al usar deuterones en lugar de iones de cesio, el tiempo de travesía será

$$\Delta t_d = \Delta t_{\text{Cs}} \sqrt{\frac{142}{2}} \simeq 10^{-8} \text{ s}.$$

El dispositivo experimental no es capaz de distinguir entre deuterones y partículas  $\alpha$ . La partícula  $\alpha$  (2 protones + 2 neutrones) tiene el doble de la masa del deuterón y también el doble de la carga neta. Estas dos modificaciones se cancelen en cuanto a la aceleración respecta, siendo por consiguiente ambas iguales.

**Solución al problema 27**

La fuerza que actúa sobre la carga (ver problema 25) es

$$\vec{F}(t) = q\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x} .$$

Usando la segunda ley de Newton obtenemos las *ecuaciones de movimiento*:

$$m \ddot{x}(t) = qE_0 \sin(\omega t)$$

$$m \ddot{y}(t) = 0$$

y

$$m \ddot{z}(t) = 0 .$$

De las dos últimas, usando las condiciones iniciales se deduce que

$$y(t) = z(t) = 0 \quad \forall t ,$$

o sea, el movimiento sólo ocurre a lo largo del eje  $x$ .

Integremos la primera ecuación de movimiento. Se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \int_0^t \frac{qE_0}{m} \sin(\omega t) dt \\ &= 0 - \frac{qE_0}{m\omega} \cos(\omega t) \Big|_0^t \\ &= \frac{qE_0}{m\omega} (1 - \cos(\omega t)) . \end{aligned}$$

La posición de la carga en función del tiempo se obtiene integrando la última ecuación:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{qE_0}{m\omega} \int_0^t (1 - \cos(\omega t)) dt \\ &= 0 + \frac{qE_0}{m\omega} \left( t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{qE_0}{m\omega^2} (\omega t - \sin(\omega t)) . \end{aligned}$$

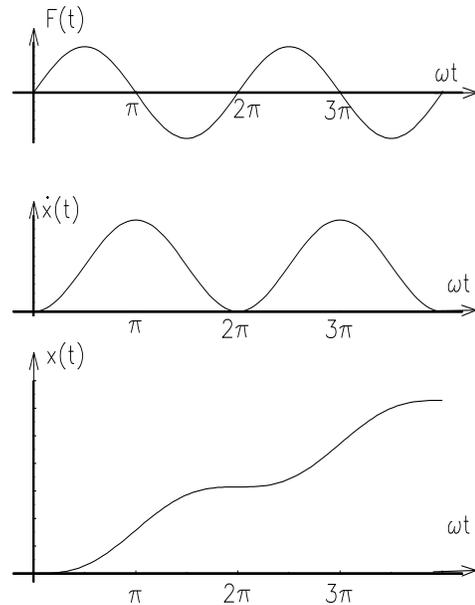


Figura 4.44

La figura 4.44 muestra un gráfico de la fuerza, la velocidad y la posición de la carga en función del tiempo.

**Solución al problema 32**

De acuerdo con el enunciado, si la rapidez del coche es  $v_0 = 80 \text{ km/h}$ , no actuará ninguna fuerza de roce. Como la trayectoria del automóvil es circular, se tiene que el movimiento es acelerado y, por lo tanto, sobre el coche actúa una fuerza neta hacia el centro de giro  $O$  (la fuerza centrípeta):

$$\vec{F}_c = -\frac{mv_0^2}{R} \hat{r} .$$

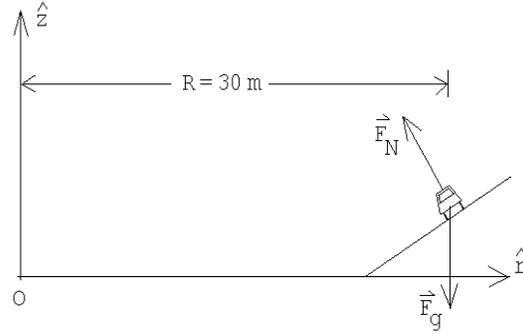


Figura 4.45

Las fuerzas “reales” que actúan sobre el auto (y cuya suma da origen a la fuerza centrípeta) son la fuerza de gravedad

$$\vec{F}_g = -mg \hat{z}$$

y la fuerza normal que la carretera ejerce sobre el coche:

$$\vec{F}_N = F_N \cos \theta \hat{z} - F_N \sin \theta \hat{r} .$$

Por supuesto que

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{F}_N ,$$

o sea,

$$-\frac{mv_0^2}{R} \hat{r} = -mg \hat{z} + F_N \cos \theta \hat{z} - F_N \sin \theta \hat{r} .$$

Igualando las componentes se deduce que

$$F_N \cos \theta = mg$$

y

$$F_N \sin \theta = \frac{mv_0^2}{R} .$$

Tomando el cociente entre estas ecuaciones se encuentra una expresión que nos permite encontrar el ángulo del peralte de la carretera  $\theta$ :

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{Rg} .$$

Sea  $v_1$  la máxima velocidad que el automóvil puede tener sin que se deslice lateralmente por la carretera. Si el automóvil avanza con rapidez  $v_1$ , entonces además

de la fuerza de gravedad y la fuerza normal, actuará también una fuerza de roce estática  $\vec{F}_r$ :

$$\vec{F}_r = -F_r \cos \theta \hat{r} - F_r \sin \theta \hat{z} .$$

Cuando el automóvil avanza con velocidad máxima  $v_1$ , el valor de la fuerza de roce tomará el valor máximo posible  $F_r = \mu_e F_N$ . (observe que el coeficiente de roce que debe usarse es el estático y no el cinemático). Se tiene

$$\vec{F}_c = -\frac{mv_1^2}{R} \hat{r} = -mg\hat{z} + F_N \cos \theta \hat{z} - F_N \sin \theta \hat{r} - F_r \cos \theta \hat{r} - F_r \sin \theta \hat{z} ,$$

o sea

$$-\frac{mv_1^2}{R} = -F_N \sin \theta - F_r \cos \theta$$

y

$$0 = -mg + F_N \cos \theta - F_r \sin \theta .$$

Con  $F_r = \mu_e F_N$  se encuentra

$$\frac{mv_1^2}{R} = F_N (\sin \theta + \mu_e \cos \theta)$$

y

$$mg = F_N (\cos \theta - \mu_e \sin \theta) .$$

Eliminando  $F_N$  y desajando  $v_1$  de las dos últimas ecuaciones se obtiene finalmente

$$v_1^2 = Rg \left( \frac{v_0^2 + Rg\mu_e}{Rg - \mu_e v_0^2} \right) .$$

Este resultado es válido mientras  $Rg > \mu_e v_0^2$ . Cuando  $Rg < \mu_e v_0^2$ , el coche nunca se deslizará lateralmente hacia afuera y la velocidad máxima a la que se puede transitar por la carretera, en ese caso, es infinita.

Sea  $v_2$  la mínima velocidad con que se puede transitar sobre la carretera sin deslizarse lateralmente hacia el interior. El análisis en este caso es análogo al anterior, excepto que la fuerza de roce estática ahora actúa en la dirección opuesta. Para  $v_2$  se encuentra

$$v_2^2 = Rg \left( \frac{v_0^2 - Rg\mu_e}{Rg + \mu_e v_0^2} \right) .$$

Este resultado es válido mientras  $Rg\mu_e < v_0^2$ . Cuando  $Rg\mu_e > v_0^2$ , el coche nunca se deslizará lateralmente hacia el interior, pudiendo permanecer incluso en reposo (siendo, en ese caso,  $v_2 = 0$ ).

Para los valores numéricos del enunciado las velocidades máxima y mínima con que se puede transitar por la carretera son  $v_1 = 123$  km/h y  $v_2 = 59$  km/h.

**Solución al problema 39**

Sea  $v_*$  la velocidad terminal que un cuerpo adquiere al caer en la atmósfera. Al caer con la velocidad terminal el cuerpo se moverá con velocidad constante. O sea, la aceleración y la fuerza neta sobre el cuerpo deben ser nulas. Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la fuerza de gravedad  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$  y la fuerza de roce  $\vec{F}_{roce} = -kv_*\vec{v}_* = kv_*^2\hat{z}$ . Se tiene

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{roce} = -mg\hat{z} + kv_*^2\hat{z} = 0 ,$$

o sea,

$$v_* = \sqrt{\frac{mg}{k}} .$$

**Solución al problema 41**

Denotemos por  $\vec{a} = -a\hat{z}$  la aceleración del bloque  $m$ . Las fuerzas verticales sobre el bloque  $m$  nos dan la ecuación de movimiento

$$-mg + 2F_N \cos \theta + 2F_r \sin \theta = -ma .$$

Como los bloques están en movimiento relativo, la fuerza de roce es de origen cinemático y se tiene que

$$F_r = \mu F_N .$$

La fuerza que el bloque  $m$  ejerce sobre la cuña viene dada por  $-\vec{F}_N - \vec{F}_r$ . La componente horizontal de esta fuerza nos entrega la ecuación de movimiento

$$-F_r \cos \theta + F_N \sin \theta = Mb$$

donde  $b$  es la magnitud de la aceleración de las cuñas. Las dos aceleraciones no son independientes sino que están relacionadas por

$$\frac{a}{b} = \tan \theta .$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Despejando la aceleración  $a$  obtenemos

$$a = g \left( 1 + 2 \frac{M}{m} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \right)^{-1} .$$

Para  $\mu = \tan \theta$ , la aceleración es nula.

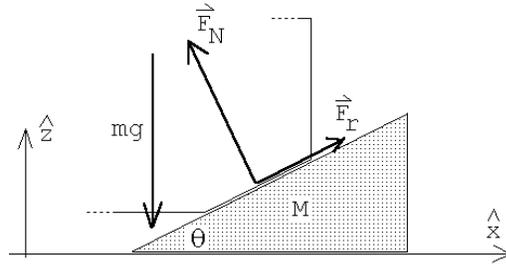


Figura 4.46

**Solución al problema 42**

Durante el primer tramo de largo  $D$  la partícula acelera uniformemente y después *desacelera* uniformemente quedando en reposo después de recorrer otro tramo de largo  $D$ . Es evidente que la aceleración durante el segundo tramo debe tener la misma magnitud que en el primero, siendo el signo el opuesto. En otras palabras, la fuerza neta  $F_1$  que actúa sobre la masa en el tramo 1 debe ser la opuesta de la fuerza neta en el tramo 2,  $F_2$ .

En el primer tramo la única fuerza a lo largo del plano inclinado es la componente en esa dirección del peso, esto es,  $F_1 = mg \sin \theta$ .

En el segundo tramo aparece adicionalmente la fuerza de roce  $f_r$ . Esta, para dar una fuerza neta  $F_2 = -F_1$  debe ser

$$f_r = -2 F_1 = -2mg \sin \theta .$$

Por otra parte, la fuerza de roce (cinemática) es

$$f_r = -\mu_c mg \cos \theta .$$

Igualando las dos expresiones para  $f_r$  y despejando  $\mu_c$  se obtiene, finalmente,

$$\mu = 2 \tan \theta .$$

## Capítulo 5

# Trabajo y energía

versión 23 junio 2008

Podemos considerar los capítulos anteriores como un progresivo camino de simplificación en la descripción del movimiento. Primero, observamos que, para describir el movimiento de una partícula, requerimos conocer su posición, velocidad y aceleración. En una dimensión éstas son tres funciones del tiempo; en tres dimensiones, nueve. Eventualmente, introduciendo Matemática adicional (derivadas e integrales), aprendemos que no necesitamos tantas funciones, sino sólo tres (digamos, las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  para todo tiempo). E introduciendo el concepto adicional de vectores, podemos reducir esto a una sola función, el vector posición para todo tiempo. A continuación aprendimos que, en realidad, no necesitamos conocer la posición, o la aceleración, para todo tiempo, sino la fuerza. También es un vector, y por lo tanto también son tres funciones, como la posición, pero la fuerza no necesariamente depende del tiempo, y es por tanto un punto de partida mucho más sencillo para describir el movimiento.

En este capítulo aprenderemos que es posible hacer una simplificación adicional: en realidad tampoco necesitamos la fuerza, que equivale a tres funciones escalares, sino que basta con una única función escalar: la energía. Esto permitirá una gran simplificación en la descripción del movimiento, una simplificación que dará pie, eventualmente, a una formulación mucho más elegante de la Mecánica. Y no sólo más elegante, sino también más poderosa y generalizable a otros ámbitos de la Física. En este curso, sin embargo, nos limitaremos a explorar las consecuencias más básicas de la simplificación y elegancia que mencionamos. El resto, será tema de cursos más avanzados.

## 5.1 Trabajo y energía para movimientos en una dimensión

Consideremos una partícula de masa  $m$ , restringida a moverse a lo largo del eje  $\hat{z}$ , siendo  $z(t)$  y  $v(t)$  la posición y velocidad de la partícula a medida que transcurre el tiempo. En particular, sean  $z_i$  y  $v_i$  la posición y velocidad de la partícula en el instante  $t_i$ , y  $z_f$  y  $v_f$  la las mismas magnitudes en el instante  $t_f$ . Supongamos además que, a medida que la partícula se traslada, ejercemos sobre ella una fuerza  $F(z)$ , fuerza que podría depender de la posición  $z$ .

Analicemos varios casos:

- a) Si la partícula, excepto por la fuerza que le estamos aplicando, es libre, entonces acelerará. Si la fuerza  $F(z) = F_0$  es constante (es decir, no depende de la posición), entonces la aceleración también lo será, teniéndose  $F_0 = ma_0$ . De acuerdo a la cinemática de un objeto uniformemente acelerado, en el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$ , la posición y velocidad de la partícula en el instante  $t + \Delta t$  serán

$$\begin{aligned} z(t + \Delta t) &= z(t) + v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2, \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + a_0 \Delta t. \end{aligned}$$

Las variaciones de la posición y la velocidad son, entonces,

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) = v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2$$

y

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = a_0 \Delta t.$$

Multipliquemos ahora la primera ecuación por  $F_0$ . Nunca hemos necesitado hasta ahora la cantidad  $F_0 \Delta z$ , pero ya veremos la utilidad de hacerlo. Usemos, además, consecutivamente, la segunda ley de Newton y la expresión para  $\Delta v$ . De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} F_0 \Delta z &= F_0 v(t) \Delta t + \frac{1}{2} F_0 a_0 (\Delta t)^2 \\ &= m a_0 v(t) \Delta t + \frac{1}{2} m (a_0 \Delta t)^2 \\ &= m v(t) [v(t + \Delta t) - v(t)] + \frac{1}{2} m [v(t + \Delta t) - v(t)]^2 \\ F_0 \Delta z &= \frac{1}{2} m v^2(t + \Delta t) - \frac{1}{2} m v^2(t). \end{aligned}$$

Como la fuerza es constante, las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier  $\Delta t$ , en particular para  $t = t_i$  y  $t + \Delta t = t_f$ , en cuyo caso

$$F_0 \cdot (z_f - z_i) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2.$$

Observemos con cuidado este resultado: sólo conocemos la posición inicial, la posición final, y la fuerza, que es constante. Sabemos que el movimiento entre  $z_i$  y  $z_f$  es complicado (la velocidad aumenta linealmente con el tiempo, la posición aumenta cuadráticamente), pero nada de eso es relevante ahora. Podemos afirmar, sólo con esta información, que si escogemos dos puntos arbitrarios de la trayectoria,  $z_i$  y  $z_f$ , la cantidad  $F_0(z_f - z_i)$  será igual a la diferencia de una función, *la misma función* ( $mv^2/2$ ), evaluada en dichos puntos. Esto es, en cierto modo, extraordinario. En la búsqueda de una descripción adecuada del movimiento habíamos concluido que tomar dos puntos arbitrarios de una trayectoria es insuficiente, viéndonos en la necesidad de definir velocidad y aceleración instantáneas, y en definitiva, introducir los elementos de toda un área de la Matemática, el Cálculo Infinitesimal. Ahora, sin embargo, estamos diciendo exactamente lo opuesto: a usted le basta tomar el principio y el final de la trayectoria, eventos que pueden estar arbitrariamente separados en el tiempo. Se podría objetar que este resultado es restringido, pues no estamos describiendo el movimiento completo, sino sólo calculando algo muy particular,  $F_0(z_f - z_i)$ , y además para un caso en que la fuerza es constante. Veremos, sin embargo, que ambas objeciones se pueden responder satisfactoriamente, y por tanto, el resultado que acabamos de obtener es el punto de partida de la formulación más elegante de la Mecánica que hemos sugerido.

Como dijimos, la cantidad  $F_0(z_f - z_i)$  resulta ser igual a la diferencia de cierta función, evaluada en ambos extremos de la trayectoria. A dicha función la llamamos *energía*. Específicamente, como en este caso dicha energía depende de la velocidad, la denominaremos *energía cinética*, denotándose habitualmente con las letras  $K$  o  $T$ . Por otra parte, a la cantidad  $F_0(z_f - z_i)$ , que es el producto entre la fuerza y el desplazamiento, se le denomina *trabajo*, y se le denota usualmente con la letra  $W$ . Es decir, el resultado para una partícula sometida a una fuerza constante se puede reescribir

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = K_f - K_i .$$

En el lenguaje del capítulo anterior, habríamos dicho que ejercer una fuerza sobre una partícula se traduce en un cambio de velocidad de la misma. Ahora, decimos que ejercer un trabajo sobre una partícula se traduce en un cambio de su energía cinética. El trabajo realizado es, de hecho, exactamente igual al cambio de su energía cinética. Independiente de cuánto tiempo le tome.

En Física, trabajo y energía es esencialmente lo mismo. Son conceptos distintos, pero al menos tienen las mismas unidades: en el sistema internacional de unidades SI,  $mv^2/2$  y  $F_0z$  tienen unidades de newton · metro, que definimos como *joule* (J):

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \cdot \text{metro} ,$$

o sea,

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} .$$

- b) Si la fuerza no es constante, entonces subdividamos la trayectoria de la partícula en  $N$  intervalos de tamaño  $\Delta z$ . Denotemos las distintas posiciones por  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, z_{N+1}$ , siendo  $z_i = z_1$  y  $z_f = z_{N+1}$ . Si en cada intervalo  $j$  la fuerza se mantiene relativamente constante, podemos usar el resultado de la parte a), o sea,

$$W_{z_j \rightarrow z_{j+1}} = F(z_j) \cdot (z_{j+1} - z_j) = F(z_j) \cdot \Delta z = K_{j+1} - K_j ,$$

siendo natural definir el trabajo total como la suma de los trabajos ejercidos sobre la partícula en cada intervalo de tiempo.

Sumando la contribución de todos los intervalos se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N F(z_j) \cdot \Delta z &= (K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) + (K_4 - K_3) + \dots + (K_{N+1} - K_N) \\ &= K_{N+1} - K_1 , \end{aligned}$$

o sea,

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = \sum_{j=1}^N F(z_j) \cdot \Delta z = K_f - K_i .$$

La expresión anterior es exacta en el límite  $N \rightarrow \infty$ , de modo que el tamaño de los intervalos  $\Delta z$  se torna infinitesimalmente pequeño. En este caso,  $\Delta z$  es un  $dz$ , y la sumatoria es una integral, teniéndose

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = \int_i^f F(z) \cdot dz = K_f - K_i .$$

Observamos que hemos obtenido exactamente el mismo resultado que para una fuerza constante, y por lo tanto lo que dijimos en el ítem anterior sigue siendo cierto: independiente del tiempo que transcurra entre dos mediciones, independiente incluso de cómo varíe la fuerza entre dichas dos mediciones (y por lo tanto el detalle de posiciones, velocidades y aceleraciones intermedias), cuando calculamos el *trabajo* ejercido por la fuerza a lo largo de la trayectoria, dicho trabajo resulta ser igual simplemente a la diferencia de una cierta función (la energía cinética), evaluada en el punto final y en el punto inicial.

- c) Supongamos ahora que la partícula no es libre, sino que está inmersa en un campo gravitacional constante  $\vec{g} = -g\hat{z}$ . Levantemos la partícula desde  $z_i$  hasta  $z_f$ , partiendo desde el reposo y volviendo a dejarla en reposo. Elevamos la

partícula aplicando una fuerza de manera que ésta suba con una velocidad constante. Mientras la partícula va subiendo, su aceleración es nula, luego también la fuerza neta que actúa sobre ella. De lo anterior se desprende que la fuerza que debemos ejercer para elevar la partícula es  $F(z) = +mg$ . El trabajo que nosotros realizamos es la integral de esta fuerza a lo largo de la trayectoria, es decir,

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = +mg \cdot (z_f - z_i) .$$

Observamos que, nuevamente, el trabajo ejercido es igual a la diferencia de una cierta función ( $mgz$ ) evaluada en los puntos inicial y final de la trayectoria. Siguiendo la analogía con el caso anterior, entonces, diremos que esta función es también una energía (tiene las unidades adecuadas, por supuesto). Ésta, sin embargo, es una energía de carácter distinto. El trabajo no se ha traducido en un cambio de energía cinética, porque como la fuerza neta es cero, la velocidad es la misma en ambos extremos de la trayectoria. Sin embargo, es claro que algo ha cambiado en la partícula, porque después de aplicada la fuerza la partícula se encuentra más arriba. Diremos que lo que ha ocurrido es un cambio de *energía potencial*, porque cambia la “potencialidad” de la partícula para realizar trabajo o de adquirir energía cinética.

En efecto, al dejar caer la partícula sin restricciones desde  $z_f$  hasta  $z_i$ , adquirirá una velocidad que, de acuerdo a las ecuaciones de la cinemática de la caída libre, es  $v_f = \sqrt{2g(z_f - z_i)}$ . Para esta velocidad, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2g(z_f - z_i) = mgz_f - mgz_i .$$

Pero éste es exactamente igual al cambio de energía de la partícula al elevarse. Entonces podemos decir que, al ejercer trabajo sobre ella hasta elevarla una altura  $z_f - z_i$ , aunque no cambió su energía cinética, sí cambió algo en ella, porque ahora, si la dejamos libre, es capaz de llegar al punto inicial con una velocidad mayor. Por ello decimos que la energía que cambia al elevarla es potencial, que no se manifiesta directamente.

Otra forma en que puede manifestarse esta “potencialidad” de la partícula consiste en hacer que ella realice trabajo. Por ejemplo, podemos atarla a una cuerda de modo que, por medio de un sistema de poleas, eleve otra masa.

Observemos, incidentalmente, que la manera en que describimos un sistema es completamente distinta ahora que hemos introducido el concepto de energía: ejercemos un trabajo sobre la partícula, que se traduce en un cambio de su energía potencial. Y al dejarla caer, esa energía potencial se traduce en energía cinética al volver al suelo. En definitiva, el trabajo ejercido por nosotros se convirtió en energía cinética, a través de sucesivas transformaciones.

De acuerdo a lo desarrollado más arriba, también en este ejemplo podemos expresar el trabajo  $W_{z_i \rightarrow z_f}$  como una diferencia de cierta magnitud evaluada en el punto final menos la misma magnitud evaluada en el punto de partida:

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = U(z_f) - U(z_i) ,$$

donde  $U(z)$  es la *energía potencial*. (Se designa usualmente con las letras  $U$  o  $V$ .) Para una partícula de masa  $m$  en el campo gravitacional constante  $\vec{g} = -g\hat{z}$ , que viene dada por

$$U(z) = U_0 + mgz ,$$

con  $U_0$  es cierta constante arbitrara, que depende de en qué punto diremos que la energía potencial es nula. Veremos en breve que, cuando la partícula está sometida a otros campos de fuerza, también puede definirse una energía potencial respectiva. Por ello, podemos también especificar que la anterior corresponde a la *energía potencial gravitatoria*.

Hemos introducido una constante  $U_0$ , ya que el trabajo sólo depende de la diferencia de la energía potencial entre dos puntos, y esta constante es, en ese sentido irrelevante.  $U_0$  corresponde simplemente a la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra en  $z = 0$ . Cuando definimos energía cinética, ya que también el trabajo depende sólo de su diferencia, podríamos haber introducido una constante aditiva  $K_0$ . No lo hicimos, ya que tiene mucho sentido decir que la partícula, cuando está en reposo, tiene energía cinética cero. En el caso de la energía potencial gravitatoria, en cambio, no existe ninguna razón de peso para pensar que debe ser cero cuando  $z = 0$ . Por ejemplo, si la energía potencial indica la “capacidad” de ejercer trabajo, o de adquirir energía cinética al llegar al suelo luego de una caída libre, podríamos pensar en la siguiente situación: digamos que  $z = 0$  corresponde no al suelo, sino a la superficie de una mesa que está a cierta altura  $h$  respecto al suelo. Si una manzana se encuentra sobre la mesa, es cierto que si la hacemos rodar hasta el borde de la mesa, y cae, adquirirá una energía cinética. Eso significa que tenía una energía potencial en primer lugar. Por lo tanto, no sería “correcto” decir que su energía potencial es cero sobre la mesa. Vemos, entonces, que la altura  $z = 0$  no tiene por qué coincidir con la altura  $z$  para la cual  $U(z) = 0$ , y por ende  $U_0 \neq 0$  en general. Pero nada impide insistir en poner  $U(z = 0) = 0$ . En el ejemplo de la manzana sobre la mesa, lo único que sucede es que su energía potencial en el suelo sería negativa, la diferencia de potencial será negativa,  $U(z_f) - U(z_i) = -mgh$ , y por tanto la diferencia de energía cinética será positiva,  $K(z_f) - K(z_i) = U(z_i) - U(z_f) = mgh$ , y la velocidad final de caída será lo esperado. O sea, nada extraño. Lo importante es tener presente que el cero de las alturas no tiene por qué corresponder al cero de la energía potencial. Pero como, para todos los efectos prácticos, lo único relevante en Mecánica Clásica

son las diferencias de energía potencial, de modo que, si simplifica las ecuaciones o es conveniente por otras razones, no hay problema en poner  $U_0 = 0$ .

Notemos finalmente otro aspecto importante: en el análisis anterior, supusimos que la partícula subía con velocidad constante desde  $z_i$  a  $z_f$ , es decir, la fuerza ejercida por nosotros es constante. Sin embargo, usando el mismo argumento del caso b), si la fuerza no es constante basta dividir la trayectoria en intervalos más pequeños, donde la fuerza sí sea constante. La conclusión será la misma de b): el trabajo total será simplemente la diferencia de las energías potenciales en el punto final e inicial. No es importante que la partícula suba con velocidad constante, entonces: si parte del reposo, la elevamos, y la dejamos en reposo en su posición final, el trabajo realizado es el mismo.

Más aún: en el proceso anterior lo único importante es que el campo de fuerzas tenga asociada una energía potencial, para poder decir que, en cada intervalo,  $F(z)\Delta z = U(z_f) - U(z_i)$ . Por lo tanto, para *cualquier campo de fuerzas*, podemos calcular el trabajo para llevar la partícula de un punto a otro, para el caso de fuerza aplicada constante, y los resultados seguirán siendo válidos si la fuerza no es constante.

- d) Consideremos un resorte de constante de restitución  $k$ , acostado sobre una superficie horizontal sin roce y con un extremo empotrado en una pared (ver figura 5.1). Supongamos además que el sistema inicialmente se encuentra en reposo, con el resorte teniendo su largo natural.

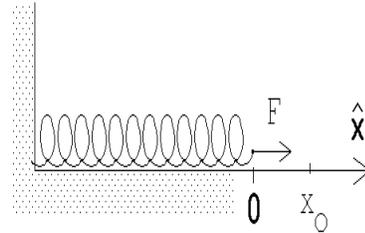


Figura 5.1

Evaluemos el trabajo que debemos realizar para alargar (lentamente) el resorte en una magnitud  $x_0$ . La fuerza que debemos aplicar para lograr nuestro objetivo ahora no es constante, sino que aumenta a medida que el resorte se estira:

$$\vec{F}(x) = kx \hat{x} .$$

(Esta fuerza es la opuesta a la que el resorte ejerce sobre la masa, que, de acuerdo a la *Ley de Hooke*, es  $-kx\hat{x}$ .) El trabajo que debemos realizar para alargar el resorte, desde  $x = 0$  hasta  $x = x_0$ , viene dado por

$$W_{0 \rightarrow x_0} = \int_{x=0}^{x=x_0} F(x) \cdot dx = \int_0^{x_0} kx dx = k \int_0^{x_0} x dx .$$

Ya sabemos que la integral  $\int f(x) dx$  no es otra cosa que el área bajo la curva del gráfico de la función  $f(x)$ . Para el presente caso, la función corresponde a una recta que pasa por el origen (ver figura 5.2), siendo el área bajo la curva  $\frac{1}{2}x_0^2$ .

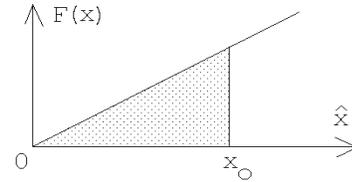


Figura 5.2

Luego, el trabajo que debe realizarse para expandir el resorte hasta  $x_0$  es

$$W_{0 \rightarrow x_0} = \frac{1}{2} k x_0^2 .$$

(Se obtiene el mismo resultado si, en lugar de alargarlo, el resorte se comprime en una magnitud  $x_0$ .)

Si hubiéramos desplazado el resorte desde una posición arbitraria  $x_i$  a otra  $x_f$ , es claro que el trabajo realizado sería

$$W_{x_i \rightarrow x_f} = \frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2) .$$

Una vez más, el trabajo realizado es igual a la diferencia de una función, evaluada en los puntos extremos de la trayectoria.

Además, también en este ejemplo, el trabajo realizado por nosotros sobre la partícula no se manifiesta en un cambio de su energía cinética, sino lo que cambia es el estado del sistema. En el nuevo estado, el sistema tiene la “potencialidad” (al permitir que el resorte vuelva a su largo natural) de realizar trabajo, o de entregarle a la partícula adosada al resorte una energía cinética. Decimos entonces que el trabajo realizado se traduce en un cambio de energía potencial. Como en este caso el campo de fuerzas corresponde a un resorte, decimos que es una *energía potencial elástica*.

Si la energía potencial de un resorte la definimos por

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2} k x^2 ,$$

donde  $x = 0$  corresponde a la posición de equilibrio del resorte y  $x$  es la magnitud en que éste se comprime o se alarga, entonces nuevamente

$$W_{0 \rightarrow z_0} = U(z_0) - U(0) .$$

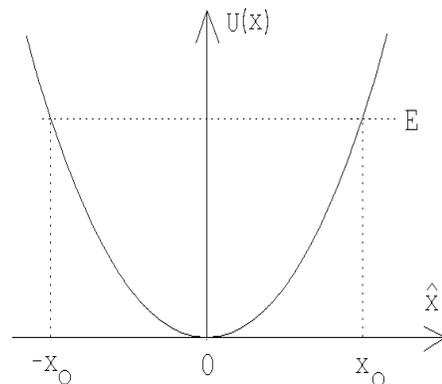


Figura 5.3

(La constante aditiva  $U_0$  en la expresión para la energía potencial nuevamente no aparece en el resultado final; la podríamos haber elegido igual a cero. De hecho así lo haremos en lo sucesivo, respetando la intuición de que la energía potencial de un resorte en su largo natural debería ser nula.) La figura 5.3 muestra el gráfico  $U(x)$  para la energía potencial de un resorte, correspondiendo a una parábola.

- e) Consideremos ahora una partícula que se mueve a lo largo de una recta (el eje  $\hat{x}$ ) sobre una mesa y supongamos que, además de la fuerza que nosotros ejercemos sobre ella, la única otra fuerza se debe al roce (cinético). La fuerza de roce es  $f_r = mg\mu_c$  (pero note que ésta aparece sólo cuando la partícula se está moviendo y observe además que la dirección en que apunta siempre es contraria a la dirección de movimiento). El trabajo que debemos realizar para empujar la partícula, con velocidad constante, desde  $x_i$  hasta  $x_f$  es

$$W = f_r \cdot (x_f - x_i) = (mg\mu_c) \cdot (x_f - x_i) .$$

En este caso, sin embargo, el trabajo que realizamos no se manifiesta en un cambio de algo que podríamos denominar energía potencial. (A pesar de que el trabajo resultó, como en ocasiones anteriores, igual a la diferencia de una función evaluada en los extremos de la trayectoria.)

Podemos comprobar la afirmación anterior con un ejemplo sencillo: si la partícula tiene inicialmente una velocidad  $v_0$ , al dejarla “libre” en  $x_i$  se detendrá, por efecto del roce, al cabo de una distancia  $d = v_0^2/(2\mu g)$ . Si, en cambio, la empujamos con velocidad constante hasta  $x_f$ , y la soltamos en este segundo punto, la partícula se detendrá al cabo de *la misma* distancia  $d$ . Es decir, aún cuando efectuamos trabajo sobre la partícula, el estado del sistema no cambia: al dejar de aplicar la fuerza, el sistema hace lo mismo. No como en el caso gravitatorio o elástico, en que liberar al sistema desde dos posiciones distintas significa que la partícula efectivamente adquiere mayor velocidad, ya sea al llegar al suelo o al pasar por la posición de equilibrio del resorte, respectivamente.

Vemos, entonces, que no es posible definir un concepto análogo a la energía potencial cuando se trata del roce.

De hecho, podemos distinguir dos problemas adicionales, aunque íntimamente relacionados con el anterior, que aparecen cuando hay roce y que hace que la situación sea distinta que en los dos últimos casos:

- i) En primer lugar, el trabajo que debe hacerse para llevar la partícula desde  $x_i$  hasta  $x_f$ , cuando hay roce, depende del “camino” que uno elija para ello. Esto es profundo, y está directamente relacionado con el hecho de que el trabajo no se pueda escribir, como vimos, como una magnitud que sólo dependa del punto inicial y final. En efecto, supongamos que  $x_f$  está a la

derecha de  $x_i$ . Ya vimos que, al llevar la partícula directamente desde  $x_i$  a  $x_f$ , el trabajo que debemos realizar es  $W = mg\mu_c \cdot (x_f - x_i)$ . Pero si antes la empujamos hacia la izquierda en una distancia  $L$ , y recién desde ahí la empujamos al punto final  $x_f$ , el trabajo sería  $W = mg\mu_c \cdot (2L + x_f - x_i)$ . O sea, el trabajo no sólo depende del punto inicial y final sino que también del camino.

- ii) Otra característica del trabajo que se hace contra el roce es que éste no es recuperable como energía mecánica. Ya observamos que la masa tardará el mismo tiempo en detenerse, independiente de cuánto tiempo apliquemos una fuerza, de modo que el trabajo que hemos hecho, en realidad, no se ha convertido en nada útil desde el punto de vista mecánico. Esto también está relacionado con el hecho de que no hay ninguna “energía potencial” que haya cambiado en el intertanto. ¿Entonces el trabajo que efectuamos simplemente desapareció? En realidad no, sino que se disipa como calor, calentando las superficies en contacto. (En rigor sí es posible, utilizando una máquina térmica, recuperar la energía disipada, pero de todos modos las leyes de la Termodinámica implican que la recuperación del trabajo, aunque se hiciera, sería sólo parcial. Una vez que hay roce presente, siempre parte del trabajo realizado se va a disipar irremediabilmente en forma de calor no aprovechable mecánicamente.)

Los ejemplos unidimensionales anteriores sugieren lo siguiente:

**Definición:** El *trabajo* realizado por una fuerza  $F(z)$  que actúa sobre alguna partícula es

$$W = \sum_j F(z_j) \cdot (z_{j+1} - z_j) = \int F(z) dz ,$$

donde la suma (o integral) se realiza a lo largo de la trayectoria que recorre la partícula.

El trabajo  $W$  que se entrega a un sistema, cuando no hay roce, se manifiesta en un cambio de la energía del sistema. Hasta el momento hemos identificado las siguientes formas de energía:

- a) Energía cinética de una partícula de masa  $m$ . Ésta viene dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 ,$$

y se manifiesta en el movimiento de la partícula. Cuando la partícula está en reposo, su energía cinética es cero.

- b) Energía potencial. Ésta es una energía que se debe a la existencia de un *campo de fuerzas* al cual la partícula está sometida. En los ejemplos

posición de la partícula. La energía potencial depende de la posición, y sólo aparece cuando la partícula no es libre, sino que está sometida a un *campo de fuerzas*. La expresión para la energía potencial depende del campo de fuerzas específico de que se trate. Hasta el momento hemos analizado dos casos:

- i) Campo gravitacional uniforme,  $\vec{F}(z) = m\vec{g} = -mg\hat{z}$ , en cuyo caso la energía potencial es

$$U(z) = mg \cdot (z - z_0) ,$$

donde  $z_0$  es un lugar que arbitrariamente hemos fijado como el cero de la energía potencial.

- ii) Campo de fuerzas de un resorte,  $\vec{F}(x) = -kx\hat{x}$ , en cuyo caso la energía potencial es

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 .$$

Cuando hay roce, parte (o toda) la energía entregada al sistema (por medio del trabajo), puede disiparse. Esta energía se manifiesta en un aumento de la temperatura de las superficies que rozan entre sí. En este caso, el trabajo  $W$  se transforma en calor  $Q$ .

Las observaciones anteriores se pueden resumir en el siguiente Principio de conservación:

### Conservación de la energía:

Al entregarle a una partícula un trabajo  $W$ , entonces

$$W = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) + Q , \tag{5.1}$$

o sea, el cambio de la energía cinética, más el cambio de la energía potencial, más la energía disipada como calor es igual al trabajo (energía) aplicado al sistema.

La ecuación de conservación de la energía hay que manejarla con precaución, pues no se puede estar seguro de que uno hayan identificado todas las posibles formas de energía. De hecho, a medida que avancemos en el estudio de la física, en varias oportunidades nos veremos forzados a reinterpretar esa ecuación o agregarle términos adicionales.

Lo importante es tener presente que la expresión anterior dice algo extraordinariamente importante: que aplicar trabajo sobre un sistema físico significa alterar “algo” en el mismo, un “algo” que llamamos energía, y que el cambio de energía es exactamente igual al trabajo realizado. A menos que haya roce, en cuyo caso el calor disipado es exactamente igual a la diferencia entre el trabajo efectuado y el cambio de energía.

Este *Principio de conservación de la energía* es una afirmación muy general acerca de los sistemas físicos, mecánicos o no. Insistimos en la importancia de notar que este principio de conservación no dice, tal como está formulado, que la energía no cambia, sino algo más general: la energía de un sistema sólo puede cambiar si se efectúa trabajo sobre él.

Podemos, sin embargo, dejar el principio anterior en una forma más familiar, reescribiendo la ecuación (5.1) también se de la siguiente manera:

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W - Q .$$

A ambos lados aparece la suma  $K + U$ , evaluada al inicio o al final de la trayectoria. Definimos entonces la *energía mecánica*,

$$E = K + U .$$

Más aún, podemos notar lo siguiente: para un sistema cerrado (es decir, un sistema sobre el cual no hay fuerzas externas) sin roce,

$$E_f = E_i , \tag{5.2}$$

es decir, *la energía mecánica se conserva*.

Es importante distinguir que lo anterior se cumple sólo para sistemas cerrados. Ojo: esto no significa que no haya fuerzas presentes. De hecho, la energía potencial contiene información sobre fuerzas presentes en el sistema. Pero un sistema cerrado es aquél sobre el cual no hay fuerzas *externas* actuando. Por ejemplo, consideremos una pelota cayendo al suelo. La pelota no es un sistema cerrado, porque hay una fuerza sobre ella, el peso, que la acelera. El peso efectúa trabajo sobre la pelota, y naturalmente se produce un cambio de su energía (cinética en este caso). Si miramos sólo la pelota, concluimos que su energía no se conserva. Pero si consideramos ahora el sistema compuesto por la pelota y la Tierra, el peso de la pelota es una fuerza interna, descrita en la energía potencial gravitatoria, y la energía mecánica se conserva. (Naturalmente, todo esto depende de qué pregunta estemos interesados en responder, y qué aproximaciones sean relevantes, ya que en rigor sí hay fuerzas externas sobre el sistema Tierra-pelota, por ejemplo la atracción gravitatoria del Sol, y si no podemos despreciarla, entonces ya no será un sistema cerrado.)

Pero volvamos a la ecuación (5.2). El lado izquierdo depende sólo del estado final del sistema, y el lado derecho depende sólo del estado inicial del sistema. Vemos aquí, explícitamente, lo que notamos en el primer ejemplo unidimensional que tratamos: independiente del tiempo que medie entre dos eventos, independiente de los detalles de la trayectoria, de aceleraciones y desaceleraciones, de avances y retrocesos durante la misma, el concepto de energía nos permite ver el sistema de modo global, y afirmar que, por encima de todos los detalles intermedios, hay algo en la evolución del sistema que no cambia, algo invariante, y eso es precisamente la energía del sistema. Ya que

el instante inicial y el final de la trayectoria son arbitrarios, la energía mecánica es la misma *en todo* instante.

En Física, como veremos a lo largo de este curso y muchos otros en el futuro, las leyes de conservación son extremadamente importantes. Podemos intuir por qué, ya que si, en medio de toda la complejidad y variabilidad de un sistema físico, que naturalmente evoluciona constantemente, somos capaces de encontrar algo que se mantiene invariante, ello nos acerca a una gran simpleza conceptual en la descripción del sistema.

Podemos apreciar lo anterior considerando una partícula de masa  $m$ , en reposo a una altura  $h$  del suelo. Deseamos calcular la velocidad  $v$  con la que llega al suelo. Este problema lo hemos resuelto muchas veces, pero utilicemos el lenguaje que hemos adquirido en este capítulo. Tomemos como estado inicial el instante en que la partícula justo comienza a caer desde el reposo, y el estado final el instante en que llega al suelo. Entonces sus energías mecánicas inicial y final son

$$\begin{aligned} E_i &= mgh , \\ E_f &= \frac{1}{2}mv^2 , \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que el cero de la energía potencial coincide con el nivel del suelo. El principio de conservación de la energía nos dice que, siendo el sistema cerrado y no habiendo roce,  $E_i = E_f$ , de lo que se sigue que  $v = \sqrt{2gh}$ , el resultado esperado.

Por supuesto que debía ser el mismo resultado de siempre. Pero notemos que, en el lenguaje de fuerzas (Cap. 4), la manera de enfrentar este problema es escribir la segunda ley de Newton con la fuerza correspondiente (el peso); luego integrar una vez para obtener la velocidad; luego integrar de nuevo para obtener la posición; imponer las condiciones iniciales de posición y velocidad; calcular, de la ecuación de itinerario para la posición, el tiempo que tarda la partícula en llegar al suelo; reemplazar dicho tiempo en la ecuación de itinerario para la velocidad, para obtener finalmente la velocidad de caída.

Es claro que la descripción en términos de energía es *enormemente* más sencilla. Esto no es magia ni casualidad, sino que se debe precisamente al poder contenido en haber encontrado una cantidad conservada (la energía) en el sistema.

#### Problema resuelto en clases: 5.4

En los ejemplos anteriores hemos resuelto las velocidades finales de un cuerpo en caída libre o en una máquina de Atwood (problema 5.4), usando la conservación de energía entre un determinado estado inicial y otro final, donde la separación temporal entre ellos es arbitraria. Esto ha sido una gran ventaja, y nos da una manera muy sencilla de resolver problemas. Podríamos pensar, sin embargo, que hemos perdido información, precisamente porque ya no hay información sobre el tiempo y la evolución detallada del sistema para llegar desde dicho estado inicial al final.

No es así. La clave es notar que, precisamente porque la energía es constante, podemos usar ese hecho tanto para dos eventos arbitrariamente alejados en el tiempo, como para dos eventos arbitrariamente cercanos. Tenemos un modo de decir eso en lenguaje matemático: que la energía sea constante, significa que su derivada temporal es cero, es decir

$$\frac{dE}{dt} = 0 . \quad (5.3)$$

Consideremos, por ejemplo, la partícula anterior en caída libre. Para un instante de tiempo arbitrario, su energía mecánica será la suma de sus energía cinética y potencial:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 + mgz(t) .$$

Entonces, (5.3) da

$$\dot{z}(m\ddot{z} + mg) = 0 .$$

Puesto que en general  $\dot{z} \neq 0$ , la ecuación anterior equivale a

$$m\ddot{z} = -mg \quad \dots$$

¡que es precisamente la segunda ley de Newton para esta partícula!

Es decir, la conservación de la energía no sólo permite resolver problemas con gran elegancia, gracias a que podemos comparar instantes arbitrariamente separados en el tiempo sin preocuparnos de los detalles intermedios. Además, la conservación de la energía *es* equivalente a la segunda ley de Newton, y por lo tanto tiene *toda* la información que necesitamos para describir el movimiento en todo instante si lo requerimos.

Por cierto, hemos mostrado lo anterior sólo para un caso particular, la caída libre. Es fácil convencerse de que (5.3) también da las ecuaciones de movimiento correctas para cada masa en la máquina de Atwood, y en muchos otros sistemas. Podremos mostrar que efectivamente es así para un sistema arbitrario (bajo ciertas restricciones) un poco más adelante en este Capítulo, pero antes necesitamos generalizar los resultados obtenidos anteriores al caso de tres dimensiones.

## 5.2 Trabajo para un movimiento en tres dimensiones

Consideremos ahora una partícula libre de masa  $m$  que se mueve en el espacio tridimensional y cuya posición y velocidad en el instante  $t$  son  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ , respectivamente. Apliquemos sobre esa partícula, durante un intervalo de tiempo infinitesimal  $dt$ , una fuerza  $\vec{F}$ .

De acuerdo a la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

Durante el intervalo de tiempo infinitesimal  $dt$ , la partícula se desplaza una distancia

$$d\vec{r} = \vec{v} dt .$$

Puesto que ahora la fuerza y el desplazamiento son vectores, es natural pensar que la cantidad equivalente a  $F(z)dz$  en el caso unidimensional está dado por el producto punto entre ellos.

Haciendo pues el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento, se obtiene

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot \vec{a} dt . \quad (5.4)$$

Para evaluar el producto punto  $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$ . La aceleración, por su parte, hace que la velocidad en un tiempo posterior sea distinta,  $\vec{v}(t + dt)$ . Inspirados por los resultados unidimensionales, que representan el trabajo con la energía cinética, consideremos la velocidad al cuadrado en el instante  $t + dt$ . Se tiene

$$\begin{aligned} v^2(t + dt) &= \vec{v}(t + dt) \cdot \vec{v}(t + dt) \\ &= (\vec{v}(t) + \vec{a}(t) dt) \cdot (\vec{v}(t) + \vec{a}(t) dt) \\ &= \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) dt + \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t) (dt)^2 \\ &= v^2(t) + 2\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) dt + (\text{términos del orden de } (dt)^2) , \end{aligned}$$

o sea,

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) dt = \frac{1}{2}v^2(t + dt) - \frac{1}{2}v^2(t) .$$

Con este resultado y la expresión (5.4) obtenemos que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2(t + dt) - \frac{1}{2}mv^2(t) .$$

La última ecuación nos indica que el cambio de energía cinética de una partícula sobre la cual actúa una fuerza durante el intervalo de tiempo  $[t, t + dt]$  (pero por lo demás es libre), es igual al producto punto de esa fuerza y el desplazamiento realizado por la partícula en ese mismo intervalo. Lo anterior sugiere definir el *trabajo*, en el caso tridimensional, como el producto punto del vector fuerza y el vector desplazamiento.

Si el movimiento no ocurre durante un intervalo de tiempo infinitesimal, sino entre dos instantes  $t_i$  y  $t_f$ , podemos usar la ecuación anterior siempre que el intervalo se divida en muchos intervalos pequeños y luego se sumen los trabajos y los cambios en la energía cinética de cada uno de los intervalos. De esta manera se obtiene

$$W = \int_i^f \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2(t_f) - \frac{1}{2}mv^2(t_i) .$$

Este resultado es el análogo tridimensional de la situación considerada en la sección anterior, en las partes a) y b), para el movimiento unidimensional.

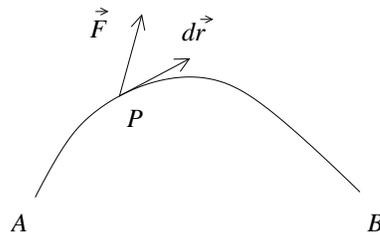
Hacemos notar que el hecho de que lo único que interesa para la energía son los estados inicial y final es robusto, y sigue siendo cierto cuando el problema ocurre en más de una dimensión.

**Definición:** El *trabajo* realizado por una fuerza  $\vec{F}(\vec{r})$  que actúa sobre alguna partícula viene dado por

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} ,$$

donde la integral se evalúa a lo largo del camino recorrido por la partícula.

Técnicamente, la integral anterior, en que el integrando es un vector a lo largo de una trayectoria, se denomina *integral de línea*. Los aspectos formales relacionados con este tipo de integrales corresponderá verlos en cursos superiores de Cálculo, pero para efectos de nuestro curso corresponde a un concepto muy sencillo. Consideremos una partícula desplazándose sobre una trayectoria arbitraria, en la dirección indicada por el vector  $d\vec{r}$ , como sugiere la figura:



En el punto  $P$ , siente una cierta fuerza  $\vec{F}$ . En general, el módulo y la dirección de  $\vec{F}$  será distinto en cada punto de la trayectoria. Para calcular el trabajo efectuado al llevar la partícula de  $A$  a  $B$  basta con hacer, en cada punto de la trayectoria, el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento  $d\vec{r}$ , que es un vector tangente a la trayectoria en dicho punto  $P$ . Dicho producto punto es un número real, y lo que queda es simplemente sumar esos números reales a lo largo de la trayectoria. (El siguiente ejemplo mostrará cómo proceder en un caso concreto.)

Volvamos a analizar el concepto *energía potencial* para una partícula inmersa en un campo gravitatorio uniforme. Consideremos un objeto de masa  $m$ , en un campo gravitatorio constante  $\vec{g} = -g\hat{z}$  (el eje  $\hat{z}$  apuntando hacia arriba), y evaluemos el trabajo que debemos realizar para trasladarlo (por fijar ideas, con velocidad constante) desde el origen hasta el punto  $P$ ,  $(x_0, z_0)$  (ver figura 5.4).

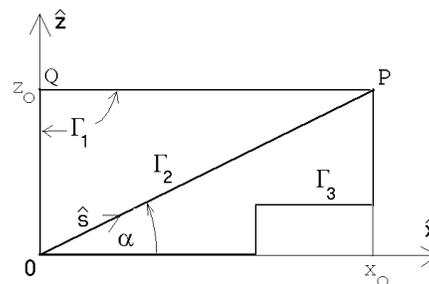


Figura 5.4

El primer problema que enfrentamos al hacer este problema en más de una dimensión es que podemos ir desde el origen a  $P$  por distintos caminos. En rigor, esto siempre fue cierto también en una dimensión: para unir dos puntos  $A$  y  $B$  podemos ir en línea recta, pero si a mitad de camino nos devolvemos y luego retomamos el curso original, eso ya es otro camino. Con los argumentos dados en la sección anterior podríamos convencernos de que el trabajo es invariante antes cambios de dirección dentro de la misma recta, pero ahora, en dos y tres dimensiones, ya no es tan evidente y necesitamos considerar explícitamente la posibilidad de tomar diferentes caminos para llegar de un punto a otro.

Supongamos, para comenzar, que usamos el camino  $\Gamma_1$ , o sea, primero elevamos el objeto desde  $z = 0$  hasta  $z = z_0$  y luego lo trasladamos hacia el lado, hasta llegar al punto  $P$ . Durante el primer tramo la fuerza que debemos realizar para elevar el objeto (con velocidad uniforme) es  $\vec{F} = mg\hat{z}$ , siendo el desplazamiento también a lo largo del eje  $\hat{z}$ , es decir,  $d\vec{r} = dz \hat{z}$ . Luego, para este primer tramo, el trabajo que debemos realizar es

$$W_{0 \rightarrow Q} = \int_{z=0}^{z=z_0} mg \, dz = mg \int_{z=0}^{z=z_0} dz = mg z_0 \quad .$$

Para el segundo tramo la fuerza sigue siendo  $\vec{F} = mg\hat{z}$ ; el desplazamiento, sin embargo, ahora es a lo largo del eje  $\hat{x}$ , es decir,  $d\vec{r} = dx \hat{x}$ . El producto punto entre la fuerza y el desplazamiento es cero (por ser uno ortogonal al otro). Luego, para trasladar el objeto desde  $Q$  a  $P$  no se requiere realizar ningún trabajo. Concluimos que el trabajo total, a lo largo del camino  $\Gamma_1$ , es

$$W_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = mgz_0 \quad .$$

Evaluemos ahora el trabajo que debemos realizar para llevar el mismo objeto desde el origen al punto  $P$  a lo largo del camino  $\Gamma_2$ . La fuerza que debemos aplicar sigue siendo  $\vec{F} = mg\hat{z}$ ; el desplazamiento, sin embargo, es a lo largo de la dirección del vector unitario  $\hat{s}$ , o sea,  $d\vec{r} = ds \hat{s}$ . Luego se tiene que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (mg \hat{z}) \cdot (ds \hat{s}) = mg \sin \alpha \, ds \quad .$$

Concluimos que el trabajo total, a lo largo del camino  $\Gamma_2$ , viene dado por

$$W_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = mg(\sin \alpha) \int_{\Gamma_2} ds = mgL \sin \alpha \quad ,$$

donde  $L$  es el largo del camino. Pero  $L \sin \alpha = z_0$ , luego los trabajos a lo largo de los caminos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son iguales.

No es difícil demostrar que también el trabajo que se debe realizar para llevar el objeto desde el origen al punto  $P$  a lo largo del camino  $\Gamma_3$  es igual a  $mgz_0$ . En efecto, para trasladar el objeto a lo largo de tramos horizontales no se requiere hacer

trabajo, mientras que para los tramos verticales el trabajo siempre es  $mgh$ , donde  $h$  es la diferencia de altura del tramo vertical.

De hecho, el mismo argumento nos sirve para convencernos de que *para cualquier trayectoria* que una el origen con  $P$ , el trabajo será siempre  $W = mgz_0$ . Para una trayectoria arbitraria, siempre se podrá escribir el vector desplazamiento  $d\vec{r}$  en todo punto como una componente vertical y otra horizontal. La componente horizontal siempre dará un trabajo nulo, por ser ortogonal a la fuerza, y la vertical dará simplemente la integral unidimensional entre 0 y  $z_0$ , o sea  $mgz_0$ .

Por lo tanto, nos damos cuenta de que, igual que en el caso unidimensional, el trabajo ejercido en presencia de este campo de fuerzas se puede escribir simplemente como la diferencia de una cierta función evaluada en los extremos de la trayectoria. A dicha función la podemos llamar energía potencial, y para una partícula en la posición  $\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$  es

$$U(x, z) = mgz + U_0 \quad ,$$

con  $U_0$  una constante que depende de dónde se ha escogido el cero de la energía potencial (usualmente  $z = 0$ ). La energía potencial es, entonces, independiente del valor  $x$ .

El hecho de que el trabajo realizado sea independiente de la trayectoria escogida es extremadamente no trivial e importante. De hecho que la razón misma por la cual podemos definir *una* energía potencial es que no importa la trayectoria. En efecto, si vemos una partícula a una altura  $h$  respecto a cierto nivel de referencia, no tendría ni siquiera sentido decir que su energía potencial es  $mgh$ , porque si la energía potencial tiene que ver con el trabajo realizado, ¿cómo sabemos cuánta energía tiene si no sabemos por dónde se fue? La única respuesta posible es que sólo tiene sentido definir energía potencial cuando el trabajo es independiente de la trayectoria.

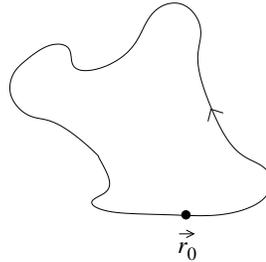
Cuando un *campo de fuerza* tiene la propiedad de que el trabajo realizado para llevar una partícula entre dos puntos cualesquiera, es independiente del camino usado para unir tales puntos, entonces se dice que el campo de fuerzas es *conservativo*. En el ejemplo anterior hemos mostrado que el campo gravitacional es un ejemplo de un campo conservativo.

La fuerza de roce es un ejemplo de una fuerza no conservativa. Al empujar un cajón de masa  $M$  por el suelo de una habitación de un lugar a otro, el trabajo realizado será proporcional al largo  $L$  del camino que para ello se elige, siendo  $W = \mu_c MgL$ . Al no ser el roce una fuerza conservativa, no se puede introducir una energía potencial para esta fuerza (ya que no existe una función que sólo dependa de los puntos final e inicial, y cuya diferencia sea igual al trabajo). El trabajo que se realiza contra la fuerza de roce se transforma en calor. La reconversión de energía calórica a energía mecánica puede hacerse sólo recurriendo a alguna máquina y, aun así, no en forma completa.

Otro modo de ver lo anterior es notar que si una partícula parte de una posición inicial  $\vec{r}_0$ , sigue una cierta trayectoria, y vuelve a  $\vec{r}_0$ , el trabajo necesario en un campo

conservativo es cero:

$$W_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_0} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 .$$



En efecto, siendo conservativo, el trabajo no depende de la trayectoria, y por tanto salir de  $\vec{r}_0$  y volver a  $\vec{r}_0$  es equivalente a la trayectoria consistente en no salir nunca de  $\vec{r}_0$ , para lo cual evidentemente no hay que hacer ningún trabajo.

### Unidades

En el sistema internacional de unidades SI, la unidad del trabajo (o, lo que es lo mismo, de la energía) es el *Joule*, que se abrevia como [J]:

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \cdot \text{metro} ,$$

o sea,

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} .$$

Al *trabajo por unidad de tiempo* se denomina *potencia*. En el sistema SI, la unidad de la potencia se denomina *watt* [W] y corresponde a 1 Joule por segundo, es decir,

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} .$$

Ejemplo: Considere un motor eléctrico de 0.4 KW (esto corresponde a aproximadamente al motor de una juguera). ¿Cuánto tiempo tardaría tal motor, mediante un sistema de poleas, en levantar un automóvil de 600 kg en un metro?

Solución: El trabajo requerido para levantar el automóvil es

$$W = m g h = 600 \cdot 9.81 \cdot 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \sim 6000 \text{ J} .$$

El motor es capaz de entregar 400 J por segundo (estamos suponiendo una eficiencia de un 100%), luego, para realizar un trabajo de 6000 J tardará  $6000/400 = 15$  s.

### 5.3 Ejemplos

A continuación ilustremos los conceptos anteriores aplicándolos en algunos problemas concretos.

#### Ejemplo 1

Considere un bloque de masa  $M$  que incide con velocidad  $v_0$  sobre un resorte (ver figura 5.5) y lo comprime. ¿Cuál será la máxima compresión que en algún instante llega a tener el resorte?

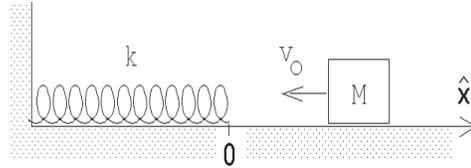


Figura 5.5

El bloque, al comprimir el resorte, realiza trabajo. Este trabajo, que se transforma en energía potencial del resorte, lo hace a costa de su energía cinética. La máxima compresión se logra cuando el bloque llega a estar en reposo. En ese caso, toda la energía cinética se habrá transformado en energía potencial, o sea,

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 .$$

En la ecuación anterior,  $x_0$  es la máxima compresión que llega a tener el resorte. Despejando  $x_0$  se encuentra que

$$x_0 = \sqrt{\frac{M}{k}} v_0 .$$

#### Ejemplo 2

Un bloque de masa  $m$  resbala por un plano inclinado, partiendo del reposo desde una altura  $h$ . Sea  $\alpha$  el ángulo de elevación y  $\mu$  el coeficiente de roce cinemático entre el bloque y el plano. ¿Con qué velocidad llegará el bloque al pie del plano inclinado?

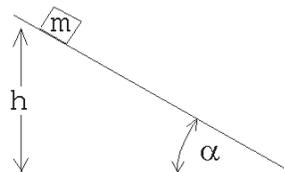


Figura 5.6

Inicialmente el bloque tiene sólo una energía potencial  $U = mgh$  (el cero de la energía potencial lo hemos elegido en la base del plano inclinado). Al llegar el bloque abajo, éste tiene sólo energía cinética  $K = mv_f^2/2$ . Usando el principio de conservación de la energía se tiene que la energía cinética final debe ser igual a la energía potencial inicial menos la energía disipada por el roce. Esta última es  $Q = \mu m g (\cos \alpha) L = \mu m g h / \tan \alpha$ . Se tiene

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - \mu m g h / \tan \alpha ,$$

o sea,

$$v_f^2 = 2gh \left( 1 - \frac{\mu}{\tan \alpha} \right) .$$

La ecuación anterior es válida si  $\mu \leq \mu_e \leq \tan \alpha$ . Si la condición anterior no se cumple la partícula no resbala. Observe cómo, en el límite  $\alpha = 90^\circ$ , la velocidad  $v_f$  tiende al resultado de la caída libre.

### Ejemplo 3

Suponga que la energía potencial de una partícula de masa  $m$  viene dada por la expresión

$$U(z) = a \left[ \frac{1}{3} z^3 - b^2 z \right] ,$$

donde  $a$  y  $b$  son ciertas constantes positivas. Encuentre el campo de fuerza  $F(z)$  que da origen a tal energía potencial.

Sea  $F(z)$  la fuerza que el campo ejerce sobre la partícula. Para llevar lentamente la partícula desde el origen al punto  $z$  deberemos ejercer sobre la partícula una fuerza de igual magnitud pero sentido opuesto. Por consiguiente, el trabajo que debemos realizar es

$$W(z) = - \int_0^z F(z) dz .$$

Este trabajo es igual a la diferencia de la energía potencial entre el origen y el lugar  $z$ , o sea,  $U(z) - U(0)$ . Como  $U(0) = 0$ , podemos igualar  $W(z)$  con  $U(z)$ , obteniéndose

$$U(z) = - \int_0^z F(z) dz = a \left[ \frac{1}{3} z^3 - b^2 z \right] .$$

Como el proceso de integración es el “inverso” del proceso de derivación (ver figura 5.7), se tiene que la fuerza debe ser *menos la derivada de la energía potencial*, o sea,

$$F(z) = - \frac{dU(z)}{dz} . \tag{5.5}$$

Usando esta relación se encuentra que para el presente problema, el campo de fuerzas es

$$F(z) = a [b^2 - z^2] .$$

Es importante señalar que siempre *la derivada de la energía potencial es (menos) la fuerza que el campo conservativo ejerce sobre la partícula*.

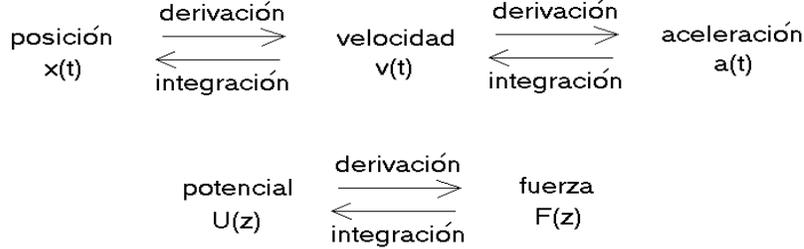


Figura 5.7

**Ejemplo 4**

Una partícula en un campo de fuerzas se dice que se encuentra *en equilibrio* si la fuerza sobre ella es nula. Para una partícula cuya energía potencial es (la misma del ejemplo anterior)

$$U(z) = a \left[ \frac{1}{3}z^3 - b^2 z \right],$$

la fuerza  $F(z)$  es nula cuando  $z = \pm b$ . Note que esos puntos siempre corresponden a máximos o mínimos de la energía potencial (ver figura 5.8).

Se dice que un sistema en equilibrio es *estable* si al alejarlo levemente del punto de equilibrio la fuerza que aparece lo acelera nuevamente hacia dicho punto. De lo contrario, el equilibrio es inestable.

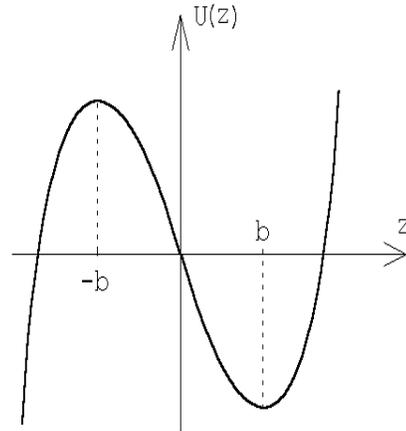


Figura 5.8

Para el caso mostrado en la figura 5.8, la partícula se encontrará en equilibrio estable si está en reposo en el lugar  $z = b$ , e inestable si se encuentra en  $z = -b$ .

Supongamos que la partícula de masa  $m$  se encuentra en el punto de equilibrio estable y que en cierto instante la sacamos levemente de su punto de equilibrio, para dejar que luego se mueva en el campo de fuerza. Demostremos que la fuerza que el campo ejerce sobre la partícula es en magnitud proporcional al desplazamiento pero en sentido opuesto. Efectivamente, si alejamos la partícula una distancia  $+\Delta$  desde el punto de equilibrio estable  $z = b$ , (con  $\Delta \ll b$ ), entonces la fuerza que aparece es

$$F(b + \Delta) = a [b^2 - (b + \Delta)^2] = -a(2b\Delta + \Delta^2) \simeq -2ab\Delta .$$

Notemos que la fuerza asociada al potencial en la vecindad del mínimo actúa en forma análoga a la ley de Hooke que gobierna el comportamiento de un resorte: al alejar la partícula de la posición de equilibrio aparece una fuerza que es proporcional al desplazamiento, pero en el sentido contrario. Al soltar la partícula (desde el reposo) en el lugar  $z = b + \Delta$ , la partícula oscilará en torno al punto de equilibrio igual como si estuviera adosada a un resorte. El período de oscilación de una masa adosada a un resorte con constante de restitución  $k$  es  $T = (2\pi)\sqrt{m/k}$ . En el presente ejemplo,  $2ab$  juega el papel del coeficiente de restitución  $k$ , luego el período de las oscilaciones será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2ab}} .$$

## 5.4 Problemas

- Una masa de 2 kg se lleva desde un punto  $A$  al punto  $B$ . Los vectores de posición de los puntos  $A$  y  $B$  son:

$$\vec{x}_A = (\hat{x} + 3\hat{z}) \text{ m}$$

$$\vec{x}_B = 5\hat{x} \text{ m}$$

Todo el sistema está inmerso en un campo gravitatorio constante  $-g\hat{z}$ . Encuentre el trabajo realizado por la gravedad a lo largo de cada uno de los tres caminos indicados en la figura adjunta.

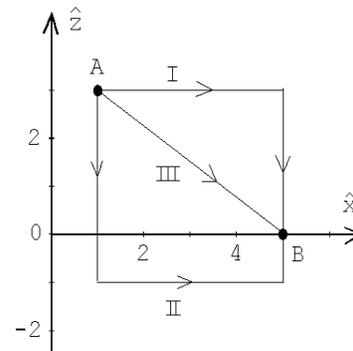


Figura 5.9

- Una bomba de agua debe elevar 200 litros de agua por minuto desde un pozo, cuyo nivel de agua está a 6 m de profundidad, para luego lanzarla con una velocidad de 9 m/s. Suponiendo que no hay pérdidas de energía de ningún tipo, ¿qué trabajo por minuto debe realizar el motor que acciona la bomba? ¿Cuál es la potencia del motor?

(Una máquina que realiza un trabajo de 1 Joule = 1 kg m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> por segundo, tiene una potencia de 1 Watt = 1 [W].)

- Sobre una partícula de masa  $m = 0.25$  kg, que se mueve a lo largo del eje  $\hat{x}$ , actúa una fuerza  $\vec{F} = F(x)\hat{x}$ , donde la magnitud  $F(x)$  depende de la posición  $x$  del modo indicado en la figura 5.10.

- (a) Determine el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula si ella se traslada desde  $x = 0$  a  $x = 3$  m.
- (b) Si la partícula en el instante  $t = 0$  se encuentra en reposo en  $x = 2$  m, ¿qué velocidad tendrá al llegar a  $x = 6$  m?

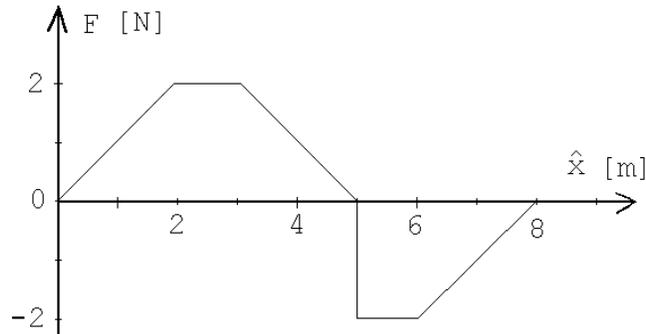


Figura 5.10

Respuestas: a) 4 J; b)  $v=4$  m/s.

4. El sistema mostrado en la figura adjunta se “abandona”, partiendo del reposo, cuando el bloque de masa  $m_1$  está a una distancia  $d$  por encima del suelo. Desprecie el roce.

- (a) Encuentre la aceleración de la masa mayor. ( $m_1 > m_2$ .)
- (b) Usando el resultado de la parte (a), encuentre la velocidad con que la masa mayor llega al suelo.
- (c) Suponiendo que todo el trabajo realizado sobre el sistema se transforma en energía cinética, calcule la velocidad de la masa mayor justo antes de que choque contra el suelo.

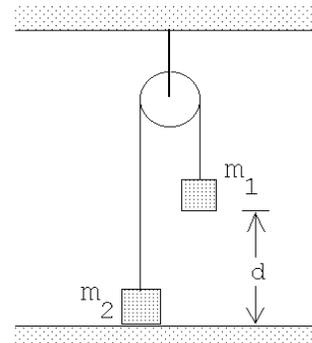


Figura 5.11

5. Considere un cuerpo compuesto de  $N$  masas  $m_j$ , situados en los lugares  $\vec{r}_j$ , con  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ . Demuestre que la energía potencial de tal cuerpo, en un campo gravitacional constante, se puede evaluar suponiendo que toda su masa  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$  está concentrada en su *centro de masas*, dado por

$$\vec{r}_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N) .$$

6. Un bloque cuya masa es  $m = 6$  kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado rugoso, partiendo del reposo. El ángulo de elevación del plano es  $\alpha = 60^\circ$  y los coeficientes de roce estático y cinemático son 0.2 y 0.18, respectivamente.
- Describa todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y determine el trabajo realizado por cada una de ellas, si el bloque se desliza 2 m (a lo largo del plano).
  - ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque?
  - ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer una distancia de 2 m?

Resuelva el problema dos veces: la primera suponga que el *sistema* consiste sólo del bloque y, por lo tanto, las fuerzas de roce son parte de las fuerzas externas; la segunda vez suponga que el sistema consiste del bloque y el plano inclinado, en cuyo caso la disipación de energía por las fuerzas de roce deben considerarse como calor.

7. Se desea levantar lentamente una masa  $M$  hasta una altura  $h$ , usando el sistema de poleas mostrado en la figura adjunta.
- ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse?
  - ¿Qué trabajo se realiza?
  - ¿Cuál es el cambio en energía potencial de la masa?

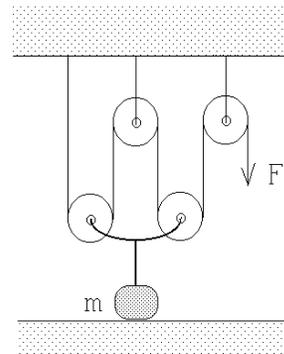


Figura 5.12

8. Un bloque de  $m = 5$  kg se sujeta contra un resorte de constante  $k = 1000$  N/m, comprimiéndolo en  $d_0 = 8$  cm. Al dejar el bloque en libertad, el resorte al expandirse empuja el bloque a lo largo de una superficie horizontal rugosa con coeficiente de roce cinemático  $\mu = 0.2$ .
- ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque mientras el resorte se extiende desde la posición comprimida hasta la posición de equilibrio?
  - ¿Cuál es el trabajo realizado por el roce sobre el bloque cuando éste recorre los 8 cm hasta la posición de equilibrio?
  - ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando el resorte pasa por su posición de equilibrio?
  - Si al pasar por la posición de equilibrio el bloque se despegue del resorte, ¿qué distancia alcanzará a recorrer antes de detenerse?

- (e) Si el bloque se mantiene sujeto al resorte, ¿cuál es la extensión máxima que llegará a tener el resorte?

9. Un péndulo de masa  $m$  colgado de un hilo de largo  $\ell$ , se eleva hasta formar un ángulo  $\theta_0 = 90^\circ$  con la normal y luego se deja en libertad.
- (a) Encuentre la energía cinética de la masa pendular cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio.
  - (b) Demuestre que la tensión de la cuerda, para  $\theta = 0^\circ$ , es 3 veces el peso de la masa pendular.

10. Considere el campo de fuerza dado por

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \hat{x} + F_0 \frac{x}{a} \hat{y} .$$

Evalúe el trabajo que debe realizarse para llevar una partícula de masa  $m$  desde el origen hasta el punto  $A$  a lo largo de los dos caminos indicados en la figura adjunta. El campo de fuerzas ¿es conservativo?

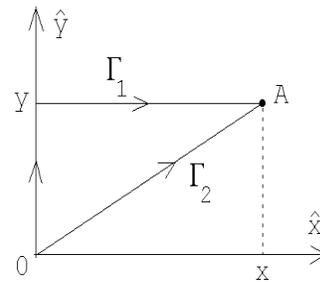


Figura 5.13

11. Una caja, de masa 10 Kg, descansa sobre la cubierta horizontal de una mesa. El coeficiente de fricción entre la caja y la superficie de la mesa es 0.4. En cierto instante se aplica sobre ella una fuerza  $\vec{F} = F_0 \hat{x}$ , adquiriendo la caja una aceleración constante  $\vec{a} = 2 \hat{x} \text{ [m/s}^2\text{]}$ .
- (a) Determine  $F_0$ .
  - (b) Determine el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  cuando la caja se ha trasladado una distancia de 5 m.
  - (c) Evalúe la diferencia entre el trabajo realizado sobre la partícula y el calor  $Q$  disipado por el roce. Demuestre que esta diferencia coincide con la energía cinética final de la caja.

12. Una masa  $m$  resbala, sin roce y debido a la gravedad, por la superficie de una semiesfera de radio  $R$ . La masa parte desde la cúspide sin velocidad inicial. Sea  $P$  el punto en el cual la masa se separa de la semiesfera. Encuentre el ángulo de elevación  $\theta_0$  del punto  $P$ .

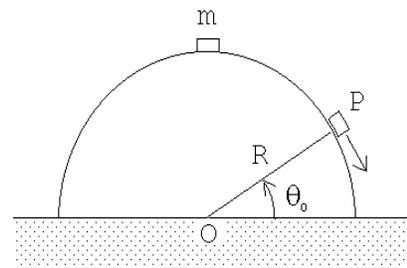


Figura 5.14

Respuesta:  $\sin \theta_0 = 2/3$  .

13. Sobre una cinta transportadora caen 5 kg de material por segundo ( $\Lambda = dm/dt = 5 \text{ kg/s}$ ). Suponiendo que no hay pérdidas de energía de ningún tipo en todo el sistema que impulsa la cinta transportadora, encuentre la fuerza  $F$  que debe aplicarse para mantener la cinta trasladándose con una velocidad constante  $v_0 = 3 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la mínima potencia que debe tener el motor para hacer avanzar la cinta transportadora?

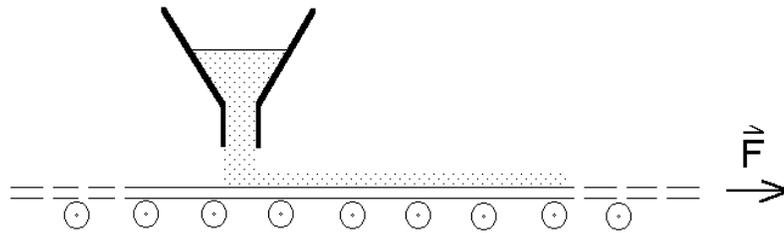


Figura 5.15

Respuesta: 
$$P = \frac{dW}{dt} = \Lambda v_0^2 = 45 \text{ W} .$$

14. Considere dos masas  $m$  unidas por una varilla de largo  $L$  que no tiene peso. Inicialmente el sistema está apoyado en una pared, formando un ángulo  $\theta_0$  con la normal (vea figura 5.16). El sistema comienza a resbalar sin roce debido a la gravedad. ¿A qué altura la masa # 1 se separa de la pared vertical?

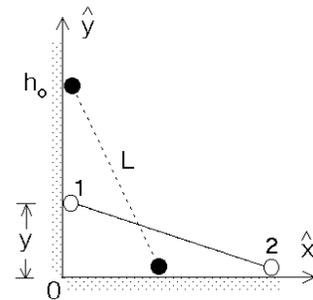


Figura 5.16

Respuesta:  $h = 2h_0/3$  , donde  $h_0 = L \sin \theta_0$  es la altura inicial.

15. Una moneda se desliza sobre un tramo horizontal pulido. Luego entra en un tramo cilíndrico convexo de radio  $R=1 \text{ m}$ . La moneda pierde contacto con la superficie cilíndrica a un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la vertical medido desde el vértice del cilindro. Calcule la rapidez con que se desplazaba la moneda en el tramo horizontal.

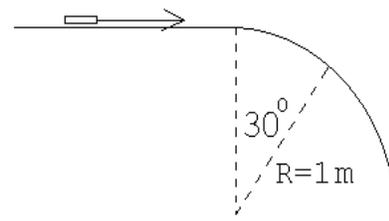


Figura 5.17

16. La fuerza electrostática que ejerce una carga eléctrica  $Q$  sobre otra carga  $q$  viene dada por la así llamada *Ley de Coulomb*:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \ ,$$

donde  $\vec{r} = r \hat{r}$  es el vector de posición de  $q$  respecto a  $Q$ . Notemos que si las dos cargas tienen el mismo signo la fuerza entre las cargas es repulsiva.

Considere una carga  $Q$  fija en el origen y una carga  $q$ , que inicialmente se encuentra en el lugar  $\vec{r}_0$ .

- (a) Encuentre el trabajo que debe realizarse para trasladarla desde  $\vec{r}_0$  hasta  $\vec{r}_1$ .
- (b) Repita la parte a) para varios caminos simples y demuestre que siempre obtiene el mismo resultado (en otras palabras, el campo de fuerzas es conservativo).
- (c) Demuestre que la energía potencial (electrostática) de la carga  $q$  viene dada por

$$U(r) = +\frac{qQ}{r} \ .$$

¿En qué lugar se ha elegido el cero para la energía potencial?

17. Considere una carga  $Q$  fija en el origen y otra carga  $q$ , del mismo signo, que se acerca a  $Q$  a lo largo de la recta que las une. Si  $q$  tiene una energía cinética  $K$  cuando la separación entre las cargas es muy grande (infinita), encuentre la mínima distancia a la que  $q$  se acercará a  $Q$ .

Para resolver este problema use el resultado para la energía potencial obtenido en el problema anterior.

18. Considere la configuración de cargas mostrada en la figura 5.18. Las cargas  $+Q$  están fijas en los lugares  $x = \pm a$ ,  $y = z = 0$  mientras que la carga  $+q$  puede deslizarse sólo a lo largo del eje  $\hat{x}$ .

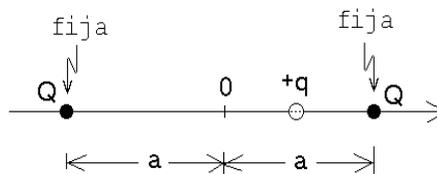


Figura 5.18

- (a) Encuentre una expresión para la fuerza  $F(x)$  que actúa sobre la carga  $+q$ .
- (b) Encuentre la energía potencial  $U(x)$  y gráfiquela. (Especifique claramente dónde eligió el cero para la energía potencial.)

- (c) ¿Se comportará este sistema como un oscilador armónico para pequeños desplazamientos de  $q$  en torno al origen? (Un sistema se comporta como un oscilador armónico si, al desplazar el sistema de su posición de equilibrio, aparece una fuerza proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario —ejemplo, ley de Hooke.)

19. Considere una partícula de masa  $m$  y carga  $-q$  restringida a moverse a lo largo del eje  $\hat{x}$ . Además, dos cargas  $+Q$  se ubican fijamente sobre el eje  $\hat{y}$  a una distancia  $a$  del origen, tal como lo muestra la figura 5.19.

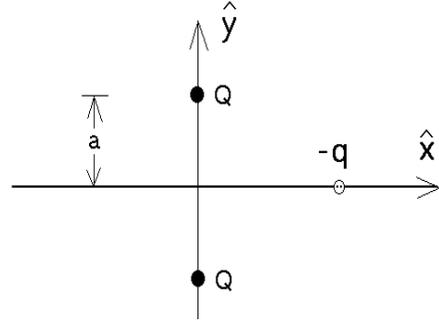


Figura 5.19

- (a) Encuentre la energía potencial  $U(x)$  del sistema de cargas en función de  $x$ .
- (b) Encuentre la fuerza electrostática  $F(x)$  que actúa sobre la carga  $-q$ .
- (c) Evalúe la derivada  $-dU(x)/dx$  y demuestre que ésta coincide con  $F(x)$ .
- (d) ¿Con qué velocidad pasará la partícula por el origen si parte desde el infinito con velocidad cero?
- (e) ¿Se comportará este sistema como un oscilador armónico para pequeños desplazamientos de  $q$  en torno al origen? Si su respuesta es afirmativa, encuentre el período del movimiento periódico.

Respuestas:

$$a) \quad U(x) = \frac{-2Qq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad ; \quad b) \quad \vec{F}(x) = -\frac{2Qqx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x} \quad ; \quad d) \quad v = \sqrt{\frac{4Qq}{ma}} .$$

20. Un bloque de 2 Kg, situado a una altura de 1 m, se desliza por una rampa curva y lisa, partiendo del reposo. Al terminarse la rampa, el bloque resbala 6 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo.

- (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte inferior de la rampa?
- (b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de roce sobre el bloque?
- (c) ¿Cuánto vale el coeficiente de roce cinemático entre el bloque y la superficie horizontal?

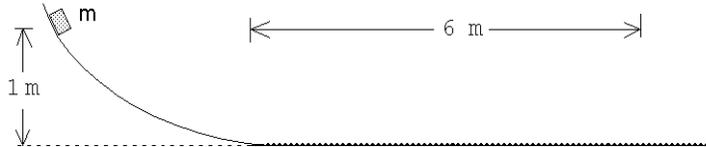


Figura 5.20

21. En un parque de entreteniciones un carro de masa  $m = 100$  kg se desliza (sin roce) por una rampa desde una altura  $h$ , ingresando a un *loop* de radio  $R = 3$  m. La altura  $h$  es la mínima que se requiere para que el carro no se salga de la vía. Emergiendo del *loop* el carro ingresa a la región de frenado, donde en un trayecto de largo  $L$ , el coeficiente de roce cinemático es  $\mu_c = 0,2$ . Sin embargo, el carro no alcanza a detenerse durante la primera pasada, sino que pasa de largo y después de colisionar con un resorte de constante  $k = 500$  N/m, vuelve a ingresar a la región de frenado quedando en reposo al centro de ella (o sea, en el punto C, ver figura 5.21).

- (a) Encuentre la velocidad del carro en el punto B.
- (b) Encuentre  $h$ .
- (c) Encuentre  $L$ .
- (d) Encuentre la máxima compresión que alcanza a tener el resorte.

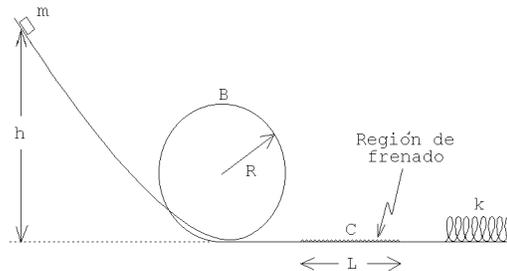


Figura 5.21

22. Una partícula de masa  $m$  se mueve sobre una mesa rugosa a lo largo de un círculo de radio  $R$ . La partícula está amarrada a un extremo de un hilo de largo  $R$ , cuyo otro extremo está fijo al centro del círculo. La velocidad de la partícula inicialmente es  $v_0$ . Debido al roce con la mesa, la partícula se irá frenando. Después de completar una vuelta, su velocidad es  $v_0/2$ .
- (a) Encuentre el trabajo realizado por la fricción durante una vuelta. Exprese el resultado en función de  $m$ ,  $v_0$  y  $R$ .
  - (b) Encuentre el valor del coeficiente de roce cinemático.
  - (c) ¿Cuántas vueltas dará la partícula antes de detenerse?

23. Una masa  $m$  se cuelga de dos resortes *en serie*, de constantes de restitución  $k_1$  y  $k_2$ , tal como se muestra en la figura 5.22a. Encuentre la frecuencia de oscilación para pequeñas vibraciones (verticales) de la masa  $m$ . Repita el cálculo para el caso en que los dos resortes están *en paralelo* (ver figura 5.22b).

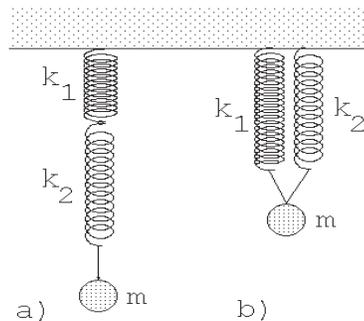


Figura 5.22

24. Supongamos que la función energía potencial  $U(x)$  en función de  $x$ , para una partícula que sólo se puede mover a lo largo del eje  $\hat{x}$ , viene dada por el gráfico mostrado en la figura 5.23

- Identifique los puntos de equilibrio e indique si son estables o inestables.
- ¿Para qué valor de  $x$  la fuerza tiene su valor (módulo) máximo?
- Describa en palabras el movimiento, a medida que transcurre el tiempo, de una partícula de energía total  $E_1$ . (Especifique claramente las condiciones iniciales que está suponiendo.)

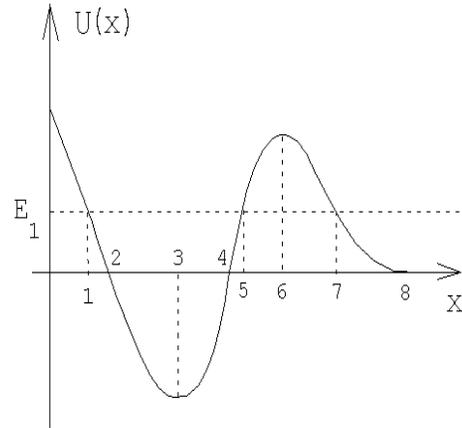


Figura 5.23

25. Suponga que la energía potencial entre dos átomos de una molécula diatómica viene aproximadamente dada por la expresión

$$U(r) = U_0 \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{r} \right)^6 \right] ,$$

donde  $r$  es la separación entre los átomos y  $a$  y  $U_0$  son constantes.

- Grafique la energía potencial.
  - ¿Para qué separación  $r$  los átomos estarán en equilibrio? ¿El equilibrio es estable o inestable?
  - Suponga que los átomos tienen la misma masa  $m_0$ . ¿Con qué frecuencia vibrará la molécula al alejar el sistema levemente de su posición de equilibrio?
  - Si la molécula está en su estado de equilibrio, ¿cuál es la mínima energía que habría que entregarle a la molécula para disociarla, es decir, separarla en sus dos átomos constituyentes?
26. La fuerza gravitatoria entre dos masas  $m_1$  y  $m_2$  viene dada por

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} ,$$

donde  $G$  es la así llamada constante gravitatoria y  $\vec{r} = r\hat{r}$  es el vector que une los centros de masa de ambas masas. El valor experimental de  $G$  es

$$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg} .$$

- (a) Demuestre que el trabajo que debe hacerse para alejar las dos masas desde una separación  $r_1$  a una separación  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ), viene dado por

$$W = Gm_1m_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

- (b) A partir del resultado anterior, demuestre que si el cero de la energía potencial se elige en  $r = \infty$ , entonces la energía potencial en función de la distancia entre las dos masas viene dada por

$$U(r) = -\frac{Gm_2m_1}{r} .$$

- (c) Suponga ahora que  $m_1 = M_T$  es la masa de la tierra y  $m_2 = m$  es la masa de un objeto pequeño. Si tal objeto se encuentra sobre la superficie terrestre y se eleva una pequeña distancia  $h$ , demuestre que la energía potencial cambia en  $\Delta U = mgh$ . Note que de esta manera usted ha encontrado una expresión para la aceleración de gravedad  $g$  en términos del radio de la tierra  $R_T$ , la masa  $M_T$  y la constante de gravitación  $G$ .
- (d) Encuentre la masa de la tierra suponiendo que el radio de la tierra es aproximadamente 6380 km. (Ignore la rotación de la tierra.)
- (e) Encuentre la velocidad de escape, es decir, la velocidad mínima que debe impartirse a una masa  $m$  (inicialmente en reposo sobre la superficie terrestre) para que ella pueda alejarse del campo gravitatorio de la tierra. (Ignore la rotación de la tierra.)
- (f) ¿Hasta qué distancia máxima se podrá alejar el pequeño objeto si su velocidad inicial es la mitad de la velocidad de escape?
27. Un bloque de masa  $M$  se apoya sobre un platillo de masa  $m$  sujeto a un resorte vertical de constante  $k$  y largo natural  $\ell_0$ . Al colocar el platillo con la masa  $M$  sobre el resorte este se comprime teniendo, en equilibrio, un largo  $\bar{\ell}$ .

Comprimamos ahora el resorte otro poco de manera que inicialmente se encuentra contraído a un largo  $\ell < \bar{\ell}$ . En cierto instante se suelta el resorte, permitiendo que éste se expanda.

- (a) Evalúe  $\bar{\ell}$ .
- (b) Demuestre que si el resorte en algún instante supera el largo natural  $\ell_0$ , entonces el bloque se separa del platillo.
- (c) ¿Cuál es el mínimo valor de la contracción ( $\ell_0 - \ell$ ) que debe tener el resorte antes de soltarlo para que el bloque alcance a separarse del platillo?
- (d) Encuentre la altura máxima alcanzada por el bloque (en todos los casos, cuando se separa y cuando no se separa del platillo).

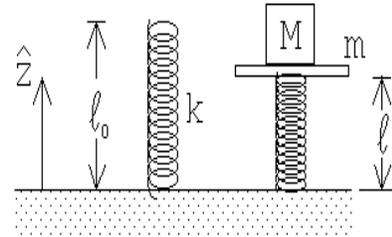


Figura 5.24

Respuesta: c)  $(\ell_0 - \ell) = 2g(M + m)/k$ .

28. En una feria de entretenimientos hay un juego que consiste en que los participantes abordan un carro en el punto  $P$  (ver figura 5.25), caen en caída libre una altura  $h$  hasta el punto  $A$ , luego recorren un cuarto de circunferencia ( $AB$ ) de 2 m de radio y una recta ( $BC$ ) de 5 m, todo esto sin roce. En el punto  $C$  se ingresa a una zona de 8 m de largo con coeficiente de roce  $\mu_c = 0.5$ . Como zona de seguridad, hay una distancia ( $DE$ ) de 5 m sin roce, concluyendo la pista en un gran resorte cuya constante elástica es  $k = 6 \times 10^4$  N/m. La masa del carro, con los pasajeros, es de 500 Kg.
- a) Calcule hasta cuántos metros por sobre el punto  $A$  se puede dejar caer el carro para que éste se detenga en la zona de desaceleración  $CD$ .

Suponga ahora que el operador del juego sube el carro hasta 8 m sobre  $A$  y lo deja caer desde allí.

- b) Encuentre el lugar en que el carro quedará sin velocidad (por primera vez).
- c) Encuentre el lugar en que el carro quedará finalmente en reposo.
- d) Calcule el trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte para detener el carro (por primera vez).
- e) Calcule la aceleración del carro en el instante en que el resorte lo detiene.

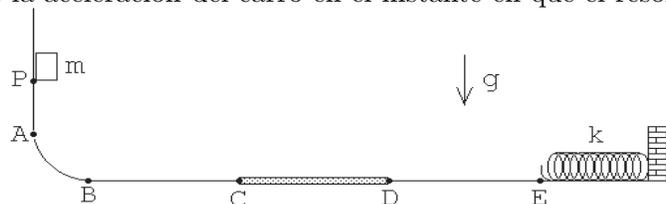


Figura 5.25

29. Considere el montaje mostrado en la figura adjunta. Suponga que las dos masas tienen el mismo valor y que  $\ell_0$  coincide con el largo natural del resorte cuya constante de restitución es  $k = 5mg/\ell_0$ . Suponga además que la masa desliza sin roce sobre la superficie y que en el instante mostrado en la figura el sistema se encuentra momentáneamente en reposo.

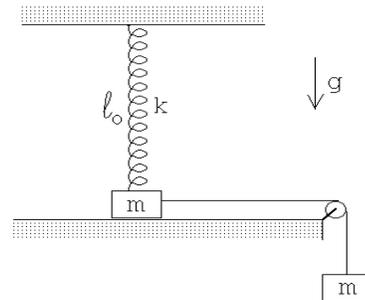


Figura 5.26

- (a) Demuestre que cuando la masa que se desliza por la superficie se haya desplazado en una cantidad  $x = 3\ell_0/4$  hacia la derecha, esta se levantará de la superficie.
- (b) Demuestre que en el momento en que la masa se separa del plano la velocidad es  $v = \sqrt{19g\ell_0/32}$ .

30. Considere dos pequeñas masas iguales  $m$  unidos mediante cuerdas ideales de longitud  $\ell = 1,5$  m, como se indica en la figura adjunta. El sistema rota con velocidad angular uniforme  $\omega$ . El ángulo que la cuerda atada al brazo (de longitud  $L = 4$  m) forma con la vertical es de  $60^\circ$ . Encuentre el ángulo  $\phi$  que la otra cuerda hace con la vertical y encuentre la razón entre las tensiones de cada cuerda.

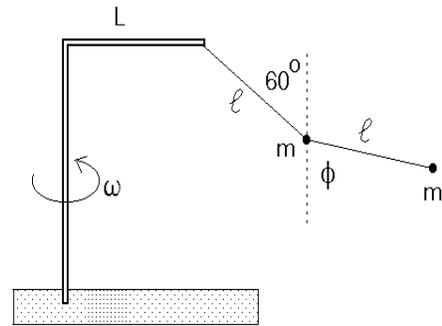


Figura 5.27

31. Dos cuerpos  $A$  y  $B$ , de masas  $m$  y  $2m$ , respectivamente, se unen mediante una cuerda ideal. El cuerpo  $A$  posa sobre una mesa de superficie áspera (coeficiente de roce  $\mu_c$ ) mientras que  $B$  se deja caer como se muestra en la figura 5.28. No hay roce entre la cuerda y el punto de contacto con el borde de la mesa. Calcule el ángulo  $\theta$  formado por la cuerda que sostiene la masa  $B$  y la horizontal cuando el bloque  $A$  comienza a resbalar. El largo de la cuerda entre el borde de la mesa y el cuerpo  $B$  es  $L$ .

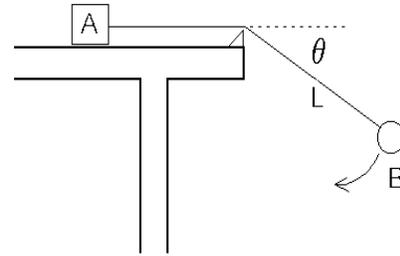


Figura 5.28

32. Dos monos, llamados *Patín* y *Logo*, de igual masa  $m$  están agarrados de una cuerda que pasa por encima de una polea (sin roce), frente al Museo del Louvre. Habiendo escuchado el rumor de que en el museo hay una famosa pintura de una supuesta congénere con una enigmática sonrisa, el mono *Patín* decide subir por la cuerda hasta una posición que le permita mirarla por la ventana. Para ello debe remontar una altura  $h$ .

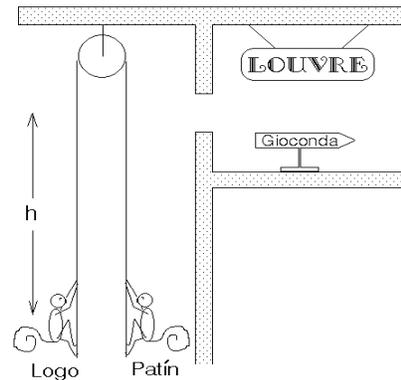


Figura 5.29

- Analice como el movimiento del mono *Patín* afecta la posición del mono *Logo*.
- Calcule el trabajo que debe realizar el mono *Patín* para llevar a cabo su propósito.

33. Considere dos masas  $m$  unidas por un hilo de largo  $2L$ , que caen con el hilo estirado en forma horizontal. Después de caer una distancia  $L$  el centro del hilo choca con un clavo, correspondiendo de ahí en adelante la trayectoria de las dos masas a un movimiento circular. Si el hilo se corta cuando la tensión llega a tener el valor  $\tau_{max} = 7mg/2$ , encuentre el ángulo  $\phi$  que en ese instante forma el hilo con la horizontal (ver figura 5.30).

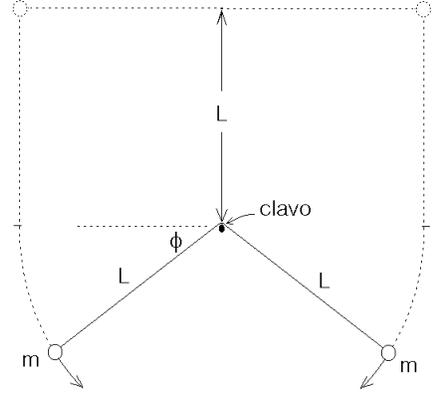


Figura 5.30

## 5.5 Solución a algunos de los problemas

### Solución al problema 12

Cuando la masa  $m$  haya resbalado hasta formar un ángulo  $\theta$  con la horizontal, la energía potencial (gravitatoria) habrá cambiado en

$$\Delta U_{\text{pot}} = mg \Delta h = mg(R - R \sin \theta) .$$

Como no hay roce, este cambio de energía potencial debe coincidir con la energía cinética que adquiere la masa  $m$ , o sea, debe cumplirse la relación

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \sin \theta) .$$

Esto nos permite encontrar la velocidad  $v$  de la masa en función de  $\theta$ :

$$v = \sqrt{2gR(1 - \sin \theta)} .$$

La masa  $m$  recorre un arco de círculo de radio  $R$ , luego la fuerza centrípeta (que apunta en la dirección  $-\hat{r}$ ) es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{mv^2}{R}\hat{r} .$$

(También hay una fuerza tangencial que, sin embargo, aquí no es necesario evaluar.) Las únicas fuerzas reales que actúan sobre  $m$  son la normal  $N\hat{r}$  y el peso  $-mg\hat{z}$ . (Nuevamente hemos elegido al eje  $\hat{z}$  apuntando hacia arriba.) La componente radial

de la fuerza neta es  $(N - mg \sin \theta) \hat{r}$ . Esta debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$-\frac{mv^2}{R} = N - mg \sin \theta .$$

Despejando  $N$  se obtiene

$$\begin{aligned} N &= mg \sin \theta - \frac{mv^2}{R} = mg \sin \theta - \frac{1}{R} 2mgR(1 - \sin \theta) \\ &= mg (3 \sin \theta - 2) \end{aligned}$$

La masa  $m$  inicia su movimiento en el ápice, en cuyo caso  $\theta = 90^\circ$ , siendo la fuerza normal que ejerce la semiesfera sobre la masa  $N = mg$ . A medida que transcurre el tiempo,  $\theta$  disminuye y luego también  $N$ . Cuando  $\sin \theta = 2/3$ , la fuerza normal se hace cero, siendo ese el lugar en que la masa  $m$  se separa de la semiesfera.

### Solución al problema 14

Supongamos por un momento que la partícula 1 nunca se despegue de la pared. Cuando la partícula 1 haya bajado desde  $h_0$  hasta una altura  $y$ , entonces, por conservación de energía

$$mg(h_0 - y) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 .$$

Sabemos que  $x^2 + y^2 = L^2$ . Derivando esta relación se deduce que  $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$ , o sea,

$$\dot{y} = -\dot{x} \frac{x}{y} .$$

Sustituyendo esto en la ecuación de conservación de la energía se encuentra la relación

$$mg(h_0 - y) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \frac{L^2}{y^2} .$$

De esta última ecuación podemos despejar la velocidad de la partícula 2 en función de la altura a la que se encuentra la partícula 1:

$$\dot{x}^2 = \frac{2g}{L^2} (h_0 - y) y^2 .$$

La velocidad de la partícula 2 depende de  $y$ . Observemos que la rapidez con que se mueve la partícula 2 es nula cuando  $y = h_0$  y también cuando  $y = 0$ , luego en algún lugar entremedio debe tener un máximo.

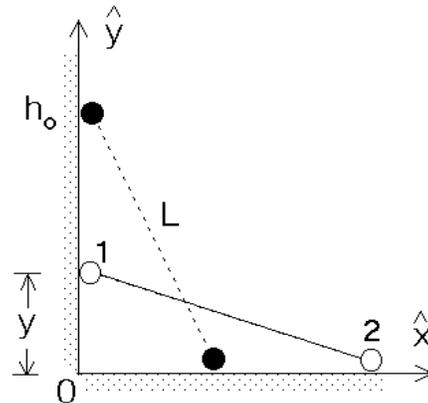


Figura 5.31

Encontremos el valor  $y = h$  para el cual  $\dot{x}$  tiene su máximo. Para ello debemos encontrar el máximo de la función  $f(y) = (h_0 - y)y^2$ . Igualando la derivada de  $f(y)$  a cero se encuentra

$$2h_0y - 3y^2 = 0 .$$

Despejando  $y$  se encuentra  $y = h = 2h_0/3$ . Es claro que cuando la partícula 1 llegue a esa altura, se desprenderá de la pared (si es que no hay un mecanismo que evite que eso ocurra). La razón es la siguiente: el único elemento que ejerce una fuerza horizontal sobre el sistema (las dos masas con la varilla) es la pared vertical. Mientras  $y > h$  la partícula 2 acelera (la rapidez  $\dot{x}$  aumenta) en la dirección  $+\hat{x}$ , luego la pared debe ejercer sobre el sistema una fuerza en esa dirección. Cuando  $y < h$  entonces la partícula 2 desacelera ( $\dot{x}$  vuelve a disminuir); eso implica que la pared ejerce una fuerza en la dirección  $-\hat{x}$  sobre el sistema, lo que a su vez sólo es posible si existe algún mecanismo que *sujete* a la partícula 1 a la pared vertical. Si tal mecanismo no existe, entonces la partícula 1 se separa de la pared.

### Solución al problema 18

De acuerdo a la ley de Coulomb, las cargas  $Q$  de la izquierda y de la derecha ejercen sobre  $q$  una fuerza

$$\vec{F}_1 = \frac{qQ}{(a+x)^2} \hat{x}$$

y

$$\vec{F}_2 = -\frac{qQ}{(a-x)^2} \hat{x} ,$$

respectivamente. La fuerza total  $\vec{F}(x)$  que actúa sobre la carga  $q$  es la suma vectorial de las dos fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , por lo tanto,

$$\vec{F}(x) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = qQ \left[ \frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} \right] \hat{x} .$$

Para encontrar la energía potencial también podemos evaluar primero la energía potencial de  $q$  con cada una de las cargas  $Q$  separadamente, para luego hacer la suma (escalar) de ellas. La energía potencial de una carga  $q$  a una distancia  $r$  de otra carga  $Q$  viene dada por (ver problema 14)  $U(r) = qQ/r$ . Usando esta expresión se encuentra que la energía potencial de la carga  $q$ , cuando ésta se encuentra en el lugar  $x$ , es:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = \frac{qQ}{|a+x|} + \frac{qQ}{|a-x|} .$$

La energía potencial es cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . La figura 5.32 muestra un gráfico de la función  $U(x)$ .

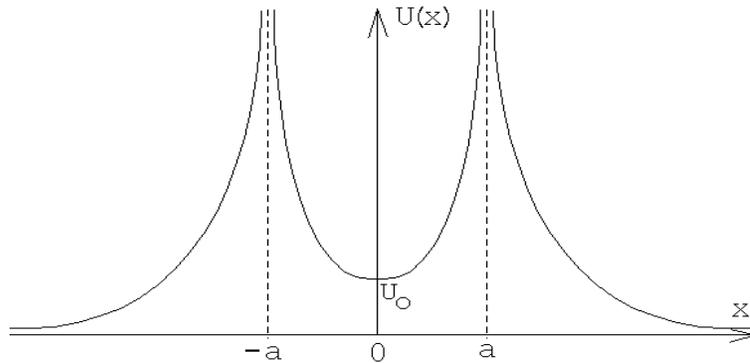


Figura 5.32

De la figura se deduce que  $x = 0$  es un punto de equilibrio estable del sistema. Para pequeños desplazamientos, o sea para  $|x| \ll a$ , se tiene

$$\begin{aligned} U(x) &= qQ \left[ \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{qQ}{a} \left[ \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1} \right] \\ &\simeq \frac{qQ}{a} \left[ \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) \right] \\ &= \frac{2qQ}{a} + \frac{2qQ}{a^3} x^2 = U_0 + \frac{2qQ}{a^3} x^2. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se deduce que, para pequeños desplazamientos de  $q$  desde el origen, la energía potencial es cuadrática (es decir, similar a la expresión que se tenía para una masa adosada a un resorte).

La fuerza que actúa sobre  $q$  al desplazarla levemente de su posición de equilibrio es

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{4qQ}{a^3} x.$$

Esta fuerza es análoga a la ley de Hooke: es proporcional y apunta en sentido contrario al desplazamiento. El papel de la constante de restitución  $k$  lo juega  $4qQ/a^3$ . Luego, al desplazar la carga  $q$  levemente de su punto de equilibrio, ésta oscilará *armónicamente* con un período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{4qQ}},$$

donde  $m$  es la masa de la carga  $q$ .

**Solución al problema 25**

La figura adjunta muestra el gráfico de la energía potencial. Para  $r > a$  la pendiente es positiva, para  $r = a$  es nula, mientras que para  $r < a$  es negativa. La fuerza entre los dos átomos de la molécula es  $-dU(r)/dr$ . Cuando la derivada es nula (para  $r = a$ ), la fuerza también es nula, luego la separación  $r = a$  corresponde a un punto de equilibrio. Para  $r > a$ ,  $dU(r)/dr > 0$  y, por consiguiente,  $F(r) < 0$ . En palabras: si la separación de los dos átomos de la molécula es mayor que  $a$ , entonces la fuerza entre ellas será atractiva.

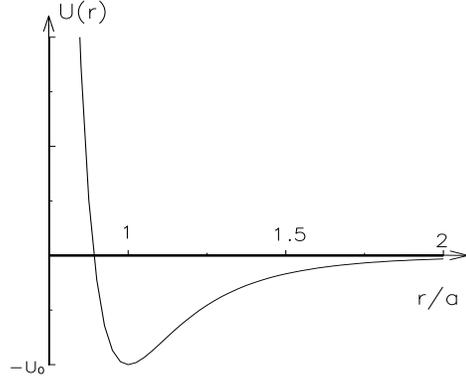


Figura 5.33

Lo contrario ocurre para  $r < a$ : en ese caso  $dU(r)/dr < 0$  y por consiguiente  $F(r) > 0$ , o sea, la fuerza que aparece tratará de alejar a los dos átomos (aumentar  $r$ ). Resumiendo, cada vez que el sistema se desplaza de su posición de equilibrio, aparece una fuerza que trata de llevar al sistema nuevamente a su posición de equilibrio. (Es precisamente esto último lo que caracteriza a un punto de equilibrio estable.)

Sea  $\vec{F}_{12}$  la fuerza que actúa sobre el átomo 1 debido al átomo 2 y  $\vec{F}_{21}$  la fuerza que actúa sobre el átomo 2 debido al átomo 1. Por supuesto que, de acuerdo al principio de acción y reacción (tercera ley de Newton)  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Sea  $O$  un origen y  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  los vectores de posición de cada uno de los átomos (ver figura 5.34).

Las ecuaciones de movimiento, de acuerdo a la segunda ley de Newton, son:

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

y

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} .$$

Restando una de la otra se obtiene

$$m_0 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = \vec{F}_{21} - \vec{F}_{12} = 2\vec{F}_{21} . \tag{5.6}$$

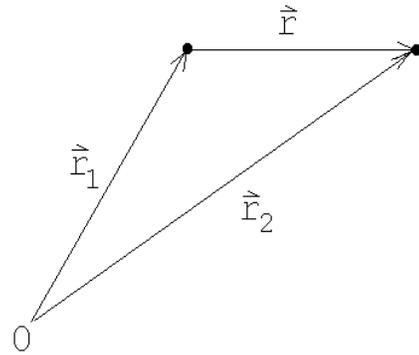


Figura 5.34

La fuerza que actúa sobre la partícula 2 debida a la partícula 1 es

$$\vec{F}_{21} = -\frac{dU(r)}{dr} \hat{r} ,$$

donde  $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Como estamos suponiendo que la molécula no rota, se tiene que el vector unitario  $\hat{r}$ , que apunta a lo largo de la línea que une a ambos átomos, no variará a medida que transcurre el tiempo. Se tiene entonces que

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = r \hat{r}$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{r} \hat{r} .$$

Sustituyendo la última ecuación en (5.6) se obtiene

$$m_0 \ddot{r} \hat{r} = 2\vec{F}_{21} . \quad (5.7)$$

Evaluemos  $\vec{F}_{21}$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -\frac{dU(r)}{dr} \hat{r} \\ &= 12 \frac{U_0}{a} \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^6 - 1 \right] \left( \frac{a}{r} \right)^7 \hat{r} . \end{aligned}$$

Escribamos  $r$  de la forma  $r = a + s$ . De esta manera,  $s = 0$  corresponderá a la molécula en su posición de equilibrio. Si los átomos se desplazan sólo levemente de su posición de equilibrio, entonces  $|s| \ll a$ . En este caso

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= 12 \frac{U_0}{a} \left[ \left( \frac{a}{a+s} \right)^6 - 1 \right] \left( \frac{a}{a+s} \right)^7 \hat{r} \\ &= 12 \frac{U_0}{a} \left[ \left( 1 + \frac{s}{a} \right)^{-6} - 1 \right] \left( 1 + \frac{s}{a} \right)^{-7} \hat{r} \\ &\simeq 12 \frac{U_0}{a} \left[ 1 - 6 \frac{s}{a} - 1 \right] \left( 1 - 7 \frac{s}{a} \right) \hat{r} \\ &\simeq -72 \frac{U_0}{a^2} s \hat{r} + o(s^2) . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sutituyendo este resultado en (5.7), se obtiene

$$m_0 \ddot{r} \hat{r} = -72 \frac{U_0}{a} s \hat{r} .$$

Cancelando a ambos lados  $\hat{r}$  y usando el hecho que  $\ddot{r} = \ddot{s}$ , se tiene

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 , \quad (5.9)$$

con

$$\omega_0^2 = 72 \frac{U_0}{a^2 m_0} .$$

La ecuación diferencial (5.9) corresponde a la de un oscilador armónico. Ya sabemos que en ese caso, la magnitud  $s$  (el alejamiento de un átomo de su posición de equilibrio) realizará oscilaciones armónicas, siendo el período de tales oscilaciones

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{a^2 m_0}{18 U_0}} .$$

De la figura 5.33 también se deduce que para disociar a la molécula, es decir, para separar los átomos a una distancia  $r \rightarrow \infty$ , se debe entregar al sistema una energía al menos igual a  $U_0$ .

### Solución al problema 28

a) Si la masa  $m$  parte de una altura  $h$ , entonces su energía (antes de entrar a la región de desaceleración) es

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = mgh .$$

Al atravesar toda la zona de desaceleración, la energía disipada en calor es  $Q = \mu_c m g \overline{CD}$ . Para que la masa  $m$  quede en reposo en  $D$ , toda su energía debe ser disipada como calor, o sea,

$$mgh = \mu_c m g \overline{CD} .$$

Despejamos  $h$ :

$$h = \mu_c \overline{CD} = 0,5 \cdot 8 \text{ [m]} = 4 \text{ [m]} .$$

c) Ahora  $h = 8$  [m]. La mitad de la energía se disipará durante la primera pasada por la región de desaceleración y el resto se disipará en la segunda pasada. El carro  $m$  quedará finalmente en reposo en el punto  $C$ .

b) Después de emerger de la región de desaceleración por primera vez, la energía del carro será  $E_1 = mgh/2$ . Esta tendrá que ser la energía potencial del resorte cuando esté comprimido con el carro detenido:

$$\frac{mgh}{2} = \frac{1}{2} k x_0^2 ,$$

donde  $x_0$  es la compresión máxima del resorte. El carro se detendrá por primera vez a una distancia  $x_0$  a la derecha del punto  $E$ . Despejando  $x_0$  se encuentra (con  $g = 10$  [m/s<sup>2</sup>]),

$$x_0 = \sqrt{\frac{mgh}{k}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 10 \cdot 8}{6 \cdot 10^4}} \text{ [m]} = 0,816 \text{ [m]} .$$

d) El trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte para detener el carro es igual a la energía con que incidió sobre el resorte,  $mgh/2 = 500 \cdot 10 \cdot 8/2$  [J] = 20000 [J].

También podemos encontrarla evaluando la integral

$$W = \int_0^{x_0} kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^{x_0} = \frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^4 \cdot (0,816)^2 \text{ [J]} .$$

e) La fuerza que ejerce el resorte cuando está comprimido es  $-kx_0 \hat{x}$ , donde  $\hat{x}$  apunta hacia la derecha. La aceleración del carro, por lo tanto, será

$$\vec{a} = -\frac{kx_0}{m} \hat{x} = -97,92 \text{ [m/s}^2\text{]} ,$$

aproximadamente 10 veces la aceleración de gravedad.

### Solución al problema 33

Después de chocar el hilo con el clavo y al formar un ángulo  $\phi$  con la horizontal, la energía potencial de cada masa habrá disminuído en  $mgL(1 + \sin \phi)$ . Esta será la energía cinética que tendrá cada masa, es decir,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 + \sin \phi) .$$

Esta relación nos permite encontrar la velocidad  $v = v(\phi)$ :

$$v^2 = 2gL(1 + \sin \phi) .$$

Como cada masa está recorriendo un círculo sabemos que la fuerza radial neta (la fuerza centrípeta) que se está ejerciendo sobre ella es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{mv^2}{L} \hat{r} = -2mg(1 + \sin \phi) \hat{r} .$$

Las únicas fuerzas “reales” que están siendo ejercidas sobre cada masa son la fuerza debido a la tensión del hilo y la fuerza de gravedad:

$$\vec{F}_{\text{real}} = -\tau \hat{r} - mg \hat{z} .$$

La componente radial de esta fuerza es  $-\tau + mg \sin \phi$ . Esta debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$-\tau + mg \sin \phi = -2mg(1 + \sin \phi) .$$

El hilo se corta si el ángulo  $\phi$  es tal que  $\tau = 7mg/2$ . Llamando  $\phi_0$  a ese ángulo se tiene

$$-\frac{7}{2}mg + mg \sin \phi_0 = -2mg(1 + \sin \phi_0) .$$

A partir de esta relación se encuentra que  $\sin \phi_0 = 0,5$ , o sea,  $\phi_0 = 30^\circ$ .