

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA

Herbert Massmann

AGRADECIMIENTOS (1997)

Aproximadamente la mitad de los problemas que figuran al final de cada capítulo no son originales del autor, sino que provienen de controles, pruebas y listas de ejercicios que han circulado en la Facultad de Ciencias y en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile durante la última década. Lamentablemente resulta casi imposible establecer quiénes son los autores intelectuales de estos problemas para así poder darles el debido crédito.

Deseo agradecer a Víctor Muñoz, Miguel Kiwi, Fernando Lund, Patricia López, Pamela Weber, Claudio Romero y Lorena Céspedes, que con sus comentarios han mejorado el texto y permitieron pesquisar muchos de los errores de las versiones preliminares. Finalmente también mis agradecimientos al Dr. Hugo Arellano que gentilmente permitió incorporar a estos apuntes la lista de problemas que él confeccionó para el curso.

Herbert Massmann

Notas adicionales (2008)

Los apuntes aquí presentados han servido de base, durante mucho tiempo, para los cursos de Mecánica I y II, correspondientes al Primer y Segundo Semestre de Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. La versión presentada en este archivo se basa en la última preparada por el Dr. Herbert Massmann de que disponemos, correspondiente al año 1997. No todas las fuentes estaban disponibles, sin embargo, y completar estos apuntes ha significado reconstruir algunos capítulos (12–15) a partir de copias en papel. De hecho, en esta versión dos capítulos no están terminados: Gravitación (Cap. 11, con problemas en algunas figuras) y Ondas Sonoras (Cap. 15, ausencia de figuras y algunas referencias cruzadas). Ambos se pueden encontrar como documentos separados, en <http://llacolen.ciencias.uchile.cl/~vmunoz/cursos/mecanica2/mecanica2.html>.

Los agradecimientos que están más arriba fueron copiados del texto original del Dr. Massmann. Por mi parte, quisiera agregar agradecimientos a Areli Zúñiga, Max Ramírez y Felipe González, que, en años posteriores, también han colaborado en la escritura de algunas secciones o en la confección de figuras. También a Nicolás Rojas, Felipe Asenjo, Denisse Pastén y Macarena Domínguez, que han leído el texto y encontrado aun más errores.

Esperamos completar y mejorar estos apuntes en la medida que el tiempo y la colaboración de nuestros colegas y alumnos lo permita.

Víctor Muñoz

Índice general

1. Expansiones y Trigonometría	1
1.1. Expansiones y series	1
1.2. Elementos de trigonometría	8
1.3. Problemas	19
1.4. Solución a algunos de los problemas	28
2. Cinemática en una dimensión	33
2.1. Posición, velocidad y aceleración	33
2.2. El camino inverso	53
2.3. Máximos y mínimos	57
2.4. Elementos del cálculo infinitesimal e integral	58
2.5. Problemas	61
2.6. Solución a algunos de los problemas	76
3. Cinemática en dos y tres dimensiones	84
3.1. Vectores	84
3.2. Cinemática	94
3.3. Coordenadas polares	102
3.4. Problemas	105
3.5. Solución a algunos de los problemas	117
4. Las leyes de Newton	122
4.1. Espacio y tiempo	122
4.2. Las leyes de Newton	125
4.3. Uso de las leyes de Newton	128
4.4. Roce cinético y estático	136
4.5. Problemas	143
4.6. Solución a algunos de los problemas	156
5. Trabajo y energía	168
5.1. Trabajo y energía para movimientos en una dimensión	169
5.2. Trabajo para un movimiento en tres dimensiones	181

5.3. Potencia	186
5.4. Ejemplos	187
5.5. Resultados útiles para sistemas conservativos	188
5.6. Problemas	194
5.7. Solución a algunos de los problemas	209
6. Momento lineal y colisiones	218
6.1. Conservación del momento lineal	218
6.2. Colisiones	222
6.3. Impulso	226
6.4. Problemas	228
6.5. Solución a algunos de los problemas	235
6.6. Colisión de dos discos	241
7. Torque, centro de masas y equilibrio	250
7.1. Producto vectorial	250
7.2. Torque	254
7.3. Centro de masas	258
7.4. Evaluación numérica del centro de masas	261
7.5. Equilibrio	263
7.6. Problemas	267
7.7. Solución a algunos de los problemas	275
8. Momento angular	286
8.1. Momento angular de una partícula	286
8.2. Momento angular de varias partículas	290
8.3. Problemas	296
8.4. Solución a algunos de los problemas	301
9. Rotación de un cuerpo rígido	305
9.1. Las ecuaciones básicas	305
9.2. Una notación útil	311
9.3. Momento de inercia	314
9.4. Problemas	321
9.5. Solución a algunos de los problemas	334
10. Fuerzas ficticias	343
10.1. Referencial uniformemente acelerado	344
10.2. Referencial en rotación uniforme	347
10.3. Problemas	351
10.4. Solución a algunos de los problemas	354

11. Gravitación	361
11.1. Elipses	362
Elipse en coordenadas cartesianas	362
Elipse en coordenadas polares	363
11.2. Las leyes de Kepler	366
11.3. Satélites	370
11.4. Potencial efectivo	374
11.5. Trayectorias de los satélites	379
11.6. El campo y potencial gravitacional	381
11.7. El caso eléctrico: la ley de Coulomb	385
11.8. Campo gravitacional de una cáscara esférica	386
11.9. Campo gravitacional de una esférica sólida	390
Densidad media de la Tierra	392
11.10 Problemas	392
11.11 Solución a algunos de los problemas	401
12. Fluidos	408
12.1. Conceptos preliminares	408
12.2. La presión atmosférica P_0	410
12.3. Principio de Arquímedes	412
12.4. La fórmula barométrica	414
12.5. Tensión superficial	418
12.6. Capilaridad	420
12.7. Fluidos en movimiento	421
12.8. Aplicaciones del Principio de Bernoulli	424
12.9. * Viscosidad	428
12.10 Problemas	431
12.11 Solución a algunos de los problemas	442
13. Oscilador armónico	446
13.1. La ecuación diferencial $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$	446
13.2. El oscilador armónico simple	449
13.3. El oscilador armónico atenuado	452
13.4. El oscilador armónico forzado	456
13.5. Osciladores armónicos acoplados	459
13.6. * Modos normales de una cuerda	464
13.7. Problemas	469
13.8. Solución a algunos de los problemas	481

14. Ondas	488
14.1. La ecuación de ondas	488
14.2. Solución de la ecuación de ondas	490
14.3. Ondas estacionarias en una cuerda de largo L	498
14.4. * Desarrollo de Fourier	501
14.5. Problemas	503
14.6. Solución a algunos de los problemas	512
15. Ondas sonoras	516
15.1. Propagación del sonido	516
15.2. Velocidad del sonido	517
15.3. La ecuación de ondas	519
15.4. Frecuencia	521
15.5. Intensidad	524
15.6. Propagación del sonido	526
15.7. Timbre	533
15.8. Consonancia y disonancia	534
15.9. Oscilaciones de una columna de aire	537
15.10 Efecto Doppler	540
15.11 Problemas	541
15.12 Solución a algunos de los problemas	545

Capítulo 1

Expansiones y Trigonometría

versión 21 marzo 2011

En este primer capítulo se recopilarán algunos resultados de las Matemáticas que son básicos para los capítulos que siguen. Primero, en la Sec. 1.1, revisaremos resultados relevantes para describir de manera aproximada cantidades físicas. Luego, en la Sec. 1.2, recordaremos algunos resultados básicos de trigonometría. En este capítulo, particularmente en la Sec. 1.1, hay afirmaciones que no serán demostradas rigurosamente. La idea es simplemente dar una intuición acerca de resultados matemáticos cuya demostración rigurosa es materia de cursos de Cálculo especialmente, así como introducir lenguaje formal que necesitaremos en el resto de nuestro curso.

1.1. Expansiones y series

La Física es, ante todo, una ciencia experimental. Necesariamente, entonces, en su estudio tendremos que lidiar con números “concretos”, con mediciones. Por otro lado, la Matemática nos proporciona resultados abstractos que, en algún sentido, representan la “realidad”. Por ejemplo, el número π se puede conocer con infinitos decimales en principio, y el perímetro de un círculo de radio r siempre es $2\pi r$. Ingenualmente, uno podría pensar entonces que la circunferencia del planeta Tierra se puede determinar con infinitos decimales también. Sin embargo, ello no es cierto, pues las imprecisiones experimentales al determinar el radio de la Tierra “estropean” toda la infinita precisión con que se conoce π . Esto puede ser frustrante desde el punto de vista matemático, pero son numerosas las situaciones en que, en general, no es tan importante tener un número exacto, pero sí es crucial tener una buena aproximación. Por ejemplo, sabemos que un partido de fútbol significa esencialmente 45 minutos de juego por lado, y 15 de descanso. Sabemos que nunca es exactamente así, pero no importa, porque esa información nos basta para tomar decisiones tales como si alcanzamos a ir al supermercado antes de que comience el segundo tiempo, o si podemos ver el partido hasta el final sin perdernos el comienzo de nuestra serie favorita

en otro canal. Tampoco necesitamos comprar una balanza de precisión infinita para controlar nuestro peso: sería absurdo que nos preocupáramos porque hemos subido una milésima de gramo desde el desayuno. . .

Cuando hacemos Física, nunca nos interesan los números “exactos”, infinitamente precisos. Pero tener una buena aproximación es fundamental siempre. Por ello dedicaremos la primera sección de este curso a exponer algunos resultados matemáticos aproximados, pero que utilizaremos frecuentemente en adelante.

Para comenzar, consideremos las expansiones siguientes:

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= 1+x \\(1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\(1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \\(1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\end{aligned}$$

En general, para un entero n positivo arbitrario, la expansión del binomio $(1+x)^n$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!}x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}x^4 + \dots + nx^{(n-1)} + x^n, \quad (1.1)\end{aligned}$$

donde $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, es decir, el producto de los n primeros números enteros, y se denomina el *factorial* del número entero n . Se define también el factorial de cero: $0! \equiv 1$. (Esto se hace por razones de conveniencia matemática, aunque en este caso ya no tiene sentido hablar del factorial como el producto de los “cero primeros números enteros”.)

La expansión (1.1) es válida para cualquier valor de x y cualquier valor de n entero no negativo. Observamos además que los coeficientes de dicha expansión son simétricos: los coeficientes de la potencia más baja (x^0) y la más alta (x^n) son 1; los coeficientes de la segunda potencia más baja (x^1) y la segunda más alta ($x^{(n-1)}$) son n , etc. Además, la expansión consta de un número finito de términos, exactamente igual a $n+1$.

Lo anterior se puede entender fácilmente, ya que (1.1) es simplemente el producto de n factores iguales. Lo interesante es que es posible generalizar dicha expresión al caso en que el exponente no es entero, sino un número real α arbitrario. En efecto, en ese caso

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots \quad (1.2)\end{aligned}$$

Observemos que si α es un entero n , positivo o cero, (1.2) se reduce efectivamente a (1.1), por cuanto existe un factor $(\alpha - n)$ que anula todos los términos desde en $n + 1$ -ésimo en adelante. [Naturalmente, esto no demuestra que (1.2) es la generalización correcta de (1.1), pero es un indicio de que puede serlo.] Así, cuando α es un entero no negativo (1.2) tiene una cantidad finita de términos, y siempre se puede calcular, independiente del valor de x . Sin embargo, cuando α es cualquier otro número (entero negativo o un número real arbitrario), (1.2) posee *infinitos* términos.

Lo anterior es un problema, porque en general una suma infinita de términos puede ser un número infinito. Por ejemplo, $1 + 1 + 1 + \dots$ es infinito. Pero también podemos construir sumas que, aunque consten de infinitos términos, sean un número finito: $1 + 0.1 + 0.001 + 0.0001 + \dots = 1.\bar{1}$. En Física no nos interesan las cantidades infinitas. Toda cantidad medible es un número finito. ¿Qué significa entonces (1.2), considerando que a veces el lado derecho puede ser infinito o, en general, no estar bien definido? En lenguaje técnico, se dice que la *serie* (suma infinita) $1 + 0.1 + 0.001 + 0.0001 + \dots$ *converge*, esto es, es una *serie convergente*. La serie $1 + 1 + 1 + \dots$, en tanto, no converge, es decir, es una serie no convergente.

Matemáticamente es posible encontrar *criterios de convergencia*, de modo que es posible saber de antemano si una serie dada converge o no. Un criterio sencillo es notar si cada término es menor en módulo que el anterior. Es claro que si tengo infinitos términos iguales, o si dichos términos son cada uno mayor que el anterior, la suma de todos ellos debe ser infinita. En cambio, si cada término es menor en módulo que el anterior, existe al menos alguna posibilidad de que el resultado sea un número finito (así sucede al menos en nuestro segundo ejemplo, $1 + 0.1 + 0.001 + 0.0001 + \dots$). Sin embargo, no siempre sumas infinitas con términos cada vez menores son convergentes. Por ello, se dice que esta condición (cada término menor en módulo que el anterior) es *necesaria*, pero no *suficiente*. (Vale decir, toda serie convergente satisface esta condición, pero no todas las series que la satisfacen son convergentes. En la práctica, esto significa que es un criterio definitivo para establecer que una serie es *no convergente*, pero no es conclusivo para establecer que converja.)

De lo dicho hasta ahora, entonces, se sigue que lo que necesitamos es que la expresión (1.2) sea convergente para que tenga sentido. Por ejemplo, si $\alpha = 1/2$, el lado izquierdo de (1.2) es $\sqrt{1+x}$, un número completamente normal (mientras $x > -1$). Sin embargo, el lado derecho de (1.2) es una serie, y no necesariamente converge. De hecho, se puede mostrar que, para un α arbitrario, converge sólo si $|x| < 1$.

Por ejemplo, calculemos los lados derecho e izquierdo de (1.2) para $\alpha = 1/2$, con dos valores distintos de x .

a) Si $x = 3$, el lado izquierdo es

$$(1+x)^\alpha = \sqrt{4} = 2.$$

El lado derecho, en tanto, es

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot 3^3 + \dots = 1 + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots$$

Sumando los cuatro primeros términos de la serie, el resultado es 3.07, bastante alejado de 2. Uno podría pensar que esto mejorará al sumar más términos, pero no es así, con diez términos, por ejemplo, el resultado es ~ 155.68 . Y así sucesivamente, cada vez más alejando del resultado correcto. Podemos ver que efectivamente la serie no converge para este valor de $x > 1$.

- b) Si $x = 0.1$, en cambio, el lado izquierdo es $\sqrt{1.1} \sim 1.04880884817015\dots$, y el lado derecho, al sumar los cuatro primeros términos de la serie, por ejemplo, es 1.0488125, bastante parecido al resultado exacto; y con los diez primeros términos es 1.04880884817101, aún más parecido. Vemos que $|x| < 1$, y la serie no sólo converge, sino que converge al resultado correcto.

Estamos acostumbrados a que el signo $=$ signifique que dos cantidades son exactamente iguales, pero cuando tenemos series infinitas hay que tomar al signo igual con cuidado: la igualdad existe sólo si la serie converge. De otro modo, el lado derecho de (1.2) ni siquiera se puede usar porque no tiene sentido, aunque, para los mismos valores de x y α , el lado izquierdo sea un número perfectamente razonable.

Otro ejemplo: para $\alpha = -1$, con (1.2) se obtiene la llamada *serie geométrica*:

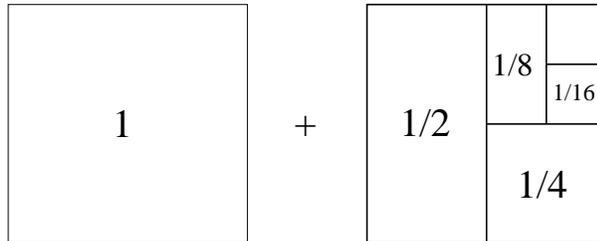
$$(1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (1.3)$$

Nuevamente, en este caso, si bien el lado izquierdo está bien definido para cualquier valor de x , el lado derecho sólo da un resultado finito si $|x| < 1$.

Para $x = 1/2$ el lado izquierdo es igual a 2, mientras que el lado derecho da la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

que, obviamente, al sumarla, también da 2. Si no estamos convencidos, podemos recurrir al siguiente argumento geométrico: representando, como es tradicional, la unidad por un cuadrado, y sus fracciones por subáreas de él, podemos ver que la suma de los 5 primeros términos de la serie geométrica es:



Claramente, al continuar sumando términos de la serie geométrica, se obtienen cuadrados cada vez más pequeños, cada uno de área igual a la mitad del anterior, y podemos ver que con infinitos términos terminaremos llenando completamente el segundo cuadrado.

Para $x = 1/10$, en tanto, el lado izquierdo es igual a $10/9$, mientras que el lado derecho da la serie (que ya habíamos utilizado antes como ejemplo de serie convergente)

$$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots = 1.1111\dots ,$$

que es el desarrollo decimal de $10/9$.

Seamos un poco más generales. Hasta el momento sólo hemos resuelto ejemplos numéricos, usando, sin demostrar, que (1.2) es correcta. Sin embargo, podemos demostrar, al menos para la serie geométrica ($\alpha = -1$), que lo es. Evaluemos primero la suma finita

$$S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N ,$$

que corresponde a los primeros $N+1$ términos de la serie geométrica. Deseamos saber qué le ocurre a S_N cuando N crece. Para calcular S_N restemos de esta serie la misma serie, pero multiplicada por x , es decir:

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N \\ x S_N &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^N + x^{N+1} . \end{aligned}$$

Al restar, al lado izquierdo queda $(1-x) \cdot S_N$, mientras que al lado derecho queda $1 - x^{N+1}$, o sea,

$$(1-x) \cdot S_N = 1 - x^{N+1} .$$

Despejando S_N se obtiene

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} .$$

Ahora, si hacemos N cada vez más grande, es decir lo hacemos tender a infinito, el comportamiento de x^{N+1} es distinto dependiendo de si $|x|$ es mayor o menor que 1. Si $|x| > 1$, entonces cada potencia de x es más grande que la anterior, y por lo tanto el lado derecho es infinito: la serie no converge. En cambio, si $|x| < 1$, cada potencia de x es más pequeña que la anterior, de modo que, cuando N es infinitamente grande, x^{N+1} es infinitamente pequeño. Formalmente, decimos que el *límite* de x^{N+1} , cuando N tiende a infinito, es 0, y lo denotamos así:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = 0 .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} ,$$

resultado consistente con (1.3).

Para determinar completamente las condiciones de convergencia de la serie falta considerar los casos $x = 1$ y $x = -1$. Si $x = 1$ es evidente que no hay convergencia, pues la serie geométrica es una suma infinita de unos. También ello es evidente al reemplazar $x = 1$ en el lado izquierdo de (1.3). Pero, ¿qué pasa si $x = -1$? El lado izquierdo de (1.3) es $1/2$, un número finito. Revisemos entonces la serie del lado derecho. Si $x = -1$, en cambio, tenemos una suma alternada de 1 y -1 , de modo que $S_N = 0$ si N es par, y $S_N = 1$ si N es impar. Tenemos entonces que la suma finita, S_N , a medida que N crece, salta eternamente entre 0 y 1 . La serie no se hace infinita, pero tampoco tiende a algún valor definido, y tampoco converge.

Vemos entonces que hay dos modos en que una serie puede ser no convergente: una, es que la serie explote; la otra, es que la serie, al ir agregando cada vez nuevos términos, no alcance nunca un valor dado.

Con esto terminamos de mostrar que la expresión (1.2) es, al menos para $\alpha = -1$, convergente sólo para $|x| < 1$.

Volvamos ahora a (1.2) con $\alpha = 1/2$. En ese caso se obtiene

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

Ya habíamos calculado este caso con $x = 0.1$. Repitamos el cálculo, pero con más detalle. Observemos lo que ocurre con la suma en el lado derecho de (1.2), a medida que consideramos cada vez más términos. La tabla adjunta muestra este análisis para $x = 0.1$:

lado izquierdo	lado derecho	Nº de términos	error
1.04880884817	1.0	1	4.9 %
	1.05	2	0.11 %
	1.04875	3	0.0059 %
	1.0488125	4	0.00037 %

Esto es muy importante. La tabla anterior nos permite verificar que no es necesario tener una calculadora para saber el valor de $\sqrt{1.1}$, sino que basta con saber las operaciones básicas. Sumando *sólo 4 términos* de una serie que en principio tiene infinitos términos, es posible calcular $\sqrt{1.1}$ *con cuatro decimales exactos*. Esto es extraordinario. La expansión en serie (1.2) no es sólo un resultado matemático abstracto, formal, sino que nos da el gran poder de ser capaces de calcular, en este caso, raíces cuadradas con varios decimales exactos, *sin necesidad de sumar infinitos términos*, y sin usar una calculadora. Recordemos: en Física no nos interesan las cantidades con infinitos decimales, porque no son medibles con instrumentos reales; pero sí nos interesa tener buenas aproximaciones, y acabamos de encontrar una.

De hecho, se puede verificar (Ejercicio para el lector) que mientras más pequeño es x , la convergencia de la serie truncada al resultado exacto es aun más rápida, de modo que son necesarios aún menos términos para calcular $\sqrt{1+x}$ con gran precisión. Esto es, para x suficientemente pequeño, podemos decir, sin gran error, que

$\sqrt{1+x} = 1 + x/2$ (sólo los dos primeros términos de la serie infinita), y para todos los efectos prácticos ello será correcto. Este resultado es muy importante, y lo usaremos frecuentemente en el resto de este curso. Queda, por cierto, aún la pregunta de qué significa “suficientemente pequeño”. La respuesta en detalle depende del problema que se esté trabajando, pero en general se puede decir que un 5% es adecuado. (Para la serie que analizamos, $x \sim 0.05$ sería suficientemente pequeño, aunque vemos que $x = 0.1$ ya funciona bastante bien.)

Ejemplos:

1. Sea $\alpha \neq 0$ un número real arbitrario y evaluemos $[(1+x)^\alpha - 1]/x$ para valores de x muy pequeños. Observe que para valores de x cada vez más pequeños, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, de modo que la expresión, en principio, carece de sentido. Pero veremos que, gracias a la aproximación derivada de (1.2), podemos calcular esta expresión sin problema.

De acuerdo a la ecuación (1.2), para x muy pequeño vale la aproximación

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$$

(o sea, estamos despreciando todos los términos de la serie excepto los dos primeros). Usando esta aproximación se encuentra que (para x muy pequeño)

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \simeq \frac{1 + \alpha x - 1}{x} = \frac{\alpha x}{x} = \alpha .$$

Verifique numéricamente este resultado usando una calculadora.

2. **Problema resuelto en clases:** 1.2 (Capítulo 1, Problema 2)

Mejor aún: Análogo a 1.2, pero con $(x + \Delta)^3$.

Algunas aproximaciones que se obtienen a partir de la ecuación (1.2) para $|x|$ pequeño, que se usarán con frecuencia, y conviene tener siempre presentes, son:

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x , \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x , \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x , \tag{1.6}$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} . \tag{1.7}$$

Concluamos esta sección con unas palabras acerca de la notación. Para abreviar la escritura de series, se usa frecuentemente la letra griega *sigma* mayúscula (Σ). Ilustramos el uso de este símbolo con algunos ejemplos:

$$\sum_{j=1}^6 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^4 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \quad ,$$

$$\sum_{k=-2}^2 j^k = j^{-2} + j^{-1} + 1 + j + j^2 \quad ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \quad .$$

En todas estas expresiones hay un índice (j , k , n , etc.), que varía sólo entre números enteros. En el símbolo Σ se indican los valores mínimo y máximo que puede tomar. Aunque en principio uno podría usar cualquier letra para denotar estos *índices de suma*, lo usual es utilizar sólo letras latinas minúsculas, desde i en adelante (exceptuando la o , que se puede confundir con el número 0).¹

1.2. Elementos de trigonometría

Consideremos los triángulos rectángulos $\triangle(ABC)$ y $\triangle(AB'C')$ mostrados en la figura 1.1. De acuerdo a un teorema de la geometría elemental, la razón (entre trazos) $\overline{AC} : \overline{AB}$ es igual a la razón $\overline{AC'} : \overline{AB'}$, dependiendo ésta sólo del valor del ángulo α . Se ha convenido llamar a tal razón $\cos \alpha$; o sea, en un triángulo rectángulo, el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa define el *coseno* del ángulo que forman esos dos lados:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{longitud del lado adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad .$$

También el cociente entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa es independiente del tamaño del triángulo rectángulo y sólo depende del valor de α . A esta razón se la llama *seno* del ángulo, teniéndose

¹Conviene resaltar la conveniencia de no ser “creativo” con la notación matemática. Un texto científico se puede convertir rápidamente en inentendible si utiliza notación no convencional. La notación matemática debe facilitar la comunicación de resultados, no entorpecerla.

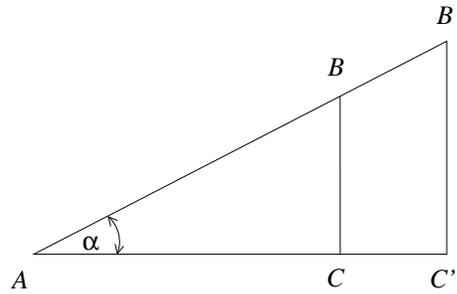


Figura 1.1

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}} .$$

Es útil definir también la función *tangente*:

$$\tan \alpha \equiv \frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud del lado adyacente}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} .$$

Evaluemos $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \right)^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \right)^2 \\ &= \frac{(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2}{(\overline{AB})^2} . \end{aligned}$$

Pero, de acuerdo al teorema de Pitágoras, $(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2$, luego

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 .$$

Observemos que $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$ son ambos menores o iguales que 1. Esto se puede ver tanto de la igualdad recién obtenida como de la definición de coseno y seno.

Dos relaciones trigonométricas importantes son:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (1.8)$$

y

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta . \quad (1.9)$$

Demostremos al menos una de ellas; la primera. Para ello consideremos la figura 1.2. Partiendo del triángulo $\triangle (ABC)$, prolongamos el lado \overline{BC} y graficamos las alturas

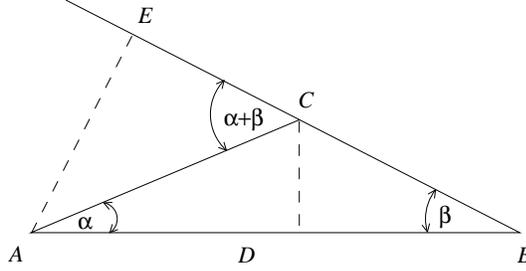


Figura 1.2

\overline{CD} y \overline{AE} . Note que el ángulo $\sphericalangle ACE$ resulta ser igual a $\alpha + \beta$. El área de un triángulo es la mitad del producto de su base por la altura. De la figura 1.2, para el área del $\Delta (ABC)$, obtenemos

$$2 \cdot \text{Área} [\Delta (ABC)] = \overline{BC} \cdot \overline{EA} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} .$$

En la última ecuación hemos escrito el producto “base por altura” del triángulo $\Delta(ABC)$ de dos maneras distintas: en la primera igualdad, \overline{BC} es la base y \overline{EA} la altura, mientras que en la segunda, \overline{AB} es la base y \overline{CD} la altura.

Luego,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AC}} = \frac{(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} .$$

Usando las definiciones de *seno* y *coseno*, se deduce finalmente que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha .$$

Como casos particulares de las ecuaciones (1.8) y (1.9), se encuentra

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tag{1.10}$$

y

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha . \tag{1.11}$$

Existen muchas identidades trigonométricas de este tipo que resultan ser útiles para llevar adelante diferentes tipos de cálculos. Dejamos que el lector demuestre las siguientes identidades:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right] \cos \left[\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right] , \tag{1.12}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \cos \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right] , \tag{1.13}$$

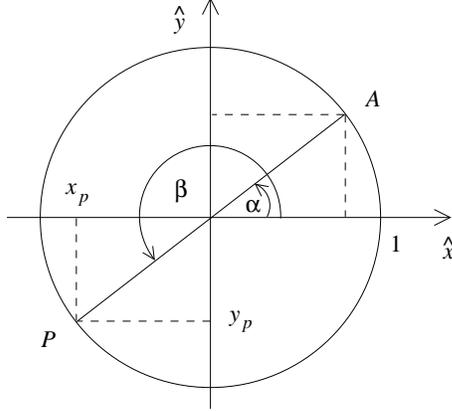


Figura 1.3

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right] \sin \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right], \quad (1.14)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}. \quad (1.15)$$

Problema resuelto en clases: 1.10

La definición del *seno* y *coseno* que hemos dado es válida para ángulos α entre 0 y 90 grados. Para definir estas funciones para otros ángulos es conveniente considerar un círculo de radio $R = 1$ centrado en el origen (ver figura 1.3). Por convención, los ángulos se miden desde el eje \hat{x} en el sentido contrario a los punteros del reloj.

Consideremos el punto A sobre el círculo, formando un ángulo α con el eje \hat{x} . Usando el hecho que la hipotenusa vale 1, es fácil convencerse de que las coordenadas x e y del punto A coinciden con los valores de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, respectivamente.

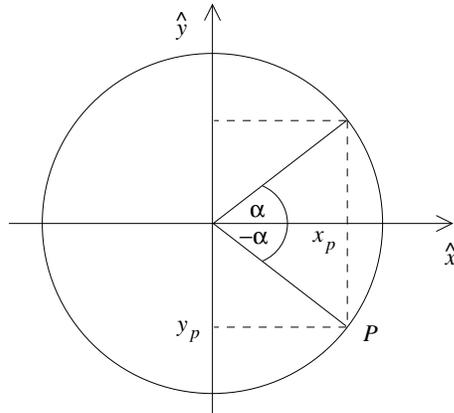
Es ésta la propiedad que se usa para definir el valor del *seno* y *coseno* para cualquier ángulo β . El procedimiento es el siguiente: i) Encontrar el punto P sobre el círculo que forma un ángulo β con el eje \hat{x} (en la figura 1.3, esto se muestra para un ángulo $\beta > 180^\circ$; ii) luego, proyectar el punto P sobre los ejes para encontrar x_p e y_p . Entonces $\cos \beta = x_p$ y $\sin \beta = y_p$. Por ejemplo, si en la figura 1.3 $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 210^\circ$ (de modo que los puntos A y P están unidos por una recta que pasa por el origen), entonces $\cos(210^\circ) = -\sqrt{3}/2 = -0,8660 \dots$ y $\sin(210^\circ) = -1/2$. Es evidente que, para todos los ángulos θ , siempre se cumple

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

y

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1.$$

La definición anterior nos permite conocer el seno y el coseno de ángulos negativos:



De la figura es inmediato que

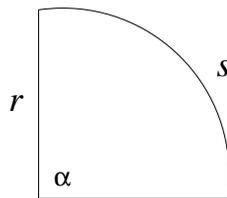
$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha , \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha . \end{aligned}$$

Se dice en este caso que el seno es una *función impar* (cambia de signo cuando el argumento lo hace), y el coseno es una *función par* (no cambia de signo cuando el argumento lo hace). Esta propiedad, por ejemplo, permite deducir el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos. Basta con usar (1.8) y (1.9), y las propiedades de paridad anteriores, para encontrar que

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \beta . \end{aligned}$$

Es usual medir los ángulos en *grados*, pero aunque uno puede tener mayor intuición con esta unidad, precisamente porque es más usual en la vida diaria (básicamente es parte de la cultura general que 90° corresponde a un ángulo recto, uno puede imaginarse que 1° es un ángulo pequeñito, etc.), los grados no son una unidad muy práctica desde el punto de vista físico, porque nacen por una convención arbitraria, como es dividir una circunferencia en 360 partes iguales. 360 es un número completamente arbitrario, y podría haber sido cualquier otro (por ejemplo, dividir el ángulo recto en 100, que da origen a los grados centesimales o gradianes). Resulta más conveniente definir una unidad angular que no tenga dicha arbitrariedad.

Consideremos un ángulo recto, de 90° :



La longitud del arco subtendido por α es un cuarto del perímetro de la circunferencia completa, $s = \pi r/4$. Luego, no importa qué radio r hayamos elegido, el cociente s/r es independiente del radio (en este caso, $s/r = \pi/4$). Breves momentos de reflexión deberían convencernos de que lo anterior debe ser cierto para cualquier subdivisión de α . Independiente del ángulo, s/r es independiente del radio, y por tanto depende sólo del ángulo. Es natural entonces definir s/r como el ángulo en sí. Cuando expresamos el ángulo de esta manera, decimos que está medido en *radianes* (abreviada *rad*).

Definimos, pues, el valor del ángulo α , en radianes, como el largo del arco subtendido sobre el círculo unitario desde donde lo cruza el eje \hat{x} hasta el punto A (ver figura 1.3),

$$\alpha = \frac{s}{r} .$$

De acuerdo a la definición, un ángulo de 360° , o sea, la circunferencia completa, corresponderá a un ángulo igual a 2π rad. El ángulo recto es igual a $\pi/2$ rad; el extendido a π rad. No es difícil verificar que

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ .$$

Si bien es cierto se puede abreviar radianes por *rad*, debemos notar que en realidad los radianes son una unidad adimensional, pues se definen como el cociente de dos longitudes. Por tanto, en realidad es innecesario escribir explícitamente *rad*, a menos que sea necesario para evitar confusión, o para marcar la diferencia con otras unidades, como en la expresión anterior. Así, es también correcto, y es la forma preferida, decir que el ángulo recto es simplemente igual a $\pi/2$.

Para llegar al punto P (figura 1.3) originalmente se recorrió un ángulo β desde el eje \hat{x} positivo. Al continuar y dar una vuelta completa para volver al punto P , habremos recorrido desde el eje \hat{x} un ángulo $2\pi + \beta$. Sucesivas rotaciones nos llevarán nuevamente al punto P , habiéndose recorrido ángulos $4\pi + \beta$, $6\pi + \beta$, etc. Cada vez que, desde el eje \hat{x} positivo, recorremos un ángulo β más un múltiplo de 2π , estaremos en el punto P . Se trata de un movimiento que se repite y se dice que es *periódico* en el ángulo β , con período igual a 2π . Se tiene, en general, que, para cualquier ángulo β ,

$$\cos(\beta + n 2\pi) = \cos \beta$$

y

$$\sin(\beta + n 2\pi) = \sin \beta ,$$

donde n es un entero. Relaciones se pueden obtener ya sea usando geometría sobre el círculo trigonométrico (Fig. 1.3), o algebraicamente a partir de (1.8) y (1.9):

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$$

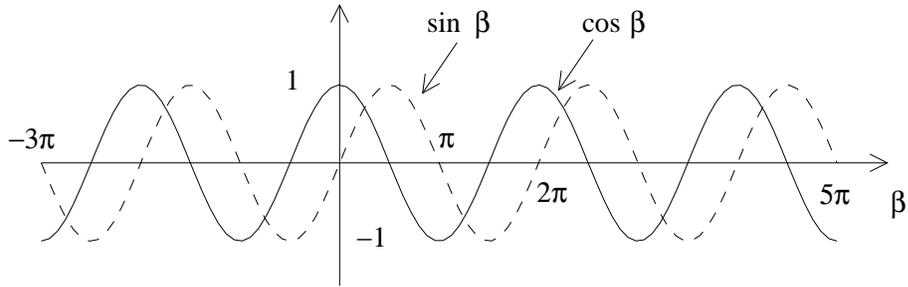


Figura 1.4

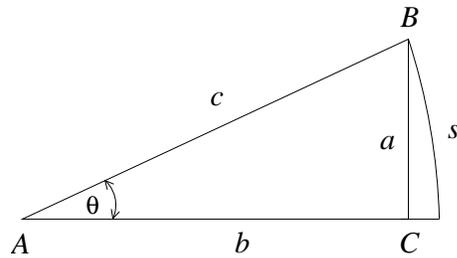


Figura 1.5

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \cos(\pi/2 - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + \pi/2) &= -\sin \theta \\ \sin(\theta + \pi/2) &= \cos \theta . \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que si variamos β en la Fig. 1.3 de modo que P recorra todo el círculo unitario varias veces, podemos graficar sus proyecciones vertical y horizontal, que corresponderán precisamente al gráfico de las funciones seno y coseno (ver figura 1.4). Se aprecia que el seno y el coseno son esencialmente la misma función, pero desplazadas una respecto a la otra en $\pi/2$, lo cual es consistente con las relaciones algebraicas anteriores para el seno y el coseno de $\pi/2 \pm \theta$.

Cuando el argumento (en radianes) de una función trigonométrica es muy pequeño, ésta puede aproximarse con una expresión simple. En efecto, consideremos el triángulo rectángulo ABC mostrado en la figura 1.5. A medida que θ decrece, el cateto opuesto a se hace cada vez más parecido al arco de círculo s con centro en A . Usando la definición de la función seno se tiene

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \simeq \frac{s}{c} .$$

Pero el cociente s/c es precisamente el ángulo α en radianes, luego, para ángulos pequeños (y éstos expresados en *radianes*)

$$\sin \alpha \simeq \alpha . \quad (1.16)$$

Esto significa que al graficar $\sin \alpha$ como función de α , debería obtenerse aproximadamente una línea recta. Ello ocurre efectivamente, como se aprecia en la Fig. 1.4, cerca del origen. Pero evidentemente la aproximación falla para ángulos suficientemente grandes.

Usando (1.16) es posible también obtener una expresión aproximada para $\cos \alpha$. Sabemos que

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha .$$

Luego, para ángulos pequeños

$$\cos^2 \alpha \simeq 1 - \alpha^2 ,$$

o sea,

$$\cos \alpha \simeq \sqrt{1 - \alpha^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 . \quad (1.17)$$

Ejemplo:

Evalúe, usando una calculadora, las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ para $\theta = 5^\circ$. Compare los valores obtenidos con aquéllos que resultan de usar las expresiones aproximadas escritas más arriba.

Ingresando el valor $\theta = 5^\circ = 5 \cdot 2\pi/360$ rad en una calculadora, obtenemos:

$$\sin 5^\circ = 0.0871557$$

y

$$\cos 5^\circ = 0.9961947 .$$

Si ahora hacemos uso de las expresiones aproximadas, obtenemos

$$\sin 5^\circ \simeq \frac{5 \cdot 2\pi}{360} = 0.087266$$

y

$$\cos 5^\circ = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5 \cdot 2\pi}{360} \right)^2 = 0.9961923$$

Note que los valores aproximados difieren poco de los obtenidos con la calculadora. Para el coseno el error es inferior al 0.003%. (La razón por la cual el error en el coseno es mayor es porque hemos usado una expansión hasta orden α^2 , que es mejor que para el seno, donde la expansión es hasta una potencia menor, α .)

Cabe destacar que las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ pueden ser expresadas como una suma infinita de términos proporcionales a diferentes potencias del ángulo θ :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots, \quad (1.18)$$

y

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots.$$

Para $|\theta| \ll 1$, estas series convergen rápidamente, lo que permite representar las funciones *seno* y *coseno* con pocos términos, como comprobamos con el ejemplo de la página anterior.

Es importante destacar que estas expansiones en serie, y por tanto las aproximaciones (1.16) y (1.17), sólo tienen sentido si el ángulo se mide en radianes, lo cual es otro argumento para preferir esta unidad en vez de los grados.

Ejemplo:

Representemos en un mismo gráfico, para el intervalo $t \in [-\pi, 2\pi]$, las siguientes cinco funciones:

- i) $f_0(t) = \cos t$
- ii) $f_1(t) = 1$
- iii) $f_2(t) = 1 - t^2/2!$
- iv) $f_3(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4!$
- v) $f_4(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4! - t^6/6!$

Observe que de acuerdo a la ecuación (1.18), las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, etc., para t pequeño son aproximaciones cada vez mejores de $f_0(t) = \cos t$. Este comportamiento se observa claramente en la figura 1.6 donde se han graficado las diversas funciones.

Problema resuelto en clases: 1.20

Funciones trigonométricas inversas

En ocasiones, lo que conocemos es $x = \sin \alpha$, y lo que se desea conocer es el ángulo α . Por ejemplo en la Fig. 1.1, si conocemos los lados del triángulo, ¿es posible conocer el ángulo α . Para ello necesitamos la noción de *función inversa*. Dada una función $y = f(x)$, la función inversa es aquella función que, dado un valor de y , entrega el

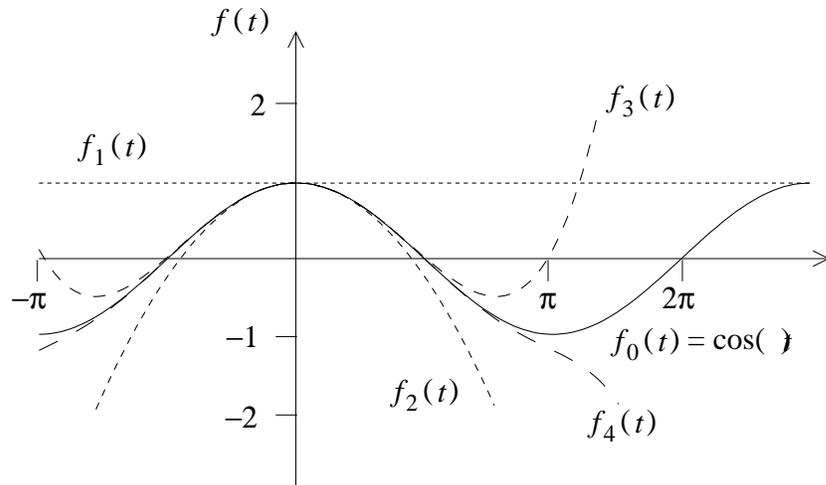


Figura 1.6

valor de x correspondiente. En el caso del seno y el coseno, sus funciones inversas son el *arcoseno* y el *arcocoseno*, respectivamente, y se denotan:

$$\alpha = \arcsin x, \quad \alpha = \arccos x.$$

Desafortunadamente, el seno no es una función monótona del ángulo (Fig. 1.4), y por lo tanto, dado un valor y ($|y| < 1$), no existe un único valor de α tal que $\sin \alpha = y$. Esto significa que el arcoseno es una *función multivaluada*. Esto es un problema desde el punto de vista matemático, formal, porque una función, por definición, debería ser monovaluada. Además es un problema práctico, porque es claro que, dado un triángulo rectángulo como en la Fig. 1.4, si los lados son conocidos, el ángulo α debería ser único. Por otro lado, si tomamos cualquier calculadora y calculamos el arcoseno de un número arbitrario (mientras tenga módulo menor que 1), obtendremos en pantalla un único resultado. ¿Cómo hacemos para que una función multivaluada se vuelva monovaluada, y cómo elegimos, entre los muchos valores, el “correcto”?

La estrategia es sencilla. Si observamos la Fig. 1.4, notamos que si nos restringimos a valores de α entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, el seno es una función monótona creciente de α , y por lo tanto el arcoseno es una función monovaluada. Análogamente, para α entre 0 y π el coseno es una función monótona decreciente, y el arcocoseno es monovaluado. Naturalmente, podríamos haber tomado otros intervalos de α . Con otras elecciones, el arcoseno y arcocoseno tendrían también valores únicos, pero distintos a los obtenidos con los primeros intervalos escogidos. A cada uno de los intervalos en los cuales las funciones quedan monovaluadas se les denomina *ramas*. Entonces, la manera de convertir una función multivaluada en monovaluada es *escogiendo una rama adecuada*. ¿Qué significa “adecuada”? Depende de la aplicación. Lo usual para el arcoseno y el arcocoseno son las ramas que escogimos antes, $[-\pi/2, +\pi/2]$ para el

arcoseno, $[0, \pi]$ para el arcocoseno. Es la elección de las calculadoras también. Y es la elección correcta para el caso de la Fig. 1.1, ya que sabemos que en el triángulo rectángulo $0 < \alpha < \pi/2$. Pero ¡cuidado!, no hay ninguna manera, en general, de asegurar que esta elección es la adecuada para cualquier problema físico, y por tanto la elección de rama es una decisión que debe tomarse caso a caso. No hay que dejarse engañar por el resultado que entrega una calculadora o un computador, y siempre hay que cuestionarse si el número que nos da es la solución físicamente aceptable.

Algo similar ocurre cuando uno extrae raíces: puede ocurrir que la raíz de 9 de interés físico sea -3 y no la solución que entrega la calculadora (que es $+3$).

Ejercicio: Sea $|x| \leq 1$ cierto valor dado y suponga que deseamos encontrar todos los ángulos γ (en radianes) para los cuales $\cos \gamma = x$. Suponga además que hemos, de alguna manera, encontrado una solución $\gamma = \alpha_0$ (por ejemplo, el ángulo que muestra la calculadora al evaluar $\arccos(x)$). Demuestre que todas las demás soluciones a nuestro problema vienen dadas por $\gamma = \alpha_0 + j \cdot 2\pi$ y $\gamma = -\alpha_0 + j \cdot 2\pi$, con j cualquier valor entero.

Ejercicio: Sea $|x| \leq 1$ cierto valor dado y suponga que deseamos encontrar todos los ángulos γ (en radianes) para los cuales $\sin \gamma = x$. Suponga además que hemos, de alguna manera, encontrado una solución $\gamma = \alpha_0$ (por ejemplo, el ángulo que muestra la calculadora al evaluar $\arcsin(x)$). Demuestre que todas las demás soluciones a nuestro problema vienen dadas por $\gamma = \alpha_0 + j \cdot 2\pi$ y $\gamma = (\pi - \alpha_0) + j \cdot 2\pi$, con j cualquier valor entero.

Por ser frecuentemente fuente de errores reiteramos lo dicho unos párrafos antes: al evaluar funciones trigonométricas inversas la solución entregada por la calculadora **no** es siempre la físicamente aceptable. El alumno debe asegurarse de que la respuesta mostrada por la calculadora efectivamente resuelve completamente su problema, en caso contrario, debe analizar si alguna de las otras soluciones, que se obtuvieron en los dos ejercicios anteriores, sirve.

1.3. Problemas

1. Evalúe las siguientes sumatorias

$$\text{a) } S = \sum_{\substack{n=1,2 \\ m=1,2,3}} n^m$$

$$\text{b) } S = \sum_{j=-3, \dots, 8} 1$$

$$\text{c) } S = \sum_{j=0}^N j$$

$$\text{d) } S = \sum_{\substack{i, j = 1, \dots, 4 \\ i > j}} \frac{1}{|i - j|}$$

Respuestas: a) 17 , b) 12 , c) $N(N + 1)/2$, d) $13/3$

2. Encuentre una expresión para $[(x + \Delta)^\beta - x^\beta]/\Delta$, en el *límite* en que Δ tiende a cero. En otras palabras, Δ tiene un valor finito pero pequeñísimo (tan pequeño como se quiera); al final del cálculo se permite poner $\Delta = 0$.

Usando una notación y un lenguaje más técnico, el enunciado de este problema sería:

Evalúe
$$f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [(x + \Delta)^\beta - x^\beta].$$

Respuesta: $f(x) = \beta x^{\beta-1}$.

3. Evalúe
$$\frac{\cos(x + \epsilon) - \cos x}{\epsilon} \quad \text{para } |\epsilon| \ll 1.$$

Respuesta: $-\sin x$.

4. Represente en forma cuidadosa, en un **mismo** gráfico, para el intervalo $t \in [-1, 1]$, las siguientes cuatro funciones:

a) $f_0(t) = 1/(1 - t)$

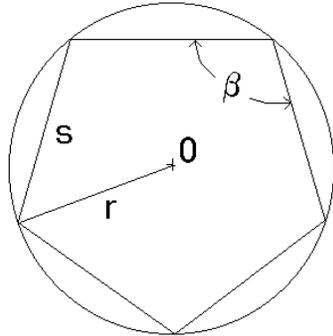


Figura 1.7

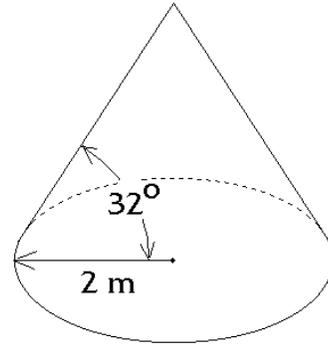


Figura 1.8

- b) $f_1(t) = 1 + t$
- c) $f_2(t) = 1 + t + t^2$
- d) $f_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

Observe que, de acuerdo a la ecuación (1.3), $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son sucesivamente aproximaciones cada vez mejores (para t pequeño) de la función $f_0(t)$.

5. Demuestre las siguientes relaciones trigonométricas:

(a)
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

(b)
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

(c)
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

6. Sea r el radio del círculo circunscrito de un pentágono regular (ver figura 1.7).

- a) ¿Cuánto mide el ángulo interior β (en radianes)?
- b) Determine el largo del lado s en función de r .
- c) Determine el área del pentágono.

Respuestas: a) $\beta = 3\pi/5$ radianes ; c) área = $\frac{5}{2} r^2 \sin(2\pi/5)$.

7. Una camionada de arena seca se descarga formando un cono de 4 metros de diámetro. Si la densidad de la arena seca es $\rho = 1.7 \text{ g/cm}^3$ y el ángulo del cono (ver figura 1.8) es de $\theta = 32^\circ$, calcule la masa de la arena (en toneladas).
8. Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[-5, +5]$ (cuando no se especifica nada se asume que las unidades son radianes) para los cuales se cumple la relación

$$\sin x \tan x = -\frac{3}{2} .$$

Respuesta: $x = -4\pi/3, -2\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3$.

9. Represente en un mismo gráfico, para t en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$, las siguientes cuatro funciones:
- $f_0(t) = \sin t$
 - $f_1(t) = t$
 - $f_2(t) = t - t^3/3!$
 - $f_3(t) = t - t^3/3! + t^5/5!$

Aquí nuevamente $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son sucesivamente aproximaciones cada vez mejores (para t pequeño) de la función $f_0(t)$.

10. Al incidir luz sobre una interfase, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta generalmente sufre un cambio de dirección (ver figura 1.9). Este fenómeno se conoce con el nombre de *refracción* de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la *Ley de Snell*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}} ,$$

donde v_{aire} y v_{vidrio} corresponden a la velocidad de la luz en el aire y el vidrio, respectivamente. (Para el vidrio común se tiene $v_{\text{aire}}/v_{\text{vidrio}} \simeq 1.5$.)

- Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia $\alpha = 40^\circ$. Encuentre la distancia d por la cual el haz de luz emergente se encontrará paralelamente desplazado respecto al haz incidente (ver figura 1.10).
- Considere ahora un haz de luz incidiendo sobre un prisma en la forma que se muestra en la figura 1.11. Encuentre el ángulo β para $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ y 70° . ¿Para qué ángulo $\alpha = \alpha_0$ se obtiene $\beta = 90^\circ$? Para $\alpha > \alpha_0$ el haz de luz es reflejado especularmente (como si fuese un espejo) por la superficie interior del prisma, fenómeno conocido con el nombre de *reflexión total*.

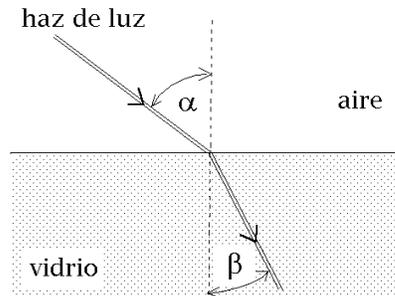


Figura 1.9

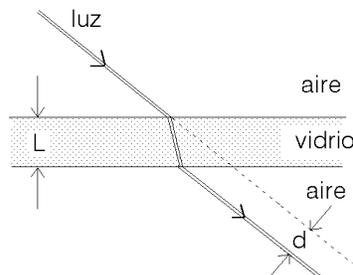


Figura 1.10

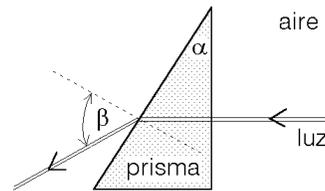


Figura 1.11

11. La figura 1.12 adjunta indica la diferencia entre un *día sideral* y un *día solar*. Para facilitar la explicación supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. (Por supuesto que las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos observan algunas de ellas.)

Para un observador en el Ecuador, el día solar es el período que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el zenit (posición del Sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral consiste en el mismo fenómeno pero que ahora ocurre con una estrella muy lejana. La diferencia entre ambas definiciones se debe a la traslación de la Tierra alrededor del Sol. Determine el valor del ángulo α que se muestra en la figura y calcule la diferencia entre el día sideral y el día solar en segundos.

12. Un tambor de 50 cm de radio y 1.5 m de largo se encuentra “acostado” y lleno con parafina hasta una altura $h = 60$ cm (ver figura 1.13). ¿Cuántos litros de parafina hay en el tambor?
13. La esfericidad de la Tierra fue postulada por Pitágoras y confirmada por Aristóteles al observar la forma circular de la sombra que proyecta la Tierra en la superficie de la Luna durante un eclipse lunar.

El primer cálculo que se conoce del radio de la Tierra se debe a Eratóstenes (276

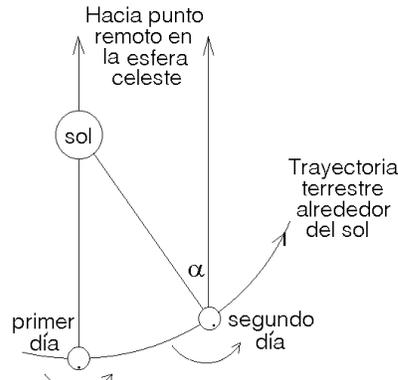


Figura 1.12

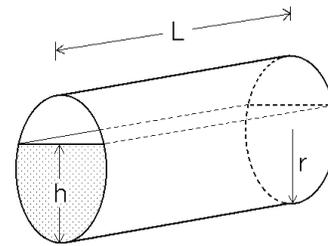


Figura 1.13

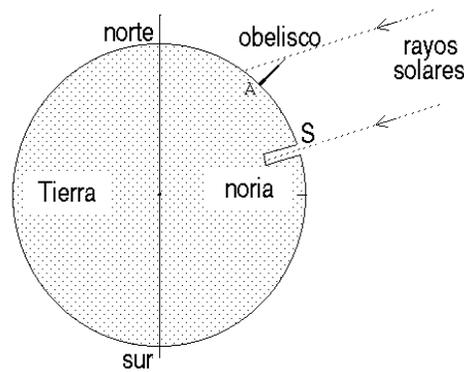


Figura 1.14

A.C.–194 A.C.), quien a la fecha estaba a cargo del Museo de Alejandría. El método que usó se basó en observar el ángulo con que inciden los rayos solares sobre la superficie de la Tierra, el mismo día y a la misma hora, en dos lugares separados entre sí por una gran distancia. Los lugares elegidos fueron Siena (S) (hoy Asuán) y Alejandría (A).

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de junio el Sol caía verticalmente en Siena, pues la luz se reflejaba directamente en el fondo de una noria. El mismo día, a la misma hora, midió la sombra que proyectaba en Alejandría un alto obelisco, que le indicó que los rayos solares formaban un ángulo de 7.2° con la vertical (ver figura 1.14).

Dado que el Sol está a gran distancia de la Tierra se puede suponer que los rayos que llegan a ambas ciudades son paralelos. Eso quiere decir que la separación angular entre Siena y Alejandría medida con respecto al centro de la Tierra es también 7.2° (demuéstrelo). Sabiendo que la distancia entre Siena y Alejandría (arco de círculo) es de aproximadamente 800 km, estime el radio de la Tierra.

Respuesta: Radio ~ 6400 km. (El resultado que obtuvo Eratóstenes en su época fue incorrecto, debido a la imprecisión con que estimó la distancia entre los dos lugares.)

14. Una persona ubicada en el punto P observa dos montañas que la rodean, una a la derecha y la otra a la izquierda. Sean α y β los ángulos de elevación, respectivamente (ver figura 1.15). Si la montaña de la izquierda tiene una altura h y la separación entre las proyecciones de las cimas sobre el nivel de la superficie terrestre es D , calcule la altura del otro monte.
15. En el año 1752 los astrónomos Landale y Lacaille determinaron en Berlín (B) y en la ciudad del Cabo (C), a la misma hora, el ángulo entre la normal y la recta entre su posición y un punto predeterminado del borde de la Luna. Los ángulos que determinaron fueron $\beta = 32.08^\circ$ en Berlín y $\gamma = 55.72^\circ$ en El Cabo. Ambas ciudades se ubican en el mismo meridiano y se encuentran en las latitudes $\lambda_B = 52.52^\circ$ y $\lambda_C = -33.93^\circ$, respectivamente (ver figura 1.16). Usando para el radio terrestre el valor de 6370 km, determine la distancia entre la Tierra y la Luna.
16. Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.
17. a) **Teorema del seno.** Demuestre que en un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} ,$$

donde α , β y γ son los ángulos interiores del triángulo y a , b y c los lados opuestos a cada uno de estos ángulos.

b) **Teorema del coseno.** Demuestre que en un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma ,$$

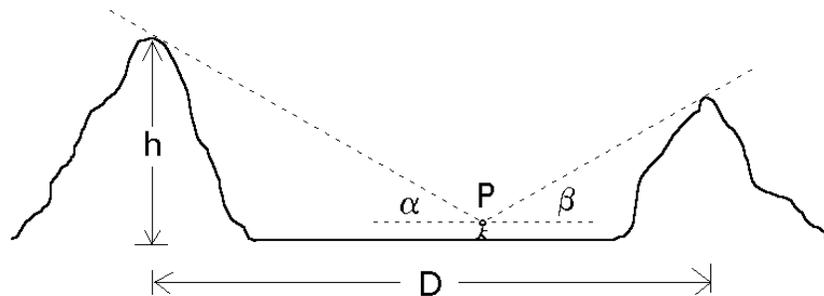


Figura 1.15

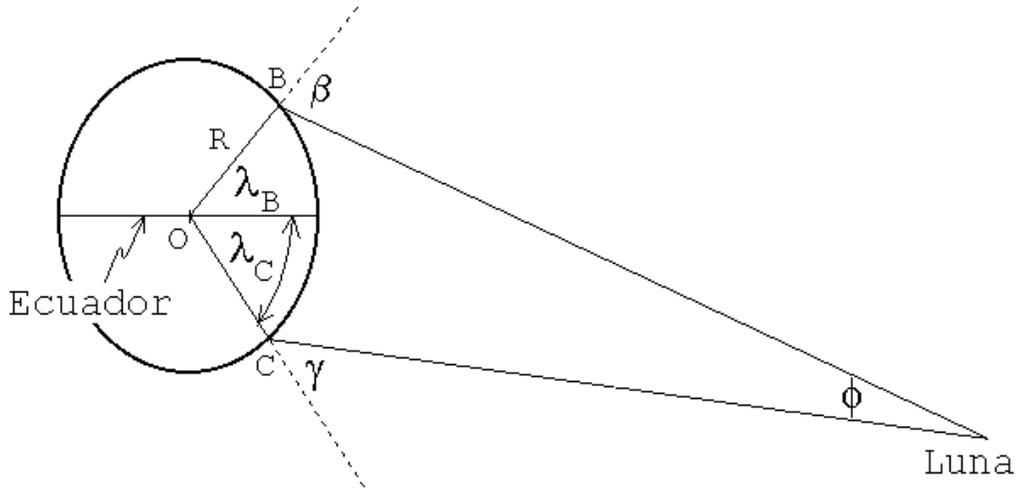


Figura 1.16

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta ,$$

y

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha .$$

18. Determine el largo mínimo que debe tener una cadena para unir dos poleas de radios R y r , separadas por una distancia D (ver figura 1.17).

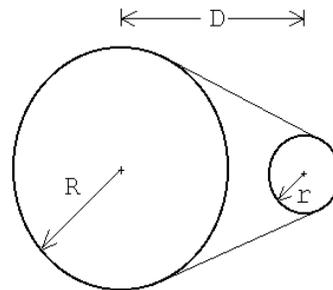


Figura 1.17

Respuesta:

$$L = 2(R - r) \arcsin \left(\frac{R - r}{D} \right) + 2 \sqrt{D^2 - (R - r)^2} + \pi (r + R) .$$

19. Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras.
20. La altura de un edificio se puede determinar midiendo su *ángulo de elevación* y la distancia a la que uno se encuentra del edificio. Suponga que el instrumento que tiene a disposición le permite medir ángulos con un error de $\pm 1^\circ$. Determine

el menor error porcentual con que, con tal instrumento, usted puede medir la altura de un edificio.

21. Dos observadores A y B miden ángulos de elevación de un avión que los sobrevuela a una altura constante. En cierto instante los ángulos medidos por A y B son $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 40^\circ$, respectivamente. Diez segundos más tarde, A mide un ángulo de elevación $\gamma = 110^\circ$ (ver figura 1.18). La separación entre A y B es $D = 1$ km. ¿A qué altura vuela el avión? ¿Cuál es su velocidad?

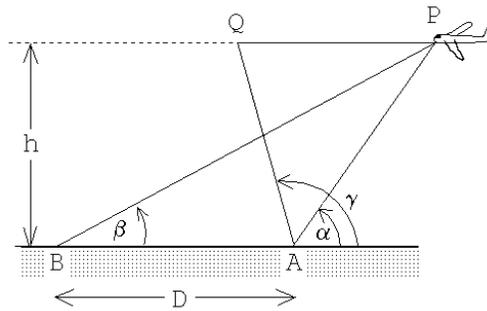


Figura 1.18

22. Grafique, usando un computador, la función $f(t) = \cos(\pi t) + \cos(0,9\pi t)$ para $t \in [0, 40]$ y observe el fenómeno de *pulsaciones*.
23. ¿Para qué latitud el paralelo terrestre tiene $1/3$ de la longitud del Ecuador?

24. Una cuneta de forma angular está caracterizada por los ángulos α y β respecto a la horizontal. Una bola de acero de radio R posa sobre la cuneta, ver figura 1.19. Determine el nivel mínimo de agua, medido desde el punto más bajo de la cuneta, necesario para cubrir la bola completamente.

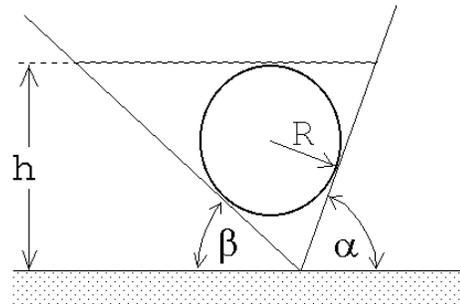


Figura 1.19

25. Son las 12 del día. Determine en cuánto rato más se vuelven a juntar los punteros del reloj.
26. a) Calcule la razón entre las áreas del círculo y del triángulo equilátero que lo circunscribe (ver figura 1.20a).
 b) Haga el mismo cálculo anterior pero para el caso en que el triángulo contenga $n(n + 1)/2$ discos de radio R dispuestos como se muestra en la figura 1.20b.

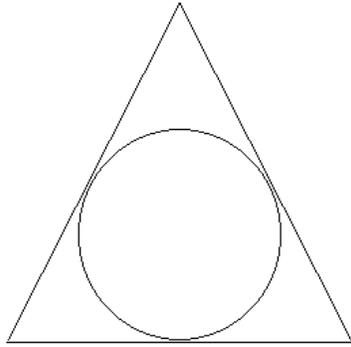


Figura 1.20a

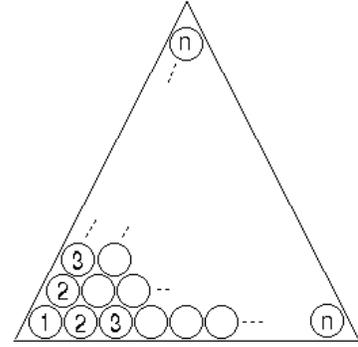


Figura 1.20b

27. Usted se plantea tener un atardecer de 24 horas de duración en el Ecuador, para lo cual cuenta con un aeroplano. Calcule la velocidad con que debería volar y la dirección que debe tomar para lograr su propósito. Si un amigo viaja a la misma velocidad relativa a la Tierra, pero en sentido opuesto, calcule el tiempo que transcurrirá hasta encontrarse nuevamente con él.
28. Hay que decidir el tipo de empaque que se le va a dar a pelotas de tenis en una bandeja de forma cuadrada. Decida cual de las dos configuraciones mostradas en la figura 21 resulta más conveniente. Justifique su respuesta cuantitativamente.

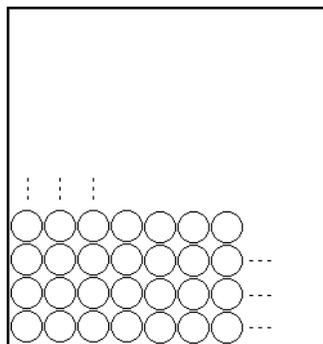


Figura 1.21a

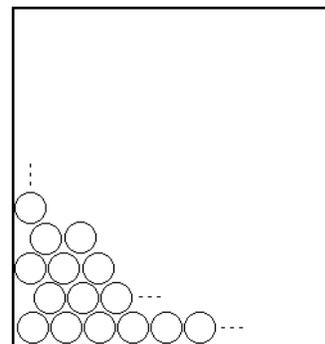


Figura 1.21b

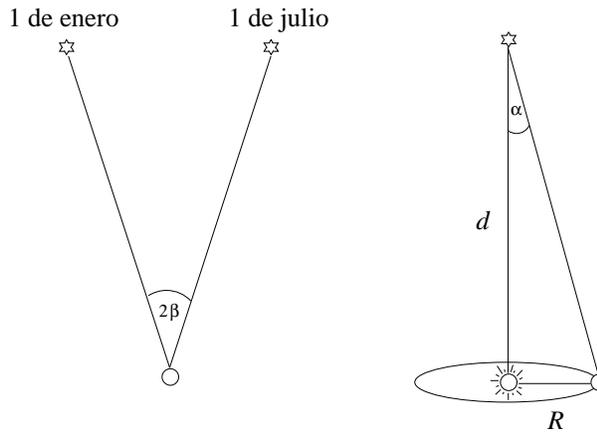
29. Si 2β es el ángulo entre dos posiciones de una estrella, vista desde la Tierra con seis meses de separación, entonces se define la *paralaje anual* de dicha estrella como β .

Muestre que la paralaje es igual al ángulo α que subtiende el radio de la órbita terrestre en torno al Sol (ver figura) vista desde la estrella, y que

$$\alpha \simeq \frac{R}{d},$$

donde R es el radio de la órbita terrestre y d es la distancia entre el Sol y la estrella.

Use este resultado para encontrar la distancia a la estrella *Proxima Centauri*, sabiendo que su paralaje es $\beta = 0.772$ segundos de arco ($1''$ es $1/3600$ de grado), y que la distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente 150 millones de kilómetros.



1.4. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 15

Inspeccionando la figura 1.22 se deduce de inmediato que

$$\phi = \delta_\beta + \delta_\gamma$$

y

$$\phi = \beta + \gamma - \lambda_B - |\lambda_C|.$$

Usando el *teorema del seno* (ver problema 17) en los triángulos OBL y OLC, se obtienen las expresiones

$$\frac{\sin \delta_\beta}{R} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{D}$$

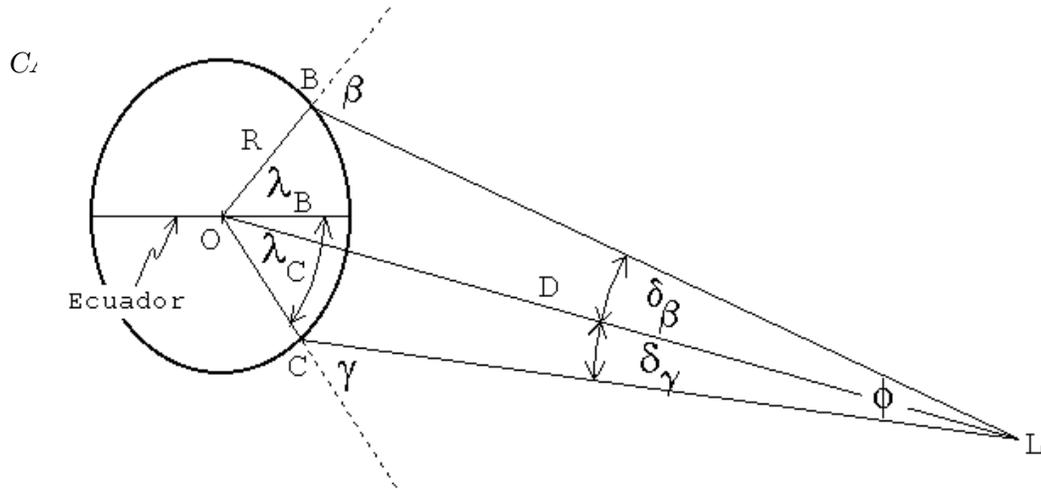


Figura 1.22

y

$$\frac{\sin \delta_\gamma}{R} = \frac{\sin(\pi - \gamma)}{D}.$$

Como δ_β y δ_γ son ángulos pequeños podemos usar las aproximaciones

$$\sin \delta_\beta \simeq \delta_\beta$$

y

$$\sin \delta_\gamma \simeq \delta_\gamma.$$

De esta manera se obtienen

$$\delta_\beta \simeq \frac{R}{D} \sin \beta$$

y

$$\delta_\gamma \simeq \frac{R}{D} \sin \gamma.$$

Sumando estas ecuaciones se deduce que

$$\phi = \delta_\beta + \delta_\gamma \simeq \frac{R}{D} (\sin \beta + \sin \gamma),$$

o sea,

$$D \simeq \frac{R (\sin \beta + \sin \gamma)}{\phi} = \frac{R (\sin \beta + \sin \gamma)}{\beta + \gamma - \lambda_B - |\lambda_C|}.$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos se encuentra que

$$D \simeq 367.000 \text{ km},$$

valor muy cercano al actualmente aceptado para el radio de la órbita lunar, que es de 384.000 km.

Solución al problema 16

Consideremos un cubo de lados a . Sea A un vértice de una diagonal y B el vértice de otra diagonal del cubo. De los dos vértices de la segunda diagonal, denotaremos por B al vértice que está a una distancia a de A (el otro vértice se encontrará a una distancia $a\sqrt{2}$ de A). Sea O el punto central del cubo.

El triángulo AOB es isósceles: con base $\overline{AB} = a$ y lados $b \equiv \overline{AO} = \overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. El ángulo $\alpha = \sphericalangle (AOB)$ es el ángulo buscado. Se tiene que

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

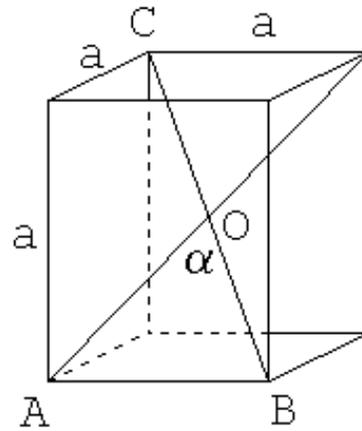


Figura 1.23

de donde se deduce que

$$\alpha = 70.529^\circ .$$

El ángulo complementario $\sphericalangle (AOC) = 109.47^\circ$.

Solución al problema 21

Sea $a = \overline{AP}$ y $d = \overline{PQ}$. Usando el teorema del seno en el triángulo APB se obtiene

$$\frac{\sin \beta}{a} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{D},$$

o sea,

$$a = D \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Usando el teorema del seno en el triángulo AQP se deduce que

$$\frac{\sin(\pi - \gamma)}{a} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{d}.$$

Usando las dos ecuaciones anteriores se obtiene para d la expresión

$$d = D \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma}.$$

Reemplazando los valores numéricos se encuentra que la distancia recorrida por el avión en 10 segundos es $d = 1,53$ km. La velocidad del avión es, por lo tanto, $v = 552$ km/h. La altura a la que vuela el avión viene dada por

$$h = a \sin \alpha = 1628 \text{ [m]}.$$

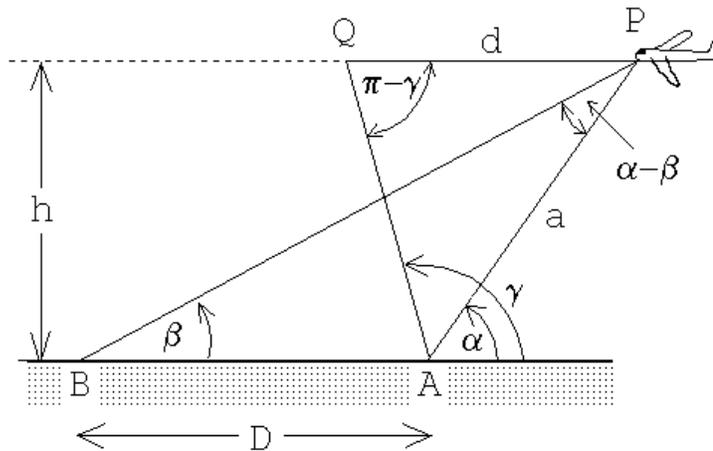


Figura 1.24

Solución al problema 24

Primero giremos la cuneta de manera que quede simétrica respecto a la horizontal, es decir, con un ángulo $(\alpha + \beta)/2$ a cada lado (ver figura 25a).

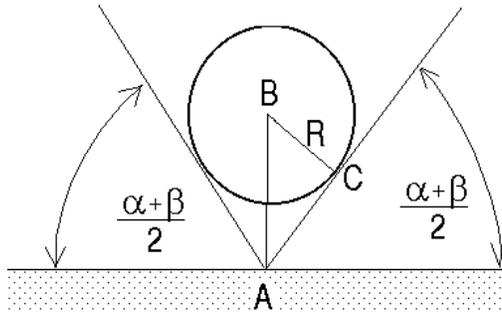


Figura 1.25a

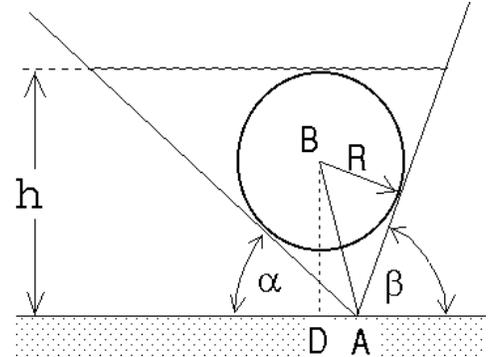


Figura 1.25b

El ángulo $\sphericalangle ABC$ también es $(\alpha + \beta)/2$, luego

$$\overline{AB} = \frac{R}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Para volver a poner la cuneta en la orientación original debemos girarla en un ángulo $(\beta - \alpha)/2$. Por lo tanto, (ver figura 1.25b)

$$\overline{BD} = \overline{AB} \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = R \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Para la altura del nivel de agua se obtiene finalmente la expresión

$$h = R \left[1 + \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \right].$$

Capítulo 2

Cinemática en una dimensión

versión 11 abril 2011

La Cinemática es la descripción del movimiento de un cuerpo sin considerar las causas que lo producen. Ser capaces de describir adecuadamente el movimiento es el primer paso para estudiarlo y entender sus causas. En este Capítulo introduciremos conceptos básicos para la descripción del movimiento: posición, velocidad, aceleración. Mantendremos la discusión simple al considerar sólo movimientos en una dimensión. Sin embargo, incluso con esta simplificación será necesario introducir conceptos matemáticos nuevos, sin los cuales nos sería muy difícil avanzar. Por ello, en este Capítulo también se revisarán algunas nociones básicas de cálculo integro-diferencial. Como en el Capítulo anterior, la idea es introducir estos conceptos de manera intuitiva, como necesidades naturales para la descripción del movimiento, dejando los aspectos más formales para el curso de Cálculo correspondiente.

2.1. Posición, velocidad y aceleración

Para simplificar la discusión, comenzaremos por estudiar el movimiento de objetos cuya ubicación queda determinada especificando la posición de un solo punto. Este tipo de objeto recibe el nombre de *partícula*. Contrariamente a lo que pudiera pensarse, no es necesario que los objetos sean pequeños para que puedan ser considerados partículas. Por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de la tierra en torno al sol, la distancia relevante es la distancia Tierra-Sol. En este caso, el tamaño de la Tierra no es importante, pudiéndose tratar como una partícula ubicada en el centro de la tierra.

El movimiento más simple de una partícula se tiene cuando la posición de ésta viene descrita por una única coordenada; por ejemplo, el movimiento de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta. Será éste tipo de movimientos del que nos ocuparemos en este Capítulo. No nos basta con saber que el movimiento es a lo largo de una recta, sin embargo. Para describir el movimiento de la partícula necesitamos

elegir un origen, en alguna parte arbitraria de la recta. Además, necesitamos decidir qué lado de la recta será el lado positivo, y cuál el negativo. Lo usual es escoger el lado positivo como el lado derecho (Fig. 1.1).



Figura 2.1

En estas condiciones, la *posición* de una partícula queda determinada dando simplemente un número (la “coordenada x ”). La descripción de su movimiento es completa si conocemos la función $x(t)$ que indica la posición que ocupa en cada instante t .

La diferencia entre la coordenada de una partícula entre dos instantes t_1 y t_2 (con $t_2 > t_1$) se denomina *desplazamiento*:

$$\text{Desplazamiento} \equiv x_2 - x_1 \equiv \Delta x .$$

El desplazamiento es una cantidad con unidades, que se mide, en el sistema internacional, en *metros* (m). Además, el desplazamiento tiene signo. Si la coordenada x de la partícula se incrementa durante cierto intervalo de tiempo, entonces el desplazamiento es positivo; si, por el contrario, decrece, el desplazamiento es negativo. Notemos que un desplazamiento positivo significa que la partícula está más *a la derecha* que lo que estaba inicialmente, no que está más lejos del origen.

En todo caso, es claro que, si bien el desplazamiento es un primer concepto útil para describir el movimiento, no es en absoluto capaz de hacerlo completamente. No es lo mismo cubrir la distancia entre dos ciudades en automóvil que en auto. Es necesario, además, introducir el concepto de tiempo en esta discusión.

Se define la *velocidad media* de una partícula durante el intervalo $[t_1, t_2]$ como la razón entre el desplazamiento y la duración del intervalo de tiempo,

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} ,$$

y sus unidades, en el sistema internacional, son de metros sobre segundos (m/s).

La velocidad media entrega una información global sobre el movimiento que realiza una partícula en un cierto intervalo de tiempo. En cualquier viaje en automóvil a veces vamos más rápido o más lento, por ejemplo. La velocidad media no pretende dar estos detalles. Pero si la velocidad es constante, entonces uno puede estar seguro de que la velocidad siempre será igual a la velocidad media, pues el cociente entre Δx y Δt será el mismo, independiente del intervalo de tiempo escogido.

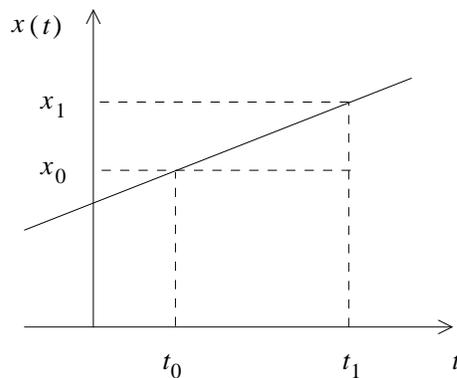
Consideremos entonces el caso en que la velocidad es constante, v_0 . De la ecuación anterior se sigue que, si denominamos x_0 a la posición inicial en el tiempo t_0 , y a $x(t)$

a la posición en un tiempo t cualquiera, entonces

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) .$$

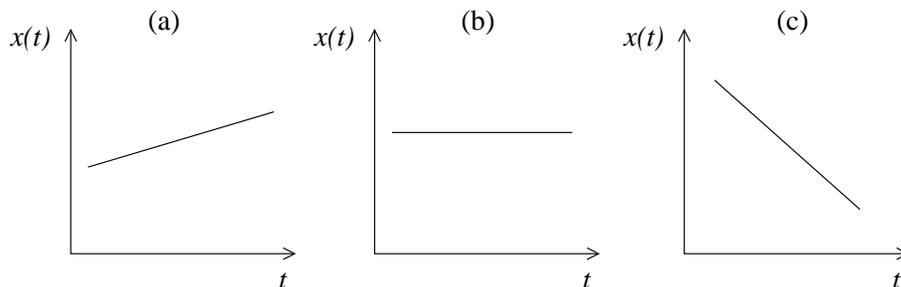
Uno dice que ésta es una ecuación de itinerario, porque nos permite saber, si conozco las condiciones iniciales (t_0, x_0) , dónde se encuentra la partícula en cada instante. La ecuación de itinerario anterior, entonces, contiene *toda* la información necesaria para describir el movimiento si la velocidad es constante.

Si graficamos la ecuación de itinerario anterior, resultará una línea recta:



Observemos dos cosas: primero, t_0 es simplemente un tiempo inicial, arbitrario. No es necesariamente el tiempo en que el movimiento comenzó (como vemos en la figura anterior, en que la partícula ya estaba en movimiento antes de t_0). Es sólo un instante de referencia. Ni siquiera $t = 0$ tiene que ser el instante en que comienza el movimiento; $t = 0$ puede ser el tiempo en el comenzó a funcionar nuestro cronómetro, o cualquier otro instante de referencia adecuado.

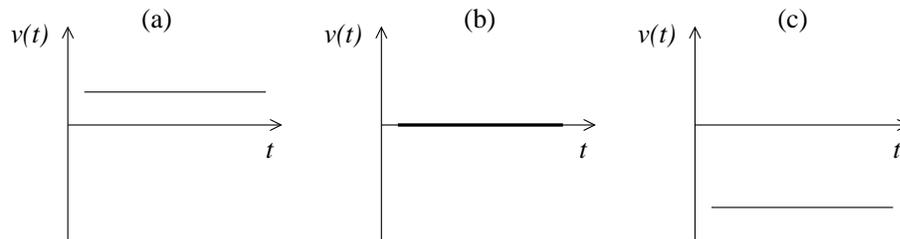
Segundo, de la ecuación de itinerario, o bien de la figura anterior, se sigue que v_0 es la *pendiente* de la recta $x(t)$. Observemos las siguientes figuras esquemáticas



La Fig. (a) representa a una partícula moviéndose con velocidad positiva, vale decir, *hacia la derecha* [de la definición de velocidad media, ésta es mayor que cero si $x(t_2) > x(t_1)$]. La Fig. (b), en cambio, representa a una partícula en reposo (velocidad

cero). Finalmente, la Fig. (c) representa a una partícula con velocidad negativa, es decir, moviéndose hacia la izquierda. Observemos que, en módulo, la pendiente (c) es mayor que la pendiente (a), por tanto podemos afirmar que la partícula que se mueve hacia la izquierda se mueve más rápidamente que la partícula hacia la derecha.

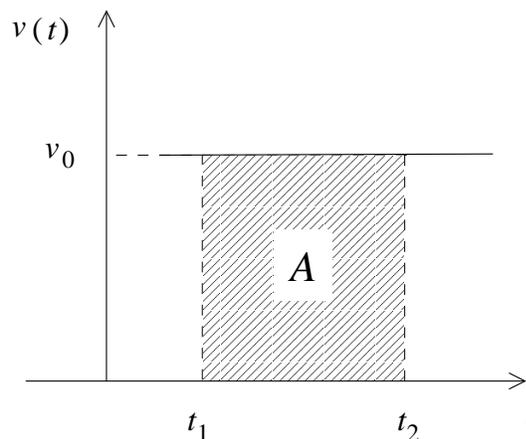
Si graficamos ahora la velocidad como función del tiempo, para las mismas tres partículas anteriores, obtendremos las siguientes figuras:



Las líneas horizontales indican que se trata de movimientos con velocidad constante en todos los casos, primero positiva, luego cero, y luego negativa, pero de módulo mayor que en el caso (a).

Si bien es cierto tenemos bastante información en estos gráficos, no tenemos toda la información necesaria para describir el movimiento de la partícula. Por ejemplo, si la partícula (a) está inicialmente a la derecha del origen, entonces sabemos que se está alejando del mismo; si está a la izquierda del origen, sabemos que se está acercando. Así que no podemos determinar completamente su movimiento a menos que tengamos información sobre su posición inicial. Esto es, por supuesto, consistente con nuestra ecuación de itinerario anterior.

Sin embargo, observemos el siguiente interesante hecho: Consideremos, en el gráfico de velocidad versus tiempo (a) anterior, dos instantes t_1 y t_2 :



Dichos instantes determinan un área bajo la curva, A , igual a

$$A = v_0 \Delta t ,$$

que es precisamente igual a Δx , el desplazamiento de la partícula entre los instantes t_1 y t_2 . Notemos también que si $v_0 < 0$, entonces la expresión algebraica anterior nos da un área “negativa”. Esto puede parecer inconsistente con la noción intuitiva de área, pero matemáticamente no lo es. De hecho, resulta adecuado decir que el área “bajo” una curva, cuando dicha curva está por debajo del eje de las abscisas, es negativa. Por tanto, también es cierto, para velocidades negativas, que el desplazamiento Δx es igual al área bajo la curva de velocidad versus tiempo.

De lo anterior se sigue que, dado un gráfico velocidad versus tiempo, no sólo podemos conocer su velocidad, sino el desplazamiento, lo cual es bastante información. Si además conocemos su posición inicial, entonces podremos determinar completamente la trayectoria de la partícula.

Problema resuelto en clases: 2.13

Hasta ahora tenemos, entonces, una descripción completa del movimiento de partículas con velocidad constante. Sin embargo, la mayoría de las veces la velocidad es constante. Por analogía a lo ya hecho, donde definimos una velocidad media como el cociente entre un intervalo de posiciones y un intervalo de tiempos, ahora definiremos el concepto de *aceleración*.

La *aceleración media* (o promedio) que tiene la partícula durante el intervalo $[t_1, t_2]$ es igual al cambio de velocidad que ocurre durante el intervalo, dividido por la duración de éste, es decir

$$\bar{a}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Las unidades de la aceleración son m/s^2 .

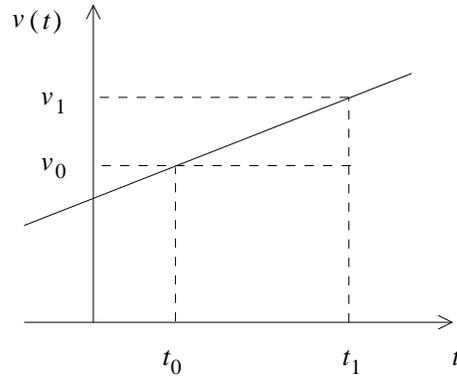
Observemos que una aceleración negativa simplemente significa que la velocidad disminuye. Sin embargo, ello no implica que la partícula vaya más lento. Esto sería cierto sólo si la velocidad es positiva (es decir, si se mueve hacia la derecha). Si se mueve hacia la izquierda, la velocidad es negativa, y por lo tanto una aceleración negativa significa que la velocidad disminuye, esto es, se vuelve *más negativa*. Vale decir, la partícula va aun más rápido hacia la izquierda.

Si la aceleración es constante, igual a a , entonces la aceleración media es igual a la aceleración a en todo intervalo de tiempo. (Esto es lo que se denomina un *movimiento uniformemente acelerado*.) De la definición se sigue que, en este caso, llamando al instante inicial $t_1 = t_0$, la velocidad inicial $v(t_0) = v_0$, y a $t_2 = t$,

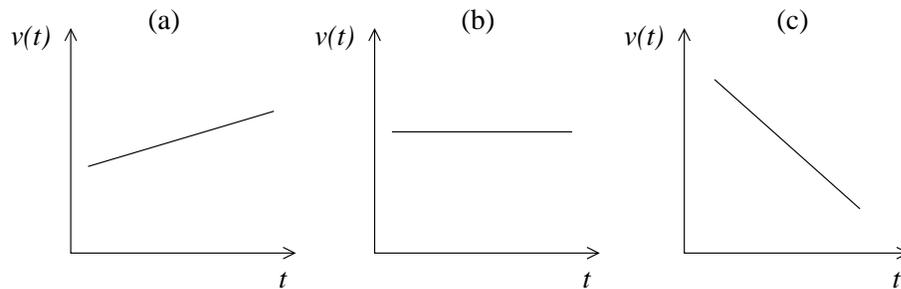
$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) .$$

Conocida la aceleración, entonces, podemos determinar la velocidad en todo instante, conocida la velocidad inicial.

La ecuación anterior, además, nos dice que el gráfico de velocidad versus tiempo, cuando la aceleración es constante, es una línea recta, de pendiente igual a la aceleración:



De manera análoga a lo que hicimos para velocidad constante, podemos ahora graficar la velocidad como función del tiempo, para distintas aceleraciones:

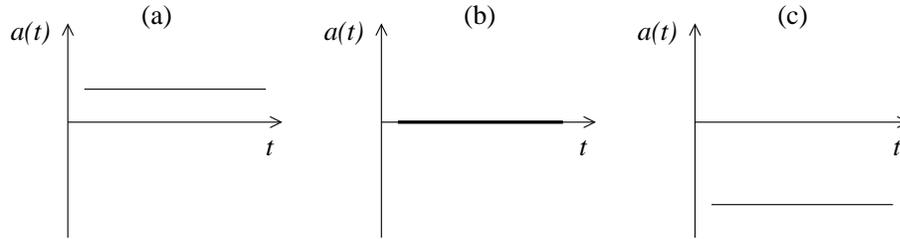


En el caso (a), tenemos una partícula cuya velocidad aumenta (aceleración positiva). Nuevamente hay que tener cuidado con las interpretaciones: que la velocidad aumenta significa, en el caso de la figura (a), que la partícula va cada vez más rápido (recorre, en intervalos de tiempo iguales, cada vez mayor distancia). Sin embargo, si la recta estuviera bajo el eje de las abscisas, que la velocidad aumente significa que se hace cada vez *menos negativa*, lo cual implica que la partícula va cada vez más lento (recorre, en intervalos de tiempo iguales, cada vez menor distancia).

Luego, en el caso (b), la recta tiene pendiente cero, es decir la aceleración es cero. Corresponde precisamente al caso que habíamos analizado antes, con velocidad constante.

Por último, en el caso (c), la partícula tiene aceleración negativa, es decir, su velocidad disminuye (lo cual no significa necesariamente que vaya más lento).

También podemos graficar la aceleración como función del tiempo, para cada uno de los casos anteriores:

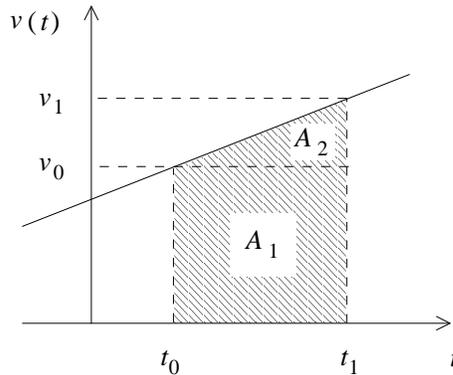


Recapitulando: en un gráfico de posición versus tiempo, la pendiente de la recta $x(t)$ representa la velocidad; en uno de velocidad versus tiempo, la pendiente de la recta $v(t)$ representa la aceleración

Observemos que, análogamente a los gráficos $v(t)$ analizados anteriormente, en este caso el área bajo la curva de un gráfico $a(t)$ nos da $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$, el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo dado.

Ya habíamos encontrado que, al menos para el caso en que la velocidad es constante, el área bajo la curva en el gráfico de $v(t)$ es el desplazamiento. ¿Será cierto aun en el caso en que la aceleración es distinta de cero? Claro que sí. La razón es que siempre será posible dividir el movimiento en intervalos suficientemente pequeños en que la velocidad se pueda considerar constante, y para cada uno de esos intervalos sería entonces cierto, como vimos, que el área bajo la curva es el desplazamiento.

Ahora estamos en condiciones de encontrar la posición de una partícula con aceleración constante a . Consideremos la curva $v(t)$ siguiente, y calculemos el área bajo la curva entre dos instantes t_1 y t_2 :



El desplazamiento será la suma de las áreas A_1 y A_2 :

$$\Delta x = A_1 + A_2 = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t \Delta v .$$

De la definición de aceleración, $\Delta v = a \Delta t$, luego

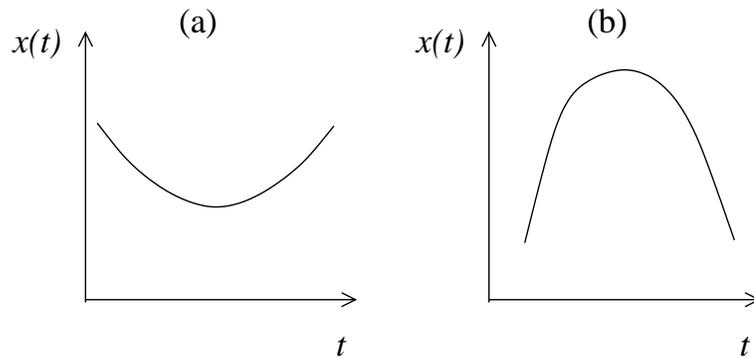
$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 .$$

Definiendo, para simplificar la notación, $t_1 = t$, $x(t_0) = x_0$, queda

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2,$$

que es entonces la ecuación de itinerario para aceleración constante. Si sólo conocemos el gráfico de $v(t)$, entonces para determinar completamente la posición necesitamos una información adicional, $x(t_0) = x_0$.

Se sigue que el gráfico de $x(t)$ es, si hay aceleración constante, una parábola. En particular, mientras más grande sea la aceleración a , la parábola será más abierta. Además, si $a > 0$, se tiene una parábola “apuntando” hacia arriba, y si $a < 0$ será una parábola invertida. Matemáticamente, el concepto a usar es el de *curvatura*. Consideremos, por ejemplo, las siguientes curvas:



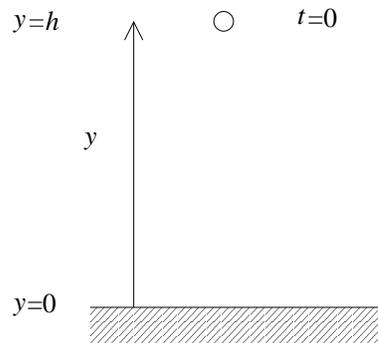
El caso (a) corresponde a una parábola con curvatura positiva (curva cóncava), de modo que describe a una partícula con aceleración positiva, mientras que en (b) la partícula tiene curvatura (aceleración) negativa (curva convexa). En módulo, la aceleración del caso (a) es menor que en (b). Observemos que una recta es una curva con curvatura cero, es decir, la aceleración es cero, lo cual por supuesto es consistente con nuestros resultados anteriores, que una recta en el gráfico $x(t)$ corresponde a un movimiento con velocidad constante.

Recapitulamos brevemente la correspondencia entre conceptos geométricos y físicos en los gráficos que hemos estudiado:

Concepto geométrico	Concepto físico		
	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
pendiente	velocidad	aceleración	—
curvatura	aceleración	—	—
área bajo la curva	—	desplazamiento	cambio de velocidad

Ejemplo:

Consideremos una piedra que se deja caer desde una altura h . ¿Cuánto tiempo se demora en caer, y con qué velocidad llega al suelo? Representemos gráficamente este problema:



Debemos ser cuidadosos, en todo este tipo de problemas, al elegir el origen del tiempo, y el origen de coordenadas. Por supuesto, el resultado final no debería depender de dicha elección, pero es necesario hacerla para que cualquier ecuación de itinerario tenga sentido. En este caso, hemos escogido $t = 0$ como el instante en que se deja caer la pelota, el eje de coordenadas es en la dirección vertical, que es donde ocurre el movimiento, con $y = 0$ en el suelo y con la dirección positiva apuntando hacia arriba.

Galileo fue quien observó que todos los cuerpos, en una situación como la descrita en la figura, están sujetos a la misma aceleración, que llamamos *aceleración de gravedad*, e igual a $a = -g \equiv -9.8 \text{ m/s}^2$. Debemos tener cuidado con el signo, para no cometer un error típico: que la aceleración sea negativa no tiene relación con que la piedra “caer”. No es tan sencillo. Una aceleración negativa significa que la velocidad disminuye. Si inicialmente la velocidad es cero, como en la figura, entonces que disminuya significa que la velocidad se vuelve negativa. Una velocidad negativa significa que el desplazamiento es negativo, es decir, que su coordenada de posición disminuye con el tiempo. En el caso de la figura, inicialmente $y = h > 0$, luego y se hace menos positiva con el tiempo, *es decir, cae*. En este caso particular, que la aceleración sea negativa significa que cae. Pero ¿qué sucede si la partícula es lanzada desde la altura h hacia arriba? En tal caso, sigue siendo cierto que la velocidad debe disminuir, porque la aceleración es negativa. Pero ahora, inicialmente, la velocidad es positiva (porque su desplazamiento es positivo, es decir, su posición y aumenta, se hace más positiva respecto a h), de modo que en un instante posterior su velocidad es menos positiva. La partícula entonces no cae, sino simplemente va cada vez más lento.

Ya que hemos fijado el significado de $t = 0$, $y = 0$ e $y > 0$, escribimos las ecuaciones de itinerario:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 ,$$

$$v(t) = v_0 + a t ,$$

donde $y_0 = y(t = 0)$, $v_0 = v(t = 0)$. En nuestro ejemplo, además, $y_0 = h$, $v_0 = 0$,

$a = -g$, luego

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 ,$$

$$v(t) = -gt .$$

Podemos entonces responder la primera pregunta, cuándo la partícula llega al suelo. Esto sucede para un tiempo $t = T$ tal que $y(T) = 0$, es decir:

$$y(T) = h - \frac{1}{2}gT^2 ,$$

que tiene *dos soluciones*:

$$T = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Nos encontramos aquí frente al mismo problema que con las funciones inversas trigonométricas: más de una solución matemática, pero sólo una puede ser físicamente correcta, ya que sabemos que si dejamos caer esta piedra, llegará al suelo en un único instante bien determinado. ¿Cuál es la solución físicamente aceptable? En este caso, es evidente que la piedra debe llegar al suelo *después* de soltarla, por lo tanto la solución correcta es la positiva, $T = \sqrt{2h/g}$.

Toda esta discusión puede parecer una trivialidad, pero no es difícil imaginar un problema en que la solución correcta no sea la anterior. En efecto, digamos que el experimento ahora es lanzar la piedra, con cierta velocidad inicial, desde el suelo, y que llega al punto más alto de su trayectoria, antes de caer nuevamente, en $t = 0$. Recordemos: la elección de $t = 0$ es completamente arbitraria, y nada nos impide fijar que $t = 0$ es el instante en que la piedra alcanza su mayor altura. La pregunta ahora es: ¿Cuándo fue lanzada la piedra? No es difícil convencerse de que las ecuaciones de itinerario son exactamente las mismas, y por lo tanto la solución matemática será $T = \pm\sqrt{2h/g}$. Sin embargo, en este caso la piedra fue lanzada *antes* de que llegara arriba, y por lo tanto la solución física al problema es el *tiempo negativo*, $T = -\sqrt{2h/g}$. Por supuesto, un tiempo negativo no es nada exótico. Significa simplemente que es un tiempo anterior a $t = 0$, cuya elección a su vez es completamente arbitraria.

Ahora podemos responder la siguiente pregunta: ¿con qué velocidad llega al suelo? Como sabemos el tiempo que tarda en caer, la velocidad final será

$$v(T) = aT = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} .$$

Que la velocidad sea negativa significa, dada la elección de nuestro eje de coordenadas, que es hacia abajo, como debe ser.

Hay una manera un poco más directa de obtener el mismo resultado. Consideremos ahora un caso general de un movimiento acelerado, y las correspondientes

ecuaciones de itinerario, que escribiremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2, \\ \Delta v &= a \Delta t,\end{aligned}$$

con $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$, $\Delta v = v_2 - v_1$, $v_1 = v(t_1)$ y $v_2 = v(t_2)$. Las dos ecuaciones dependen del tiempo, pero podemos manipularlas para obtener una expresión que no dependa del tiempo. Basta con despejar Δt de la segunda ecuación, y reemplazar el resultado en la primera:

$$\Delta x = v_1 \frac{\Delta v}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{\Delta v}{a} \right) = \frac{\Delta v}{a} \left(v_1 + \frac{1}{2} \Delta v \right) = \frac{v_2 - v_1}{a} \frac{1}{2} (v_1 + v_2),$$

es decir

$$\Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Tenemos aquí una expresión que relaciona directamente la distancia recorrida, la aceleración, y las velocidades inicial y final de una partícula, si la aceleración es constante. El tiempo que transcurre entre medio no es relevante.

Usando esta expresión podemos recalcular la velocidad con que la piedra llega al suelo en nuestro ejemplo anterior. En este caso, $t_1 = 0$, $t_2 = T$, de modo que $\Delta x = 0 - h = -h$, $v_1 = 0$, $a = -g$, y $v_2 = v(T)$ es lo que queremos calcular. Se tiene entonces

$$v_2^2 = 2a\Delta x = 2gh,$$

resultado por supuesto consistente con lo anterior, pero ahora obtenido de un modo mucho más sencillo. Nuevamente acá tenemos dos soluciones matemáticamente aceptables, $v_2 = \pm\sqrt{2gh}$. Pero sabemos que la partícula, en $t = T$, se mueve hacia abajo, por tanto (dada la elección de eje coordenado que hicimos) su velocidad es negativa, de modo que la solución físicamente aceptable es *la solución negativa*, $v_2 = -\sqrt{2gh}$.

Problema resuelto en clases: 2.12

Hasta el momento, hemos definido ciertos conceptos básicos, y relacionado algunos elementos geométricos con físicos, para movimientos sencillos, con velocidad o aceleración constante. Sin embargo, en general los cuerpos se mueven de manera más compleja, y debemos por tanto extender los resultados anteriores para describir dichos movimientos también.

Lo primero que observamos es que la velocidad media, si bien es cierto nos da una primera idea acerca del movimiento, no es un buen descriptor de los detalles del mismo. En la Fig. 2.2 hemos representado la trayectoria de una partícula. En un gráfico $x(t)$ en función de t , la velocidad media entre t_1 y t_2 corresponde a la tangente del ángulo que forma la recta que une (x_1, t_1) y (x_2, t_2) con el eje del tiempo.

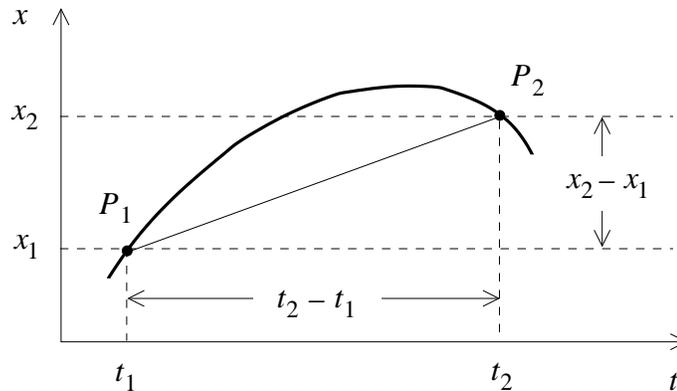


Figura 2.2

Si la partícula se moviera realmente con la velocidad media, su trayectoria sería el trazo que une a los puntos P_1 y P_2 , pero es claro que, en el intervalo $[t_1, t_2]$, el movimiento es algo más complicado.

Si se desea tener una información más precisa acerca de la velocidad durante el movimiento, es necesario subdividir el intervalo de tiempo original en subintervalos y calcular en cada uno de ellos una velocidad media. Mientras más pequeño es el tamaño de esos subintervalos, más precisa es la información acerca de las variaciones que experimenta la velocidad de la partícula mientras se desplaza. El valor que se mide para la velocidad media en un cierto intervalo de tiempo ϵ pequeño, donde ϵ es finito pero tan pequeño como nosotros deseamos, se denomina *velocidad instantánea*.

Para determinar la *velocidad instantánea* de la partícula en un instante t , se evalúa la velocidad promedio durante un intervalo muy pequeño que comienza en t y termina en $t + \epsilon$, donde ϵ es un incremento de tiempo infinitesimal (más adelante, al finalizar el cálculo, haremos $\epsilon \rightarrow 0$). Explícitamente:

$$\bar{v}(t, t + \epsilon) = \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon}.$$

Al hacer $\epsilon \rightarrow 0$, se obtiene la velocidad instantánea de la partícula en el instante t . Ésta la denotaremos por $v(t)$ o $\dot{x}(t)$. Se tiene

$$v(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon} = \dot{x}(t). \quad (2.1)$$

Este proceso límite está ilustrado en la Figura 2.3. Allí se observa cómo cambia el valor de la velocidad media de la partícula en un intervalo $[t, t + \Delta t]$ cuando es evaluada para diferentes valores de Δt . Mientras más pequeño es Δt , la recta que une los dos puntos de la curva se parece más a la curva “real” (en la figura, $\overline{PP_3}$ es mucho más parecida a la curva $x(t)$ en el intervalo Δt_3 , que el trazo $\overline{PP_2}$ en el intervalo Δt_1 . (Esto no es sino una consecuencia de que, en intervalos de tiempo suficientemente

cortos, siempre se puede considerar que la velocidad es constante.) En el caso límite, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se observa que la velocidad instantánea queda representada por la tangente del ángulo (es decir, la pendiente) que forma la recta tangente a la curva $x(t)$ vs. t con el eje del tiempo.

De aquí en adelante el término *velocidad* siempre se referirá a la velocidad instantánea.

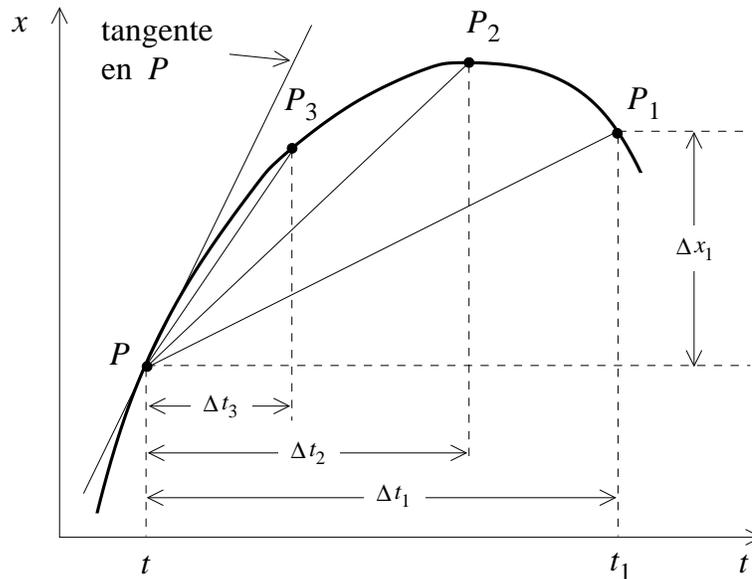


Figura 2.3

Es interesante notar cómo la información anterior nos permite describir de manera bastante detallada el movimiento de una partícula, simplemente observando su gráfico de posición versus tiempo. Por ejemplo, en la Fig. 2.3, podemos decir que, en el instante t , la partícula tiene velocidad positiva (la pendiente de la recta tangente a la curva en P es positiva), de modo que se mueve hacia la derecha, alejándose del origen; luego, a medida que avanza el tiempo, su velocidad se hace cada vez más pequeña, hasta hacerse cero un poco antes que P_2 (la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal, de modo que su pendiente es cero), momento en el cual alcanza su máxima distancia respecto al origen. Más adelante, la tangente a la curva en P_1 tiene pendiente negativa, de modo que la partícula tiene velocidad negativa en $t = t_1$, esto es, se mueve hacia la izquierda, acercándose ahora al origen.

Ejemplos:

1. Supongamos que la posición de una partícula viene dada por $x(t) = x_0 + v_0 t$, con $x_0 = -1$ m y $v_0 = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. El gráfico $x(t)$ en función de t da lugar a la recta que se muestra en la figura 2.4.

Evaluemos explícitamente la velocidad en un instante t cualquiera. Usando la ecuación (2.1) y la expresión para $x(t)$ de este ejercicio, se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[x_0 + v_0 \cdot (t+\epsilon)] - [x_0 + v_0 \cdot t]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_0 = v_0 . \end{aligned}$$

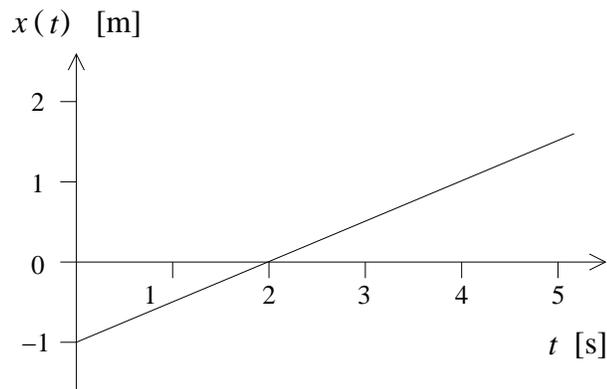


Figura 2.4

Este resultado indica que la expresión para $x(t)$ escrita más arriba efectivamente corresponde al movimiento de una partícula con velocidad constante v_0 (i.e., independiente del tiempo).

2. Supongamos ahora que la posición de una partícula viene dada por

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

con $z_0 = 10$ m y $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Esto describe a una partícula en caída libre en el campo gravitatorio terrestre, que se deja caer en $t = 0$ desde una altura z_0 . Al graficar la posición en función del tiempo se encuentra la curva (parábola) mostrada en la figura 2.5.

Evaluemos la velocidad en un instante t cualquiera. Usando la ecuación (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z(t+\epsilon) - z(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[z_0 - \frac{1}{2}g \cdot (t+\epsilon)^2] - [z_0 - \frac{1}{2}g \cdot t^2]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}g \cdot \epsilon \cdot (2t+\epsilon)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g \cdot (2t+\epsilon)}{2} = -gt . \end{aligned}$$

La figura 2.6 muestra el gráfico de la velocidad instantánea en función del tiempo. Se observa que ésta decrece linealmente a medida que transcurre el tiempo. El signo negativo de la velocidad significa que la partícula se está desplazando en el sentido negativo del eje z .

Sin embargo, el módulo de la velocidad de la partícula (magnitud que en algunos textos es denominada *rapidez*) aumenta a medida que transcurre el tiempo:

$$|v(t)| = g t .$$

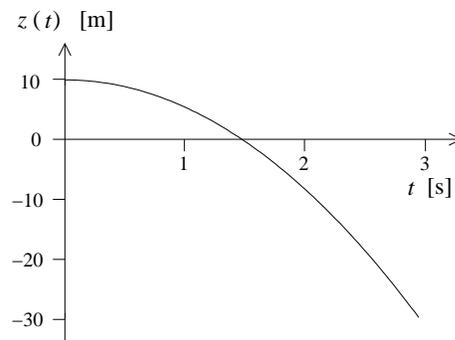


Figura 2.5

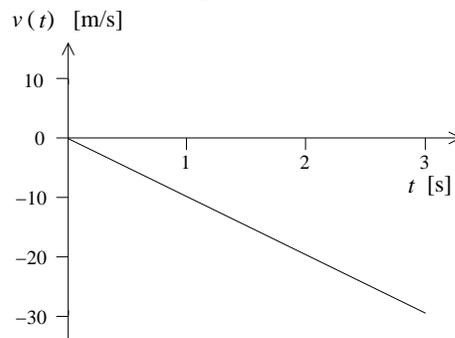


Figura 2.6

Así como generalizamos el concepto de velocidad al caso de velocidad no uniforme, a través de un proceso límite, podemos hacerlo para el caso en que la *aceleración* no es uniforme. Por los mismos argumentos dados anteriormente, en este caso la *aceleración* media da sólo información aproximada sobre el cambio de velocidad. Pero intuimos que, para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, la *aceleración* media debería ser la *aceleración* “correcta”. Definimos entonces la *aceleración instantánea* en un instante t , como la *aceleración* media durante un intervalo muy pequeño que comienza

en t . Sea $[t, t + \epsilon]$ ese intervalo, donde ϵ es un tiempo infinitesimal. Entonces

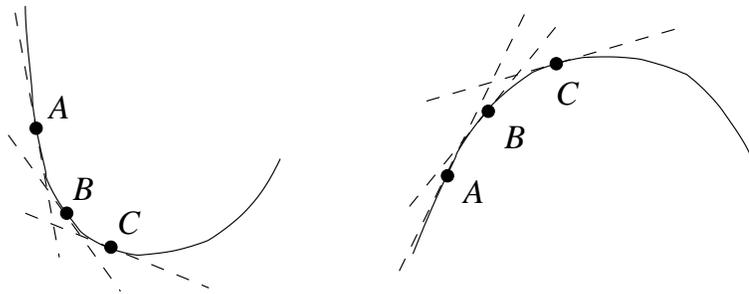
$$\bar{a}(t, t + \epsilon) = \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon}.$$

Al hacer $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene la aceleración instantánea de la partícula (en el instante t), que denotaremos con $a(t)$, $\ddot{x}(t)$ o $\dot{v}(t)$:

$$a(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t). \quad (2.2)$$

De aquí en adelante el término *aceleración* siempre se referirá a la aceleración instantánea.

Ya habíamos observado antes que, al menos para aceleración constante, la aceleración se relaciona con la curvatura de $x(t)$. Ahora podemos entender que esto es un hecho general. Consideremos la siguiente figura:



A la izquierda, tenemos una curva con curvatura positiva. Es claro que, a medida que la curva avanza de A a B a C , la pendiente de la tangente aumenta (se hace menos negativa). Si la curva representa posición en función del tiempo, entonces lo que sucede es que su velocidad aumenta, es decir, su aceleración es positiva. A la inversa, en la figura de la derecha, al pasar de A a B a C , la pendiente de la tangente disminuye (se hace menos positiva). Si se trata de posición en función del tiempo, entonces, es la velocidad la que está disminuyendo, vale decir, su aceleración es negativa. Concluimos entonces que, efectivamente, para una curva arbitraria (en particular si la aceleración no es constante), el signo de la curvatura es igual al signo de la aceleración.

Ejemplos:

1. Para el movimiento rectilíneo uniforme, la posición de una partícula viene dada por $x(t) = x_0 + v_0 t$. Ya hemos visto que, en ese caso, su velocidad es constante e igual a v_0 . Demostremos ahora, usando la ecuación (2.2), que en este caso la partícula efectivamente no tiene aceleración:

$$a(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_0 - v_0}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2. En un ejemplo anterior vimos que la posición y velocidad de una partícula que cae libremente bajo la acción de la aceleración de gravedad terrestre están dadas por las siguientes ecuaciones

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

y

$$v(t) = -g t .$$

Evaluemos la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[-g \cdot (t + \epsilon)] - (-g \cdot t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-g \cdot \epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-g) = -g . \end{aligned}$$

El resultado indica que la aceleración es constante y negativa. Eso significa que la partícula acelera en el sentido negativo del eje z .

En general, para una función arbitraria, se define la *derivada* de dicha función respecto a su variable de la siguiente manera:

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) - f(t)}{\epsilon} .$$

Podemos decir, entonces, que la velocidad de una partícula es la derivada de la posición respecto al tiempo; análogamente, la aceleración de una partícula es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. La notación $\dot{f}(t)$ se debe a Newton, es más usual en textos de Física, y se reserva específicamente a derivadas respecto al tiempo. La notación df/dt se debe a Leibniz, y es más general, usándose para derivadas respecto a cualquier tipo de argumento.

Observemos, en las Ecs. (2.1) y (2.2), que tanto el numerador como el denominador tienden a cero al hacer el límite. El resultado del cociente queda indeterminado, entonces. Pero al hacer el límite con cuidado, como vemos en todos los ejemplos anteriores, se llega a un resultado definido.

Notemos también que la aceleración es la derivada de una derivada (la velocidad). A esto se le llama una *segunda derivada*. Tanto las notaciones de Newton como de Leibniz sugieren rápidamente una notación especial para la segunda derivada:

$$\begin{aligned} a(t) &= \dot{v}(t) = (\dot{x}(t))' \equiv \ddot{x}(t) , \\ a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) \equiv \frac{d^2 x(t)}{dt^2} . \end{aligned}$$

Ya tendremos oportunidad de profundizar en el concepto matemático de derivada, pero ahora nos interesa destacar la enorme importancia que la derivada tiene para

nuestra descripción del movimiento. Sabemos que, por ejemplo, para un movimiento con aceleración uniforme, podemos escribir ecuaciones de itinerario para la posición, la velocidad y la aceleración. Con ellas es posible describir completamente *todo* el movimiento de la partícula. Sin embargo, ahora es claro que, en realidad, sólo necesitamos *una sola función*, la posición. Las ecuaciones de itinerario para la velocidad y la posición se pueden obtener a partir de ella usando una herramienta matemática, la derivada. Esto no es sino un ejemplo de algo que encontraremos frecuentemente a lo largo de este curso: en Física, en general, nos interesa tener una descripción tan sencilla como sea posible de la Naturaleza, y usualmente obtener dicha descripción, para que sea sencilla, requiere la utilización de alguna Matemática adicional. En este caso hemos logrado, gracias a la derivada, reemplazar una descripción complicada, en términos de tres ecuaciones de itinerario, por una descripción sencilla, con una sola ecuación de itinerario, $x(t)$. ¿Y por qué es importante tener una descripción sencilla? Porque sabemos, y diciéndolo comenzamos este capítulo, que la descripción *completa* del movimiento se tiene si se conoce $x(t)$ para todo tiempo. Tal intuición física hubiera sido “traicionada”, en algún sentido, si hubiéramos tenido que mantener la descripción matemática en términos de tres ecuaciones de itinerario. Ahora, usando la derivada, podemos ser fieles a la intuición original.

Ejemplos adicionales:

1. Consideremos una partícula de masa m , cuya posición a medida que transcurre el tiempo viene dada por

$$z(t) = A \cos(\omega t) ,$$

donde A y ω son constantes. Tal movimiento de la partícula es un movimiento oscilatorio periódico. La amplitud de las oscilaciones es A y el período del movimiento (es decir, el tiempo que debe transcurrir hasta que una configuración se vuelva a repetir) es

$$T = 2\pi/\omega .$$

Al inverso de T se le llama *frecuencia*: $\nu = 1/T$. A la magnitud ω se le llama *frecuencia angular*. Se tiene que $\omega = 2\pi\nu$.

Evaluemos la velocidad de la partícula:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z(t + \epsilon) - z(t)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [A \cos(\omega(t + \epsilon)) - A \cos(\omega t)] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon} [\cos(\omega t) \cos(\omega \epsilon) - \sin(\omega t) \sin(\omega \epsilon) - \cos(\omega t)] \\
 &\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon} \left[\cos(\omega t) \left(1 - \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2} \right) - \sin(\omega t) \cdot (\omega \epsilon) - \cos(\omega t) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon} \left[-\cos(\omega t) \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2} - \sin(\omega t) \cdot (\omega \epsilon) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A \left[-\cos(\omega t) \frac{\omega^2 \epsilon}{2} - \omega \cdot \sin(\omega t) \right] \\
 &= -A\omega \cdot \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

Una vez conocida la velocidad podemos, en forma análoga, calcular la aceleración:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \epsilon) - v(t)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [-A\omega \sin(\omega(t + \epsilon)) - (-A\omega) \sin(\omega t)] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{A\omega}{\epsilon} [\sin(\omega t) \cos(\omega \epsilon) + \cos(\omega t) \sin(\omega \epsilon) - \sin(\omega t)] \\
 &\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{A\omega}{\epsilon} \left[\sin(\omega t) \left(1 - \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2} \right) + \cos(\omega t) \cdot \omega \epsilon - \sin(\omega t) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -A\omega \left[-\sin(\omega t) \frac{\omega^2 \epsilon}{2} + \omega \cos(\omega t) \right] \\
 &= -A\omega^2 \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

La figura 2.7 muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo.

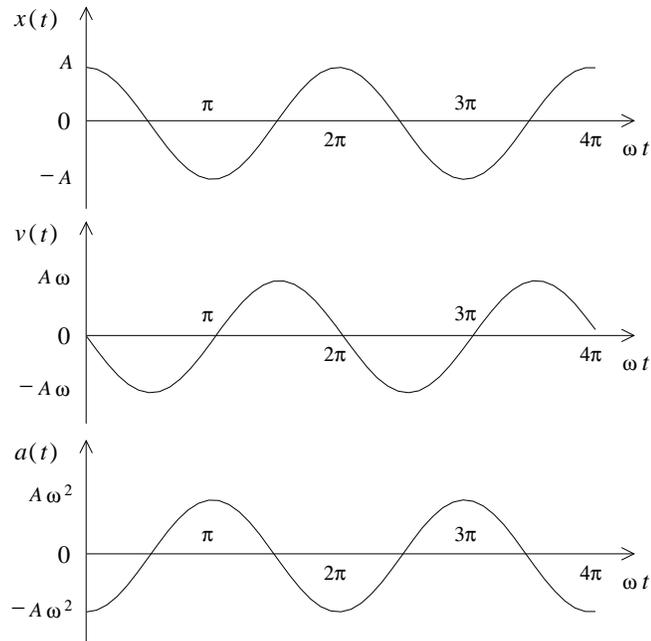


Figura 2.7

2. Una persona levanta un peso P , sujetando una cuerda que pasa por una polea y caminando horizontalmente con velocidad v_0 . ¿Cuál es la velocidad del peso P ?
 Supongamos que el largo de la cuerda es $2h$ (o sea, cuando la persona está en $x = 0$, el cuerpo P está en el suelo encontrándose la cuerda estirada). Se tiene

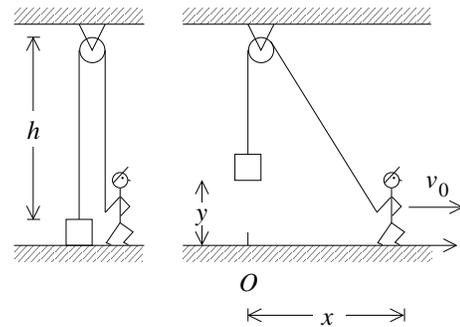


Figura 2.8

$$(h - y) + \sqrt{h^2 + x^2} = 2h ,$$

o sea,

$$y(t) = \sqrt{h^2 + x^2(t)} - h = \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} - h .$$

Para la velocidad obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) = v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \epsilon) - y(t)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\sqrt{h^2 + v_0^2 (t + \epsilon)^2} - h \right) - \left(\sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} - h \right) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\sqrt{(h^2 + v_0^2 t^2) + (2v_0^2 t\epsilon + v_0^2 \epsilon^2)} - \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2v_0^2 t\epsilon + v_0^2 \epsilon^2}{h^2 + v_0^2 t^2}} - 1 \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sqrt{h^2 + v_0^2 t^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2v_0^2 t\epsilon + v_0^2 \epsilon^2}{h^2 + v_0^2 t^2} - 1 \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2} \frac{2v_0^2 t\epsilon + v_0^2 \epsilon^2}{\sqrt{h^2 + v_0^2 t^2}} \\
&= \frac{v_0^2 t}{\sqrt{h^2 + v_0^2 t^2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Demuestre que la aceleración de P viene dada por:

$$a(t) = \dot{y}(t) = v_0^2 \frac{h^2}{(h^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}.$$

2.2. El camino inverso

En la sección anterior se presentó el procedimiento que permite evaluar, partiendo del conocimiento de la posición en función del tiempo, la velocidad y luego la aceleración. Sabemos también, sin embargo, que es posible, al menos en el caso de aceleración constante, seguir el camino inverso, es decir, conociendo la aceleración en función del tiempo, calcular la velocidad y posición. En esta sección profundizaremos en esto, encontrando que este camino es posible también si la aceleración no es constante.

Supongamos que la velocidad de una partícula en función del tiempo viene dada por el gráfico mostrado en la figura 2.9.

Recordemos primero algo ya calculado, el caso de velocidad constante. ¿Cuál será la distancia recorrida por la partícula entre los instantes t_i y t_f ? Entre esos dos instantes la velocidad de la partícula es constante (igual a v_0), por lo tanto la distancia recorrida será $x(t_f) - x(t_i) = v_0 \cdot (t_f - t_i)$. Podemos escribir

$$x(t_f) = x(t_i) + v_0 \cdot (t_f - t_i) ,$$

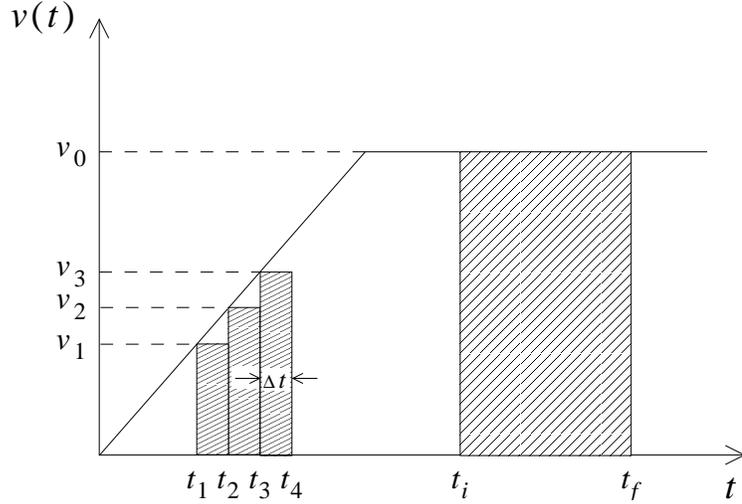


Figura 2.9

o sea, si una partícula entre dos instantes (inicial y final) se mueve a una velocidad constante, entonces la posición final es igual a la posición inicial más el área de la función $v(t)$ entre los instantes t_i y t_f .

Cuando la función $v(t)$ no es constante la situación es más compleja. Intentemos evaluar la distancia que recorre la partícula entre los instantes t_1 y t_4 . Como la velocidad no es constante, tomaremos algunas mediciones intermedias, separadas por un intervalo de tiempo Δt . Entre t_1 y t_2 la distancia recorrida será aproximadamente $v(t_1) \cdot (t_2 - t_1) = v(t_1) \cdot \Delta t$, entre t_2 y t_3 será $v(t_2) \cdot (t_3 - t_2) = v(t_2) \cdot \Delta t$, y finalmente entre t_3 y t_4 será aproximadamente $v(t_3) \cdot (t_4 - t_3) = v(t_3) \cdot \Delta t$. La distancia total recorrida será aproximadamente

$$x(t_4) - x(t_1) \simeq \sum_{j=1}^3 v(t_j) \cdot \Delta t \quad , \quad (2.3)$$

donde $\Delta t = (t_4 - t_1)/3$. Observe que el lado derecho de la ecuación (2.3) es igual al área de los rectángulos mostrados en la figura 2.10. Evidentemente el resultado anterior es sólo aproximado: hemos tomado 3 mediciones intermedias y hemos supuesto que entre las mediciones la velocidad es constante (igual al valor de la última medición). También es claro que si aumentamos el número de mediciones intermedias obtendremos un resultado más preciso. Para un número muy grande (infinito) de mediciones intermedias, el procedimiento sería exacto; en ese caso el área de los rectángulos sería igual al área entre la función $v(t)$ y el eje \hat{t} . Si dividimos el intervalo $[t_i, t_f]$ en N intervalos de ancho $\Delta t = (t_f - t_i)/N$, entonces el proceso límite anterior

se escribe en la forma:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N v(t_i) \Delta t \equiv \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt ,$$

donde

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = (\text{Área delimitada por } v(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f) .$$

Otro modo de pensarlo es que $\int_{t_i}^{t_f}$ significa “sume las contribuciones que están detrás del símbolo desde $t = t_i$ hasta $t = t_f$ ” [en este caso, sume contribuciones de tamaño $v(t) dt$, que representa el área de un rectángulo con un lado igual a $v(t)$ y el otro igual a una magnitud infinitesimal dt].

Observemos la lógica de la notación utilizada. Hacer el proceso límite anterior significa básicamente convertir letras griegas en latinas: Δt es ahora dt , y Σ es ahora una “S” estilizada, \int .

De esta manera hemos encontrado un resultado completamente general:

$$x(t_f) = x(t_i) + (\text{Área entre } v(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f) , \quad (2.4)$$

o bien,

$$x(t_f) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt . \quad (2.5)$$

El símbolo \int se denomina *integral*. Decimos entonces que el desplazamiento de una partícula entre dos instantes t_i y t_f es *la integral de la velocidad entre t_i y t_f* .

Ejemplos:

1. Movimiento uniforme:

Si $v(t) = v_0$, constante, se tiene que el área entre la curva $v(t)$ y el eje t es:

$$\int_{t_i}^{t_f} v_0 dt = v_0(t_f - t_i) .$$

Entonces,

$$x(t_f) = x(t_i) + v_0(t_f - t_i) .$$

2. Movimiento uniformemente acelerado:

Consideremos una partícula cuya velocidad viene dada por

$$v(t) = v_0 t + a_0 t ,$$

(ver figura 2.10). Observe que v_0 es la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$. El área bajo la curva entre los instantes $t_i = 0$ y t_f es el área de una sección rectangular y una triangular, resultando:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} v(t) dt &= v_0 t_f + \frac{1}{2}(v(t_f) - v_0) \cdot t_f \\ &= v_0 t_f + \frac{1}{2} a_0 t_f^2 . \end{aligned}$$

Es decir,

$$x(t_f) = x(0) + v_0 t_f + \frac{1}{2} a_0 t_f^2 .$$

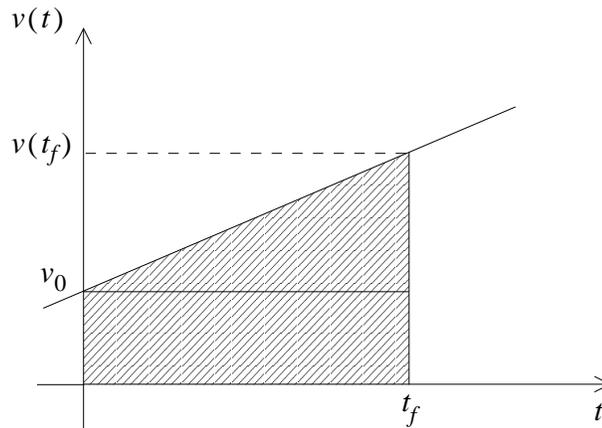


Figura 2.10

En un caso un poco más general, en que el instante inicial es $t = t_i \neq 0$, y la velocidad inicial es $v(t_i) = v_i$, se tiene, para un movimiento acelerado uniforme con aceleración a ,

$$\int_{t_i}^{t_f} (v_i + at) dt = v_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2} a(t_f - t_i)^2 ,$$

con lo cual

$$x(t_f) = x(t_i) + v_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2} a(t_f - t_i)^2 .$$

Conociendo la posición $x(t)$ de una partícula, siempre es posible determinar su velocidad. El recíproco no es cierto: si se conoce la velocidad $v(t)$ no es posible determinar la posición; lo único que se puede determinar es el desplazamiento entre dos instantes. En otras palabras, si conocemos $v(t)$, debemos conocer además la posición en algún instante para poder determinar $x(t)$.

Las relaciones que permiten obtener la velocidad si se conoce la aceleración $a(t)$, son análogas a las que relacionan la posición con la velocidad:

$$v(t_f) = v(t_i) + \text{Área entre } a(t) \text{ y el eje } t \text{ entre } t = t_i \text{ y } t_f . \quad (2.6)$$

o

$$v(t_f) = v(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} a(t) dt . \quad (2.7)$$

Ejemplo: Movimiento uniformemente acelerado.

Suponga que la aceleración de una partícula es constante, $a(t) = a_0$. Usando (2.6) se deduce que

$$v(t) = v(0) + a_0 t .$$

Haciendo uso del resultado obtenido en el ejemplo anterior se obtiene finalmente que

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}a_0 t^2 .$$

Observe que $x(0)$ y $v(0)$ son la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$.

2.3. Máximos y mínimos

Considere una función $f(t)$ suave (o sea, sin saltos ni puntas). Ya sabemos (ver último problema de la sección anterior) que $f'(t)$ está relacionado con la pendiente de las tangentes de la función $f(t)$. Observemos que para valores de t en los cuales $f'(t) = 0$, la función $f(t)$ tiene un máximo o mínimo (local). También podemos invertir la argumentación: encontrar los máximos y mínimos de una función $f(z)$ es equivalente a encontrar los ceros de la función *derivada*

$$g(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z + \epsilon) - f(z)}{\epsilon} .$$

Ejemplo: Suponga que un agricultor tiene L metros de malla para construir un corral rectangular. El agricultor desea aprovechar una muralla de piedra (recta) para obtener un corral mayor. ¿Qué dimensiones deberá tener el corral para que su área sea máxima?

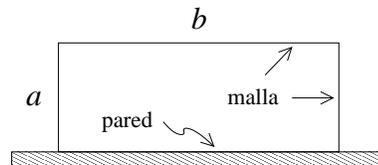


Figura 2.11

Solución: Sean a y b los largos del gallinero (ver figura 2.11). El largo de la malla es $L = 2a + b$, mientras que el área del gallinero es $A = a \cdot b$. Despejando b de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda se obtiene:

$$A = a \cdot (L - 2a) .$$

El área es una función de a . Tanto para $a = 0$ como para $a = L/2$ se tiene que $A = 0$. Para algún valor intermedio el área del gallinero será máxima. Para resolver el problema debemos encontrar el máximo de la función $f(a) = a \cdot (L - 2a)$. Para ello encontremos los ceros de la función derivada

$$g(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(a + \epsilon) \cdot (L - 2(a + \epsilon)) - a \cdot (L - 2a)] = L - 4a .$$

La función $g(a)$ tiene un (único) cero para $a = L/4$. Luego para ese valor de a el área del gallinero será máxima.

2.4. Elementos del cálculo infinitesimal e integral

A continuación se presenta un resumen de algunos resultados del cálculo que se usarán extensivamente en lo que sigue. Se dejará para los cursos de matemáticas la demostración rigurosa de los resultados. Supondremos implícitamente que las funciones que se usan más abajo tienen todas las propiedades necesarias para que los teoremas planteados sean válidos (por ejemplo, sean funciones continuas, derivables, acotadas, etc.).

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones y α un número (real o complejo). La función derivada $df(t)/dt$, relacionada con la pendiente de la función $f(t)$, por definición es

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(t + \epsilon) - f(t)] .$$

Propiedades:

- a)
$$\frac{d(\alpha f(t))}{dt} = \alpha \dot{f}(t) .$$
- b)
$$\frac{d(f(t) + g(t))}{dt} = \dot{f}(t) + \dot{g}(t) .$$
- c)
$$\frac{d(f(t)g(t))}{dt} = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t) .$$
- d)
$$\frac{df(g(t))}{dt} = \dot{f}(g(t)) \dot{g}(t) .$$

Demostración de c):

De la definición de la *derivada* se deduce que, para ϵ muy pequeño

$$f(t + \epsilon) = f(t) + \epsilon \dot{f}(t) . \quad (*)$$

Con esta relación, y una análoga para la función $g(t)$, se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d(f(t)g(t))}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(t + \epsilon)g(t + \epsilon) - f(t)g(t)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(f(t) + \epsilon \dot{f}(t))(g(t) + \epsilon \dot{g}(t)) - f(t)g(t)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\epsilon \dot{f}(t)g(t) + \epsilon f(t)\dot{g}(t) + \epsilon^2 \dot{f}(t)\dot{g}(t)] \\ &= \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t) . \end{aligned}$$

Demostración de d):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(g(t + \epsilon)) - f(g(t))] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(g(t) + \epsilon \dot{g}(t)) - f(g(t))] \end{aligned}$$

Pero, usando nuevamente la ecuación (*), se tiene

$$f(g + \epsilon \dot{g}) = f(g) + (\epsilon \dot{g}) \dot{f}(g) ,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(g(t) + \epsilon \dot{g}(t) \dot{f}(g(t))) - f(g(t))] \\ &= \dot{f}(g(t)) \dot{g}(t) . \end{aligned}$$

De los ejemplos que hemos desarrollado hasta el momento, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d(c)}{dt} &= 0 , \quad c = \text{constante} \\ \frac{d(t)}{dt} &= 1 , \\ \frac{d(t^2)}{dt} &= 2t . \end{aligned}$$

En general, se puede mostrar que

$$\frac{dt^\alpha}{dt} = \alpha t^{\alpha-1} ,$$

para todo número real α . Además,

$$\begin{aligned} \frac{d \sin t}{dt} &= \cos t , \\ \frac{d \cos t}{dt} &= -\sin t . \end{aligned}$$

Con estos resultados básicos, más las propiedades enunciadas de la derivada, se pueden encontrar las derivadas de muchísimas funciones. Consideremos, por ejemplo, $f(t) = A \cos \omega t$. Observando que A es un escalar, y que $f(t) = g(h(t))$, con $g(t) = \cos t$ y $h(t) = \omega t$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d(A \cos \omega t)}{dt} = A \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = A \left. \frac{d(\cos h)}{dh} \right|_{h=\omega t} \frac{dh}{dt} \\ &= A \cdot -\sin(h(t)) \frac{d(\omega t)}{dt} = A \cdot -\sin(h(t)) \omega \frac{d(t)}{dt} \\ &= -A\omega \sin(\omega t) , \end{aligned}$$

resultado consistente con lo obtenido en la Sec. 2.1.

En un gráfico de la función $f(t)$ en función de t , la expresión (*integral*)

$$A = \int_a^b f(t) dt$$

representa al área delimitada por la función $f(t)$ y el eje t entre $t = a$ y $t = b$ (ver figura).

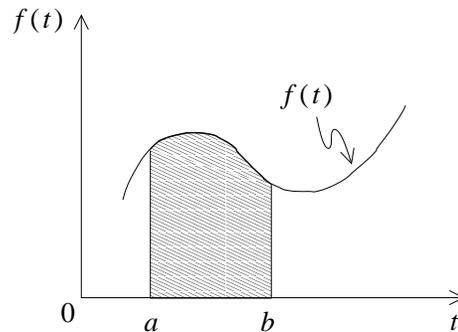


Figura 2.23

Propiedades:

a)
$$\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt .$$

b)
$$\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt .$$

c)
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt .$$

En muchos casos es posible evaluar la integral A analíticamente. Para ello, se debe encontrar una función $F(t)$ tal que su derivada sea la función que aparece tras el símbolo integral, o sea, tal que $dF(t)/dt = f(t)$. Entonces

$$A = \int_a^b f(t) dt = F(t) \Big|_a^b \equiv F(b) - F(a) .$$

En la Sec. 2.1 encontramos ejemplos inmediato de esto. En efecto, $v(t) = dx(t)/dt$, de modo que

$$\int_a^b v(t) dt = x(t) \Big|_a^b = x(b) - x(a) ,$$

que no es sino el resultado ya conocido de que la integral de la velocidad es el desplazamiento.

Usando las derivadas de funciones ya conocidas, podemos escribir algunas integrales útiles:

$$\begin{aligned} \int_a^b t^\alpha dt &= \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b , \quad \alpha \neq -1 , \\ \int_a^b \sin t dt &= -\cos t \Big|_a^b , \\ \int_a^b \cos t dt &= \sin t \Big|_a^b . \end{aligned}$$

2.5. Problemas

- Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación $z(t) = -a_0 \cdot (t - t_0)^2 + z_0$, con $z_0 = 125$ m, $t_0 = 5$ s y $a_0 = 5$ m/s².
 - Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 12$ s.
 - ¿En qué instante choca el proyectil contra el suelo?
 - Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes $t=0$ s, $t=2$ s, $t=4$ s, $t=6$ s, $t=8$ s y $t=10$ s. Grafique su resultado.
- Un conductor maneja su coche 10 km a una velocidad de 90 km/h y luego otros 10 km a 70 km/h. ¿Cuál es la rapidez promedio durante el trayecto de 20 km? (La respuesta no es 80 km/h.)

3. La figura 2.12 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. Encuentre la velocidad promedio durante los siguientes intervalos de tiempo:

a) $0 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$

b) $7 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$

c) $0 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$ (Respuesta: $\langle v \rangle = -0.154 \text{ m/s}$)

d) $10 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$

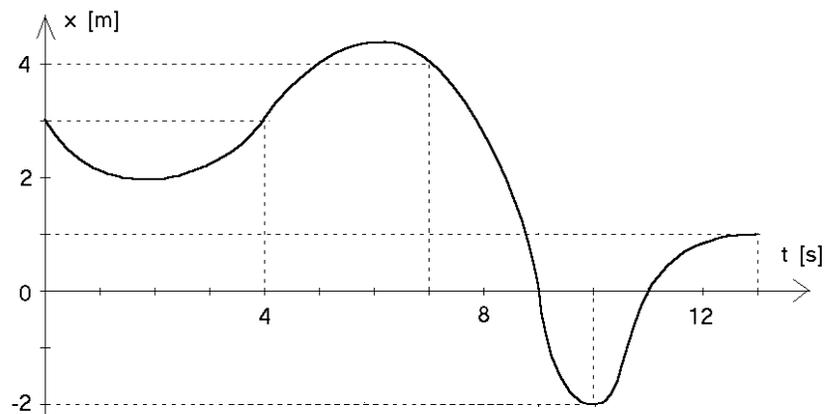


Figura 2.12

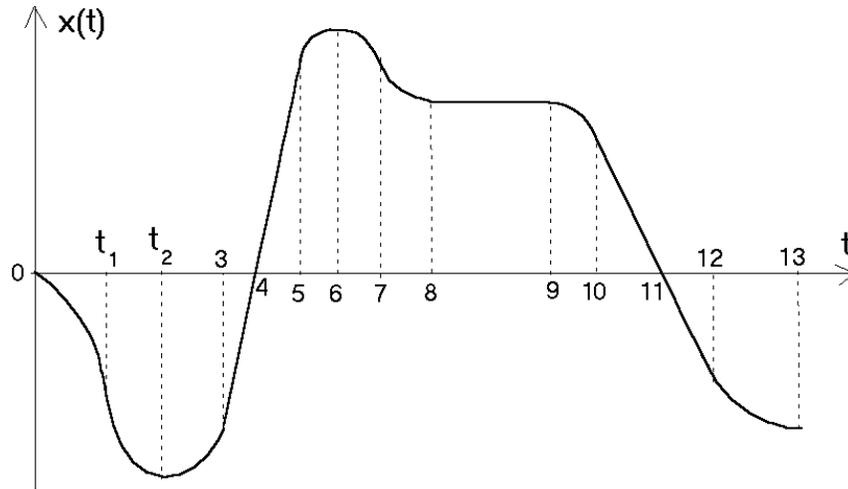


Figura 2.13

4. La figura 2.13 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. ¿En qué instantes o en qué intervalos de tiempo
- la velocidad (instantánea) es cero?
 - la velocidad es positiva?
 - la velocidad es negativa?
 - el módulo de la velocidad es máximo?
 - la velocidad es constante?
 - la aceleración es negativa?
5. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo viene dada por

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

- Grafique $z(t)$ en el intervalo de tiempo $-4 < t < +4$.
- Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

Grafique $v(t)$.

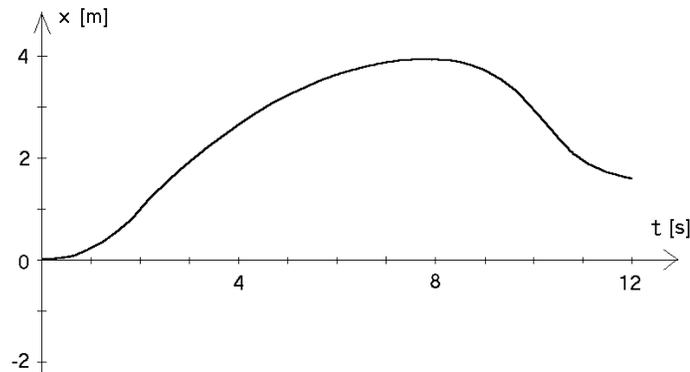


Figura 2.14

6. La figura 2.14 muestra la posición de una partícula en función del tiempo.
- Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $2 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$.
 - Encuentre la velocidad instantánea para $t = 10 \text{ s}$.
 - ¿En qué instante o instantes la velocidad (instantánea) de la partícula es nula?
 - ¿En qué instante la rapidez es máxima?
 - ¿En qué instante la aceleración es nula?
7. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo viene dada por

$$z(t) = t - 4 \cos t .$$

- Grafique $z(t)$ en el intervalo de tiempo $0 < t < +6$.
- A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:
 - ¿En qué instante la velocidad es nula?
 - ¿En qué instantes la partícula se encuentra en el origen?
 - ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
 - ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?
- Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} .$$

- Grafique $v(t)$ encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:
 - ¿En qué instante la velocidad es nula?

- 2) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
 3) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?
 (Compare las respuestas con las de la parte b)).
8. La figura 2.15 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.
 ¿En qué instantes o en qué intervalos de tiempo:

- a) La velocidad es cero?
 b) La velocidad es constante?
 c) La velocidad es positiva?
 d) La aceleración es nula?
 e) La aceleración es positiva?
 f) El módulo de la velocidad es máximo?
 g) El módulo de la aceleración es máximo?
 h) ¿Cuál es la distancia que recorre la partícula entre $t = 2$ s y $t = 4$ s?
 i) Si en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen (es decir, si $s(0) = 0$), haga un gráfico aproximado del desplazamiento $s(t)$.
 j) Haga un gráfico aproximado de $s(t)$ si $s(0) = -4$ m.

Respuestas: a) En $t = 2$ s y $t = 8.5$ s; b) A partir de $t = 10$ s, se podría decir también que en el instante $t = 6$ s la velocidad es constante; c) Entre $t = 2$ s y $t = 8.5$ s; d) Misma respuesta de la parte b); e) Entre $t = 0$ s y $t = 6$ s; f) En $t = 6$ s; g) Entre $t = 7$ s y $t = 9$ s; h) Entre $t = 2$ s y $t = 4$ s la velocidad media es de 1 m/s, luego la distancia recorrida es de 2 m (note que esto coincide con el área bajo la curva).

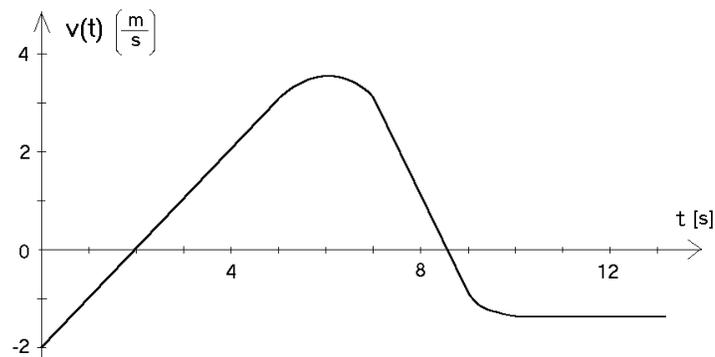


Figura 2.15

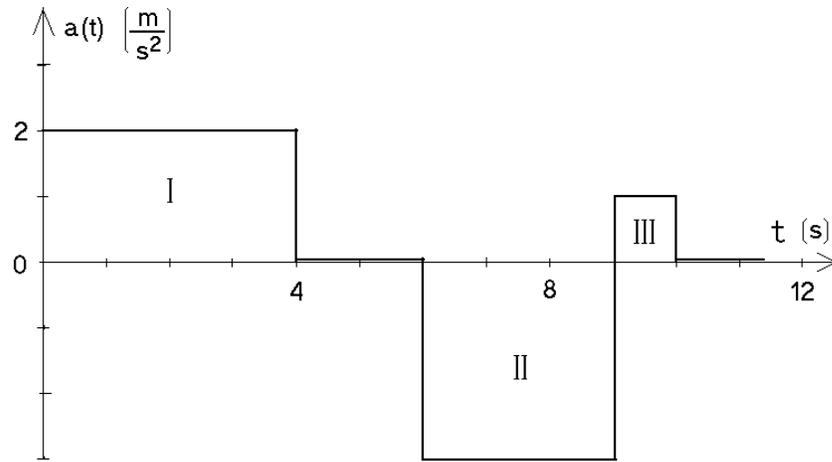


Figura 2.16

9. La figura 2.16 muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo.
- Si en el instante $t = 0$ s la partícula está en reposo, encuentre la velocidad de la partícula en cada instante. ¡Grafique!
 - Calcule el tamaño de las áreas I, II y III. ¿Qué unidades tienen? ¿Qué relación hay entre estas áreas y la parte a) de este problema?
 - Repita lo hecho en la parte a), pero suponiendo que en el instante $t = 0$ la partícula tiene una velocidad $v_0 = -8$ m/s. ¡Grafique!
10. En cada una de las siguientes expresiones para la posición $s(t)$ de una partícula, encuentre una expresión analítica para la velocidad instantánea:
- $s(t) = at^2 + bt + c$
 - $s(t) = at^\alpha$
 - $s(t) = a \cos(\omega t + \beta)$
- En las ecuaciones anteriores a , b , c , ω , α y β son constantes.
11. Para cada una de las siguientes expresiones para la aceleración $a(t)$ de una partícula (a en m/s^2 y t en s), encuentre la expresión más general para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.
- $a(t) = a_0$
 - $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$

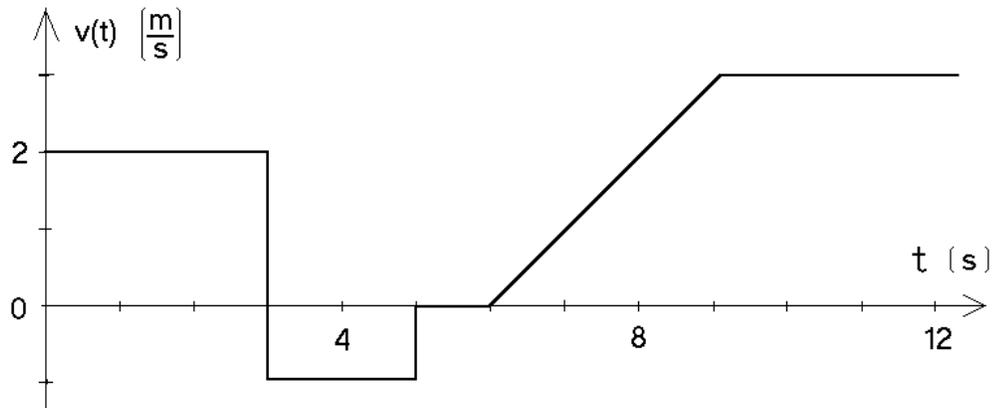


Figura 2.17

En las expresiones anteriores, a_0 y ω son constantes.

12. Un observador suelta una piedra desde el techo de un edificio. El sonido de la piedra chocando contra el suelo se escucha después de $t_0 = 6$ s.
- Si la velocidad del sonido es $c = 340$ m/s, encuentre la altura del edificio. (Ignore los efectos del roce del aire, que en la práctica, para este problema, no son despreciables.)
 - Demuestre que si $gt_0/c \ll 1$, entonces la altura del edificio viene aproximadamente dada por

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 \left(1 - \frac{gt_0}{c}\right).$$

13. Dos trenes A y B , inicialmente separados por una distancia de 13 km, viajan hacia su encuentro a una velocidad de 30 km/h. Desde A parte una paloma mensajera que tarda 10 minutos en llegar al tren B . Calcule la velocidad con que vuela la paloma respecto al tren A . Resuelva el problema en forma gráfica y luego en forma analítica.
14. La figura 2.17 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.
- Si en el instante $t = 0$ s la partícula se encuentra en el origen (es decir, $x(0) = 0$), encuentre la posición de la partícula en cada instante. Grafique.
 - Repita lo hecho en la parte a), pero suponiendo que en el instante $t = 0$ se tiene $x(0) = -3$ m.

15. Desde un puente de 60 m de altura se deja caer una piedra. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo 1 s más tarde. Ambas piedras llegan al suelo simultáneamente. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la segunda piedra? (Desprecie el roce del aire.)
16. Un cohete se dispara verticalmente, subiendo con aceleración constante de 20 m/s^2 respecto a la plataforma de lanzamiento durante 1 minuto. En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.
- ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?
 - ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despega hasta volver a caer sobre la plataforma?
 - Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.
17. Panchito deja caer una pelota desde una altura h . La pelota, cada vez que choca contra el suelo, rebota con una rapidez igual a aquélla con la cual llegó al suelo multiplicada por α , donde α es una constante $0 < \alpha < 1$. Encuentre:
- La altura que alcanza la pelota después del primer rebote.
 - La altura que alcanza después del segundo rebote.
 - La altura que alcanza después del k -ésimo rebote.
 - La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el k -ésimo rebote.
 - La distancia total recorrida por la pelota hasta que se detiene (tome $k \rightarrow \infty$ en la expresión anterior).

Respuestas: c) $\alpha^{2k}h$; d) $h + 2h\alpha^2 \frac{\alpha^{2(k-1)} - 1}{\alpha^2 - 1}$.

18. Un automovilista pasa a exceso de velocidad frente a un retén policial. 5 minutos más tarde sale en su persecución un policía motorizado a una velocidad de 120 km/h. Después de 40 minutos, el policía da alcance al infractor. ¿Cuál era la velocidad del infractor?
19. Consideremos el movimiento de una esfera en un medio viscoso (en ausencia de fuerzas gravitacionales). La aceleración que sufre la esfera es proporcional a su velocidad, pero en dirección contraria, es decir $\vec{a}(t) = -\eta\vec{v}(t)$, donde η es una constante. Supongamos que $\eta = 0.01 \text{ s}^{-1}$ y la velocidad inicial de la esfera es $|\vec{v}_0| = 50 \text{ m/s}$. Encuentre numéricamente la distancia $s(t)$ recorrida por la esfera

y grafíquela. Para resolver el problema note que, si Δ es un pequeño intervalo de tiempo, entonces

$$\begin{cases} v(t + \Delta) \simeq v(t) + a(t) \Delta \\ s(t + \Delta) \simeq s(t) + v(t) \Delta \end{cases} .$$

20. Considere dos varillas muy largas: una fija horizontalmente y la otra formando un ángulo ϕ constante con la primera, y moviéndose verticalmente con rapidez v_0 constante (ver figura 2.18). Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas (tal punto de intersección no corresponde al movimiento de algún objeto físico real).

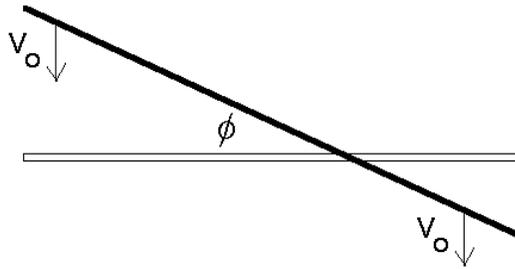


Figura 2.18

21. Un pasajero corre con velocidad de 4 m/s para alcanzar un tren. Cuando está a una distancia d de la portezuela más próxima, el tren comienza a moverse con una aceleración constante $a=0.4$ m/s², alejándose del pasajero.
- Si $d=12$ m y el pasajero sigue corriendo, ¿alcanzará a subirse al tren? En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo tarda en hacerlo, desde que el tren comienza a moverse?
 - Haga un gráfico de la función $x_t(t)$ del tren. En el mismo gráfico dibuje la función $x_p(t)$ correspondiente al pasajero para diversos valores de la distancia de separación d . Encuentre el valor crítico d_c para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.
 - Para la separación crítica d_c , ¿cuál es la velocidad del tren cuando el pasajero lo alcanza?
22. Desde un edificio se lanza una piedra A con una velocidad inicial vertical hacia abajo $v_0 = 30$ m/s. Desde el suelo, al pie del edificio y en el mismo instante, se lanza una piedra B hacia arriba. Las dos piedras chocan a una altura $h = 30$ m,

siendo en ese instante la rapidez de ambas piedras la misma. Encuentre el tiempo que transcurre entre el lanzamiento y la colisión. (Use para g el valor 10 m/s^2 .)

Respuesta: $t = \sqrt{3} - 1 \text{ s}$.

23. Considere un avión de pasajeros cuya velocidad de aterrizaje es de unos 400 km/h . Suponga que la desaceleración del avión es uniforme. Encuentre el valor que debe tener ésta para que el avión llegue al reposo en una pista de 1200 m .

Respuesta: $a = 5,15 \text{ m/s}^2$

24. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R ?

25. En Paine un agricultor tiene la posibilidad de realizar una (y sólo una) exportación de sandías de su plantación. Al comienzo de la temporada el precio es bueno, pero la producción no es grande. En efecto, al comienzo tiene 6 toneladas para vender y el precio es de $\$40.000/\text{ton}$. Por cada día que demore la exportación puede exportar 0.5 toneladas adicionales; sin embargo, el precio disminuye en aproximadamente $\$800/\text{ton}$. ¿Cuánto tiempo debería esperar para realizar la exportación si desea maximizar las entradas?

Respuesta: 19 días.

26. A partir de un tronco de 27 cm de diámetro se desea aserrar una viga de sección rectangular que tenga la mayor resistencia posible. La resistencia de una viga horizontal apoyada en sus extremos, en primera aproximación, es proporcional al ancho y proporcional al cuadrado de su altura. ¿Cuáles serán las dimensiones de la viga?

27. Un salvavidas ubicado en el punto A en una playa debe socorrer a un nadador ubicado en el punto B (ver figura 2.19). La velocidad con que puede correr el salvavidas en la arena es v_1 y la velocidad con que avanza en el agua es v_2 . Sea P el lugar óptimo en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para que tarde el menor tiempo posible en el trayecto de A a B . Demuestre que en ese caso se satisface

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} .$$

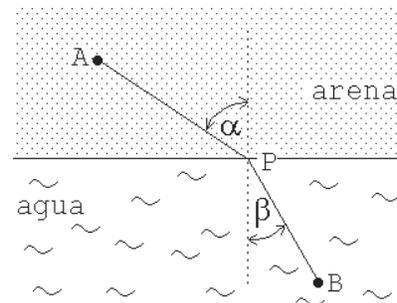
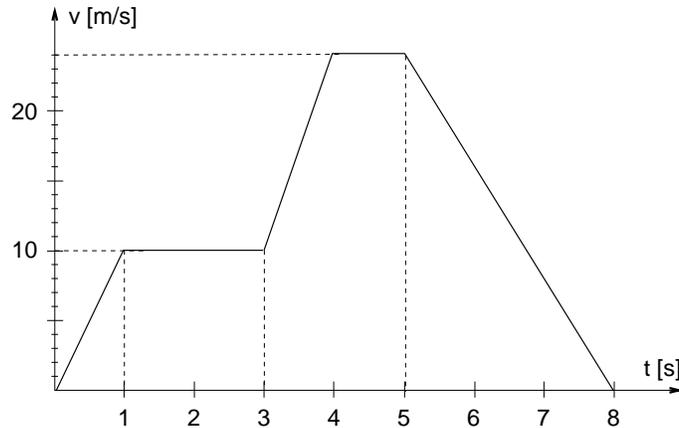


Figura 2.19

Notemos que esta expresión es análoga a la ley de Snell para la refracción de un rayo de luz.

28. ¿Qué dimensiones (interiores) tiene un recipiente cilíndrico, cuya capacidad es de un litro, si la forma se ha elegido de tal manera que en su confección se use la menor cantidad de material posible?
29. Considere cierto objeto A que se mueve a lo largo del eje \hat{x} tal como se describe a continuación:
- i) En el instante $t = 0$ se encuentra en $x_0 = -4$ [m] y su velocidad es $v_0 = 2$ [m/s].
 - ii) Durante los primeros cuatro segundos la velocidad permanece constante.
 - iii) A partir del instante $t = 4$ [s], el objeto frena uniformemente hasta quedar con la mitad de la velocidad. Durante este proceso de frenado la partícula avanza 3 [m].
 - iv) Luego mantiene esa velocidad durante 2 [s].
 - v) Luego la partícula acelera (en sentido negativo) con una aceleración constante $a_0 = -2$ [m/s²] hasta que la velocidad sea $v_1 = -3$ [m/s].
 - vi) A continuación se desplaza con la velocidad v_1 hasta llegar a dos metros del punto de partida.
 - vii) Finalmente la partícula A frena uniformemente hasta quedar en reposo en el punto de partida ($x_0 = -4$ [m]).
- a) Haga un gráfico detallado de $x(t)$ y $v(t)$.
 - b) Encuentre la velocidad media de la partícula A entre los instantes $t = 6$ [s] y $t = 13$ [s].
 - c) ¿En qué instante el alejamiento desde el punto de partida es máximo y cuánto es ese alejamiento?
 - d) Un segundo móvil B parte en $t = 0$ desde el origen y se desplaza con velocidad constante $v_B = 1$ [m/s] a lo largo de la misma recta que A . Suponga que cuando los dos móviles se encuentran por primera vez, B se detiene. ¿En qué instante volverán a encontrarse?
30. Un malabarista desea hacer piruetas manteniendo en forma rotativa, con una mano, tres manzanas en el aire. Si el malabarista desea hacer lanzamientos cada 0,5 s, determine la altura a la cual usted le aconsejaría lanzar cada manzana.

31. Desde la altura H con respecto al piso se deja caer un macetero. En ese instante, y desde el primer piso, un ascensor acelera hacia arriba con aceleración αg ($\alpha < 1$). Si el ascensor tiene una altura h ($h < H$) y parte del reposo, calcule el tiempo que demora el macetero en pasar desde el techo al piso del mismo. Para no hacer trágica la situación, suponga que la trayectoria (recta) del macetero pasa al lado del ascensor.
32. Dos móviles A y B (puntuales) están restringidos a moverse sobre el eje x de cierto sistema de coordenadas. Inicialmente A se desplaza a 10 m/s , mientras que B se encuentra en reposo en el origen del sistema de coordenadas. En $t = 0$ cuando A se encuentra en $x_A = 100 \text{ m}$, el móvil B comienza a ser uniformemente acelerado en la dirección positiva del eje x con aceleración $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$. Este movimiento continúa hasta que B se encuentra a 22 m de A . Entonces B deja de acelerar y simultáneamente envía un mensaje al móvil A , que demora $0,5 \text{ s}$ en llegar a destino. Tan pronto A recibe el mensaje, se detiene.
- ¿Cuál es la velocidad c con que se propaga el mensaje entre A y B ? Suponga que la velocidad con que viaja el mensaje es constante.
 - ¿Cuál es la velocidad de B en el instante en que envía el mensaje?
 - ¿Cuál es el desplazamiento de B entre $t = 0$ y el instante en que choca con A ?
 - ¿Cuál es la velocidad media de B entre $t = 0$ y el instante en que choca con A ?
33. Un móvil describe un movimiento rectilíneo. En la figura se muestra su velocidad en función del tiempo. Sabiendo que en el instante $t = 0$ el móvil está en $x = 0$:
- Grafique su aceleración en función del tiempo.
 - Calcule el desplazamiento total del móvil hasta el instante $t = 8 \text{ s}$.
 - Escriba la expresión de la posición $x(t)$ en función del tiempo, entre los tiempos $t = 1 \text{ s}$ y $t = 3 \text{ s}$, y desde $t = 3 \text{ s}$ a $t = 4 \text{ s}$.
 - Encuentre la aceleración media entre $t = 1 \text{ s}$ y $t = 8 \text{ s}$.



34. Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo viene dada por

$$z(t) = \frac{t}{1 + \cos^2 t}.$$

- a) Grafique $z(t)$ en el intervalo de tiempo $-10 < t < +10$.
 b) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

Grafique $v(t)$.

35. Repita el problema anterior, pero para la función

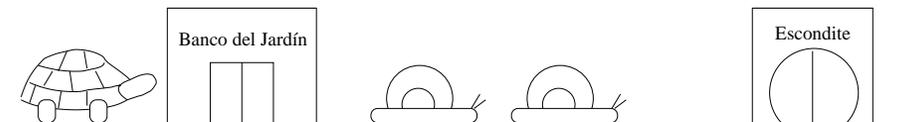
$$z(t) = \frac{\sin t}{1 + t^2}.$$

36. Dos caracoles de mala clase asaltaron el Banco del Jardín, justo antes de que lo cerraran. Una vez perpetrado el delito, justo a las 14.00 hrs., se lanzaron en una loca carrera hacia su escondite (ver figura). El caracol líder avanzaba con una velocidad de 10 cm/min, y su cómplice a 8 cm/min.

A las 14.05 hrs., al percatarse de los hechos, una tortuga se abalanzó sobre los malhechores, partiendo desde el Banco y desde el reposo, con una aceleración de 0.8 cm/min^2 . Tras una vertiginosa persecución, la tortuga da alcance al caracol cómplice, y le ordena al otro: “¡Deténgase!” El caracol líder desacelera inmediatamente, deteniéndose al cabo de 30 cm.

- a) ¿A qué hora alcanza la tortuga al caracol cómplice?
 b) ¿A qué distancia del Banco se encuentran la tortuga y los caracoles cuando aquélla da alcance al caracol cómplice?

- c) ¿Qué aceleración tiene el caracol líder luego de que la tortuga le ordena detenerse?
- d) ¿A qué hora se detuvo el caracol líder?
- e) Represente, en un mismo gráfico, la posición de ambos caracoles y la tortuga como función del tiempo.



Asalto al Banco del Jardín

Sugerencia: Puede serle útil, para determinar la solución con sentido físico, estudiar el límite $t_0 \rightarrow 0$, donde t_0 es la diferencia de tiempo entre la salida de los caracoles y la tortuga.

37. Considere un móvil A que se desplaza a lo largo de una recta. De este móvil se sabe lo siguiente:
- En el instante $t = 0$ se encuentra a -4 m del origen, o sea, $x(0) = -4$ m.
 - Entre $t = 0$ y $t = 3$ s se mueve con velocidad constante $v = 2$ m/s.
 - A partir de $t = 3$ s el móvil frena uniformemente durante 2 s hasta quedar en reposo (en $t = 5$ s).
 - Entre $t = 5$ y $t = 7$ s el móvil se mantiene en reposo.
 - Finalmente, a partir de $t = 7$ s el móvil acelera uniformemente hasta adquirir una velocidad final $v_f = -6$ m/s. Durante este último proceso de aceleración, el móvil A se desplaza -9 m.

Usando la información anterior:

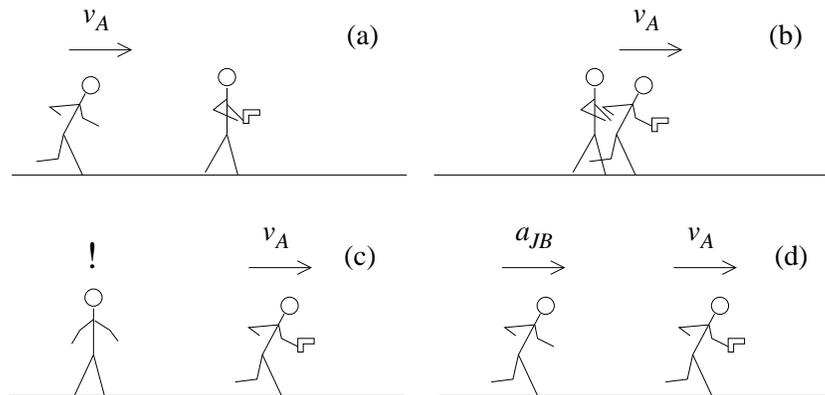
- Haga un gráfico de la velocidad del móvil en función del tiempo.
- Haga un gráfico de la posición en función del tiempo.
- Determine la velocidad media del móvil entre los instantes $t = 2$ y $t = 7$ s.
- Determine la distancia recorrida por el móvil A entre $t = 3$ y $t = 4$ s.
- Suponga que un segundo móvil B , que se mueve con velocidad constante, se encuentra con el móvil A en los instantes $t = 3$ y $t = 6$ s. Determine la posición que el móvil B tenía en el instante $t = 0$.

38. El rodaje de la última película de James Bond había causado gran expectación entre los habitantes de un pequeño pueblito en el norte de Chile. Pero aunque la mitad del pueblo estaba emocionado con la perspectiva de aparecer en una gran producción de Hollywood, la otra mitad, encabezada por el alcalde, protestaba porque el pueblo aparecería en la película con otro nombre, y ni siquiera aparecería como chileno. El alcalde, encendido nacionalista, decidió tomar cartas en el asunto y protestó oficialmente ante la producción de la película, pero nadie lo tomó muy en serio.

Contrariado por su fracaso, el alcalde se presentó de improviso en la filmación, justo cuando Daniel Craig, caracterizado como el agente secreto, caminaba por una calle durante una toma. El alcalde, dispuesto a todo, rompió el cerco de seguridad y corrió hacia Bond, arrebatándole su arma de utilería. Bond, sorprendido, se detuvo, limitándose a ver cómo el alcalde se alejaba de él con velocidad constante v_A . Sólo después de un tiempo T Bond reaccionó, y comenzó a acelerar con aceleración constante a_{JB} .

¿Durante cuánto tiempo debe acelerar Bond, James Bond, para alcanzar al alcalde?

¿Cuánta distancia alcanza a recorrer el alcalde después de arrebatarse el arma, antes de ser alcanzado por Bond, James Bond?



39. Dos partículas A y B que se mueven en movimiento unidimensional parten desde el origen. La partícula A parte en $t = 0$ con velocidad $v_A = 10$ m/s. La partícula B parte un segundo después con velocidad $v_B = -10$ m/s. Ambas partículas desaceleran con aceleración $a = 6$ m/s². Determine la máxima distancia entre ellos antes de que se crucen.

2.6. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 19

Sea x la dirección a lo largo de la cual ocurre el movimiento y denotemos, respectivamente, con $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ a la posición, velocidad y aceleración que tiene la partícula en el instante t . Las condiciones iniciales son $s(0) = 0$ y $v(0) = 50$ m/s.

Conociendo $s(0)$, $v(0)$ podemos encontrar $a(0)$. En efecto $a(0) = -\eta v(0)$.

Usando las expresiones

$$\begin{cases} v(t + \Delta) \simeq v(t) + a(t) \Delta \\ s(t + \Delta) \simeq s(t) + v(t) \Delta \end{cases} \quad (*) .$$

y eligiendo cierto valor pequeño para Δ , podemos encontrar $s(\Delta)$ y $v(\Delta)$.

Conociendo $s(\Delta)$ y $v(\Delta)$ podemos encontrar $a(\Delta)$. En efecto $a(\Delta) = -\eta v(\Delta)$.

Usando nuevamente las relaciones (*) (pero ahora con $t = \Delta$), podemos encontrar $s(2\Delta)$ y $v(2\Delta)$, y a partir del último también $a(2\Delta)$. Etc...

Todo el proceso anterior se puede automatizar. En la próxima página se presenta un programa en QUICKBASIC (para un PC compatible) que resuelve numéricamente el problema y grafica los resultados en la pantalla del computador.

Al resolver numéricamente el problema, repita el cálculo con distintos valores de Δ y observe como el resultado no depende de este parámetro cuando Δ es lo suficientemente chico. También repita el cálculo para distintos valores de η y analice como este parámetro afecta al resultado.

```

CLS                                'LIMPIA PANTALLA
SCREEN 12                          'ELIGE SUPERVGA COLOR
VIEW (160, 20)-(580,310)          'DEFINE AREA DE TRABAJO
TMIN = 0                           'MINIMO DE ABSISA
TMAX = 500                         'MAXIMI DE ABSISA
YMIN = 0                           'MINIMO DE ORDENADA
YMAX = 6000                       'MAXIMO DE ORDENADA
WINDOW (TMIN, YMIN)-(TMAX, YMAX)  'FIJA VALORES ANTERIORES
LINE (TMIN, YMIN)-(TMAX, YMAX), , B 'GRAFICA EJES (CAJA)
FOR I = 0 TO 6
  YP = I * 1000                   'EVALUA POSICION DE TIC
  PSET (TMIN, YP)                 'POSICIONA EL LAPIZ EN ORDENADA (IZQ)
  DRAW "R8"                       'GRAFICA TIC
  PSET (TMAX - 10, YP)            'POSICIONA EL LAPIZ EN ORDENADA (DER)
  DRAW "R8"                       'GRAFICA TIC
NEXT I
LOCATE 2, 17                      'POSICIONA LAPIZ
PRINT "60"                        'IMPRIME 60 EN ORDENADA IZQUIERDA
LOCATE 2, 74                      'POSICIONA LAPIZ
PRINT YMAX                        'IMPRIME EN ORDENADA DERECHA
LOCATE 2, 18                      'POSICIONA LAPIZ
PRINT "0"                         'IMPRIME
LOCATE 20, 74                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT YMIN                       'IMPRIME
LOCATE 11, 17                   'POSICIONA LAPIZ
PRINT "30"                       'IMPRIME
LOCATE 11, 76                   'POSICIONA LAPIZ
PRINT "X"                        'IMPRIME LEYENDA DE ORDENADA DERECHA
LOCATE 2, 13                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT "V"                        'IMPRIME LEYENDA DE ORDENADA IZQUIERDA
FOR I = 0 TO 10
  XP = TMIN + I * (TMAX - TMIN) / 10 'EVALUA POSICION DE TICS DE ABSISA
  PSET (XP, YMIN)                'POSICIONA LAPIZ
  DRAW Ü5"                       'GRAFICA TIC
NEXT I
LOCATE 21, 20                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT TMIN                       'IMPRIME
LOCATE 21, 71                   'POSICIONA LAPIZ
PRINT TMAX                       'IMPRIME
LOCATE 23, 44                   'POSICIONA LAPIZ
PRINT "TIEMPO"                  'IMPRIME LEYENDA DE ABSISA
DT = 1                          'SE ELIGE DT
T = 0                            'TIEMPO INICIAL
X = 0                            'POSICION INICIAL
V = 40                           'VELOCIDAD INICIAL
ETA = 0.01                      'SE FIJA PARAMETRO DE FRICCION
TF = 500                         'TIEMPO FINAL
LOCATE 1, 36                    'POSICIONA LAPIZ
PRINT "DT="; DT; ".ETA="; ETA;  'IMPRIME TITULO
10 T = T + DT                    'EL CALCULO EMPIEZA AQUI !!
IF T >TF THEN STOP              'SE INCREMENTA EL TIEMPO
A = -ETA * V                     'SI T>TF EL CALCULO TERMINA
X = X + V * DT                  'EVALUACION DE LA ACELERACION
V = V + A * DT                 'NUEVA POSICION
PSET (T, X), 12                 'NUEVA VELOCIDAD
PSET (T, V * 100), 14          'GRAFICA PUNTO (T,X)
GOTO 10                          'GRAFICA PUNTO (T,V)

```

Solución al problema 27

Los tiempos t_1 , que el salvavidas tarda para correr de A a P y t_2 , que tarda para nadar de P a B vienen dados por

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + z_a^2}}{v_1} .$$

y

$$t_2 = \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}}{v_2} .$$

Por lo tanto, el tiempo total que tarda en ir de A a B es

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + z_a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}}{v_2} .$$

En la expresión anterior L , z_a y z_b son fijos; el valor de x se debe determinar de manera que T sea mínimo.

Encontrar el mínimo de T en función de x es equivalente a encontrar los ceros de la función derivada dT/dx :

$$\frac{dT(x)}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(x+\epsilon) - T(x)}{\epsilon} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + z_a^2}} - \frac{(L-x)}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} .$$

La derivada tiene ceros si

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + z_a^2}} = \frac{(L-x)}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} .$$

Pero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + z_a^2}} = \sin \alpha$$

y

$$\frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + z_b^2}} = \sin \beta ,$$

luego, $T(x)$ tiene un extremo en función de x cuando

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} .$$

No es difícil convencerse que tal extremo corresponde a un mínimo (y no a un máximo).

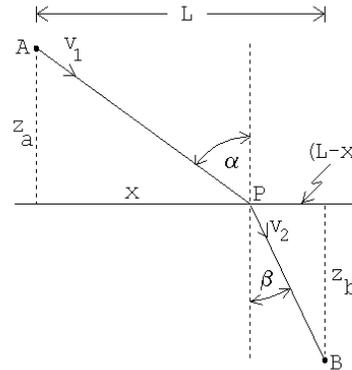


Figura 2.20

Solución al problema 29

a) Implícitamente supondremos que las distancias estarán expresadas en metros, el tiempo en segundos, las velocidades en m/s y las aceleraciones en m/s^2 . De acuerdo al enunciado se tiene:

$$\text{Punto de partida: } x(0) = -4, v(0) = 2$$

Entre $t = 0$ y 4 , $v(t) = 2$, lo que corresponde a una línea horizontal en el gráfico v en función de t (ver figura 2.21).

Entre $t = 0$ y 4 se tiene una recta con pendiente 2 , en el gráfico $x(t)$ en función de t (ver figura 2.22). La posición en $t = 4$ es $x(4) = x(0) + v_0 \cdot 4 = -4 + 2 \cdot 4 = 4$.

A partir de $t = 4$, en el gráfico v en función de t , la velocidad estará representada por una recta hasta llegar a $v_0/2 = 1$. Durante el proceso de frenado que tarda hasta cierto instante \tilde{t} , la partícula avanza 3 metros, o sea, el área bajo la curva $v(t)$ entre $t = 4$ y \tilde{t} debe ser 3 . No es difícil darse cuenta de que \tilde{t} debe ser 6 .

La aceleración entre $t = 4$ y $t = 6$ es $a_1 = -0.5$ (es la pendiente en el gráfico 2.21).

De acuerdo al enunciado, la partícula avanza 3 metros durante el frenado, o sea, $x(6) = x(4) + 3 = 7$. El gráfico de $x(t)$, entre $t = 4$ y $t = \tilde{t} = 6$ será parabólico con curvatura negativa. Otra forma de encontrar la posición en $t = 6$ es usando la expresión $x(6) = x(4) + v(4) \cdot (6-4) + 0.5 a_1 \cdot (6-4)^2$, o sea, $x(6) = 4 + 2 \cdot 2 - 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2^2 = 7$.

De $t = 6$ hasta $t = 8$ (durante 2 segundos) la velocidad se mantiene constante. El gráfico de $v(t)$ es una recta horizontal con velocidad 1 .

El área bajo el gráfico $v(t)$ entre $t = 6$ y 8 nos da la distancia que A avanza en ese intervalo. Tal área es 2 , luego $x(8) = 7 + 2 = 9$. Durante este intervalo $x(t)$ es representado por una recta (velocidad constante).

Se tiene que $v(8) = 1$. La partícula desacelera con aceleración $a_0 = -2$ hasta que la velocidad sea -3 . Se observa inmediatamente que para ello debe desacelerar durante 2 segundos. Entonces $v(10) = v(8) + a_0 \cdot (10 - 8) = 1 - 2 \cdot (10 - 8) = 1 - 4 = -3$. Entre $t = 8$ y 10 el gráfico de $v(t)$ es una recta (aceleración constante).

Podemos encontrar la posición de la partícula en $t = 10$: $x(10) = x(8) + v(8) \cdot (10 - 8) + 0.5 a_1 \cdot (10 - 8)^2$, o sea, $x(10) = 9 + 1 \cdot 2 + 0.5 \cdot (-2) \cdot 2^2 = 7$.

En $t = 10$ la partícula se encuentra en $x(10) = 7$ y su velocidad es $v(10) = -3$. La partícula sigue a velocidad constante hasta llegar a dos metros del punto de partida (o sea, hasta llegar a -2 metros). La partícula, por lo tanto, deberá recorrer 9 metros. Con $v_1 = -3$ [m/s] tardará para ello 3 segundos. O sea, entre $t = 10$ y $t = 13$ la velocidad será constante (línea horizontal) en el gráfico v en función de t .

A partir de $t = 13$ la partícula frena uniformemente hasta quedar en reposo en el

punto de partida. El gráfico de $v(t)$ es por lo tanto una recta hasta cero. El área bajo la curva entre $t = 13$ y el instante en que queda en reposo debe ser -3 (la partícula A debe recorrer aún dos metros hacia la izquierda para llegar al punto de partida). Es claro que para ello tardará $4/3$ segundos.

Entre $t = 13$ y $t = 14, \bar{3}$, la partícula recorre -2 metros. El gráfico de $x(t)$ es una parábola curvada hacia arriba que llega a $t = 14, \bar{3}$ con pendiente nula.

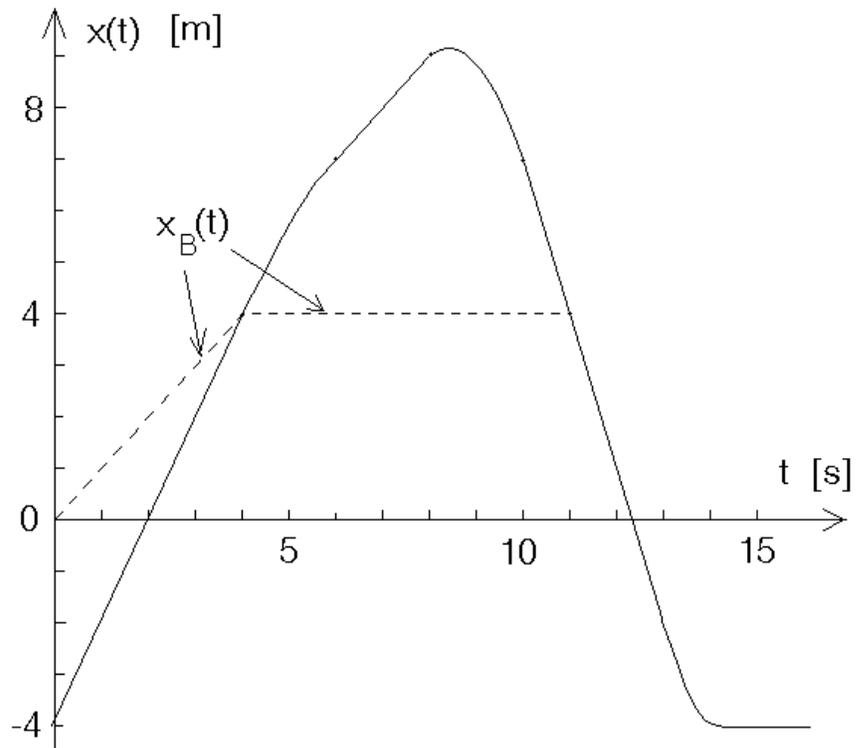


Figura 2.21

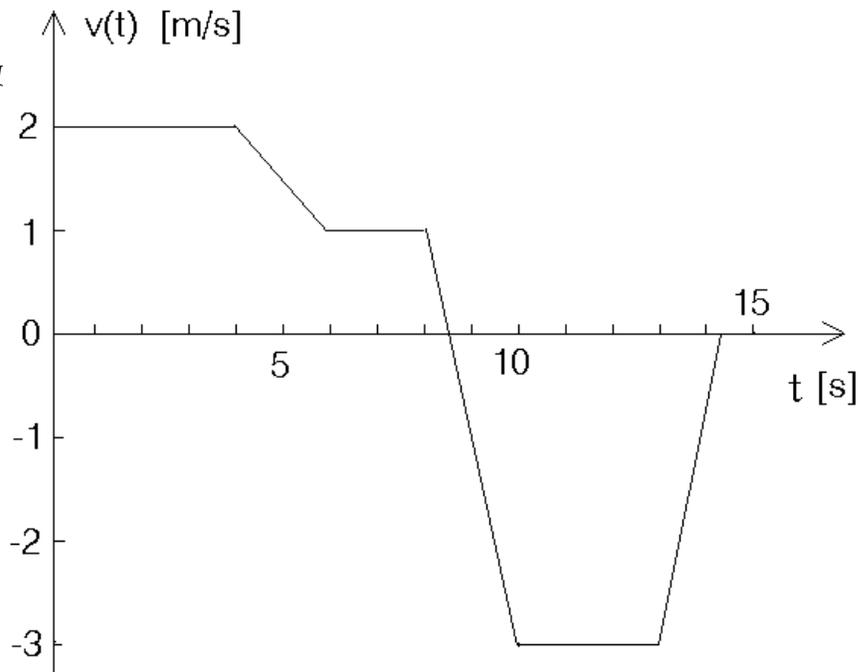


Figura 2.22

b) En $t = 6$ y $t = 13$ la partícula A se encuentra en $x(6) = 7$ y $x(13) = -2$, respectivamente. La velocidad media entre esos dos instantes es

$$\bar{v} = \frac{(-2) - 7}{13 - 6} = -9/7 \text{ m/s} .$$

c) En $t = 8$ la velocidad es 1 m/s . A partir de ese instante la partícula acelera con aceleración $a_0 = -2$, o sea, tarda 0.5 s para quedar temporalmente en reposo. En ese instante ($8,5 \text{ s}$) ocurre el alejamiento máximo. Se tiene

$$\begin{aligned} x(8,5) &= x(8) + v(8) \cdot (8,5 - 8) + \frac{1}{2} a_0 \cdot (8,5 - 8)^2 \\ &= 9 + 1 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 = 9,25 \text{ [m]} . \end{aligned}$$

d) Graficando $x_B(t)$ en la figura 2.21 se encuentra que los dos móviles se vuelven a encontrar en el instante $t = 11 \text{ s}$.

Solución al problema 30

Cada manzana debe tardar $t_0 = 3 \cdot 0,5 = 1,5$ segundos en subir y bajar. Al lanzar un objeto con velocidad v_0 hacia arriba tarda un tiempo v_0/g hasta llegar arriba y un tiempo igual hasta volver al punto de partida. Tenemos

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} = 1,5 \text{ [s]} .$$

Esta ecuación nos permite evaluar la velocidad con que se debe lanzar la manzana, $v_0 = t_0 g/2$.

La altura a la que llega es un objeto lanzado con velocidad v_0 es $h = v_0^2/(2g)$. Combinando las dos últimas ecuaciones se encuentra para h la expresión

$$h = \frac{1}{8} g t_0^2 .$$

Con $g \simeq 10$ [m/s²] se encuentra $h \simeq 3$ metros.

Solución al problema 32

- a) Cuando B envía el mensaje se encuentra a 22 m de A . El mensaje tarda 1/2 s en llegar a su destino. Durante ese intervalo el móvil A seguirá moviéndose desplazándose $10 \cdot 0,5 = 5$ metros. El mensaje deberá recorrer en 0,5 s una distancia de $(22+5)=27$ metros. La velocidad del mensaje será $c = 27/0,5 = 54$ [m/s].
- b) Las ecuaciones de movimiento de los móviles, para $0 < t$ y el instante en que B envía el mensaje (llamémoslo t_1), son

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A(0)t = 100 + 10 \cdot t$$

$$x_B(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} t^2$$

$$v_A(t) = v_A(0) = 100$$

$$v_B(t) = a_1 t = t .$$

(En las expresiones anteriores estamos suponiendo que los tiempos están dados en segundos, las distancias en metros, las velocidades en [m/s] y las aceleraciones en [m/s²].)

Sabemos que en $t = t_1$ la separación entre A y B es de 22 metros, o sea,

$$x_A(t_1) - x_B(t_1) = 100 + 10 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2 = 22 .$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para t_1 se encuentra que $t_1 = 10 \pm 16$. En el contexto del problema sólo la solución positiva tiene sentido, o sea, $t_1 = 26$ [s].

La velocidad de B en el instante t_1 es $v_B(t_1) = 26$ [m/s].

- c) Desde que B envía el mensaje hasta chocar con A , el móvil B debe recorrer una distancia de $22+5=27$ metros. En el instante t_1 se encuentra a $x_B(t_1) = (26)^2/2 = 338$ m del origen. La distancia total que B debe recorrer desde que parte del origen hasta que choca con A es $(338+27)=365$ m.

- d) Desde que B envía el mensaje hasta chocar con A , el móvil B debe recorrer una distancia de $22+5=27$ metros. Como su velocidad (a partir de t_1) es de 26 m/s, tardará $27/26$ segundos. El tiempo total, desde que B parte del origen hasta que choca con A es $(26+27/26)$ s. Para la velocidad media de B se encuentra

$$\bar{v} = \frac{365}{26 + \frac{27}{26}} \simeq 13,5 \text{ [m/s]} .$$

Capítulo 3

Cinemática en dos y tres dimensiones

versión 29 junio 2010

En este capítulo extenderemos la descripción del movimiento de una partícula a dos y tres dimensiones. Esto nos lleva a introducir el concepto de vector, cuya definición y propiedades ilustraremos con los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración.

3.1. Vectores

Para movimientos en una dimensión, basta un número para describir completamente la posición de una partícula, a saber, la distancia entre dicho punto y el origen. Como el eje es orientado, el signo de dicho número indica si la partícula está a la derecha o a la izquierda del origen, y ésta es toda la información que necesitamos.

Cuando el movimiento es en más dimensiones, no basta un número. Si deseamos indicar completamente la posición de, digamos, Valparaíso respecto a Santiago, necesitamos indicar no sólo la distancia que los separa, sino alguna indicación de *en qué dirección* se encuentra desde Santiago. Si imaginamos entonces una flecha cuyo origen está en Santiago, y su punta está en Valparaíso, esa flecha tiene toda la información necesaria para llegar de una ciudad a la otra.

Esta flecha corresponde a un *vector*. Un vector será una entidad que no solamente tiene magnitud, sino también dirección. Decimos entonces que la posición de una partícula es un vector. En este capítulo y los siguientes encontraremos diversas cantidades físicas para cuya descripción completa no basta sólo un número, sino además una dirección (la velocidad, por ejemplo; su dirección es importante: puede hacer la diferencia entre una colisión entre dos vehículos o no). Otras cantidades, en cambio, pueden ser descritas con sólo un número: la masa de una partícula, por ejemplo; o la cantidad de libros en nuestra biblioteca. A dichas cantidades las llamamos *escalares*.

Un vector se denota con una flecha: \vec{A} . Se denomina *módulo* del vector \vec{A} a la longitud de la flecha que lo representa, y se le denomina $|\vec{A}|$, o simplemente A .

Si bien es cierto la imagen geométrica de un vector como una flecha es suficiente, necesitamos, para analizar el movimiento, ser más precisos. Introduciremos, entonces, igual como lo hicimos en el Capítulo anterior, un origen y ejes coordenados.

Consideremos el movimiento de una partícula en un plano. La posición de la partícula podrá ser claramente especificada si se introduce un sistema de ejes perpendiculares que se intersectan en un punto, que llamaremos el “origen” (ver figura 3.1).

Por ejemplo, el punto P en la figura 3.1 se encuentra a 3 m a la derecha del origen, medidos a lo largo de la dirección del eje x , a 2 m sobre el origen, medidos a lo largo del eje y . En general, la posición de un punto cualquiera queda determinada dando un *par ordenado* (x, y) de números, en el sentido que *siempre* el primer número corresponderá a la proyección sobre el eje \hat{x} y el segundo número a aquélla sobre el eje \hat{y} .

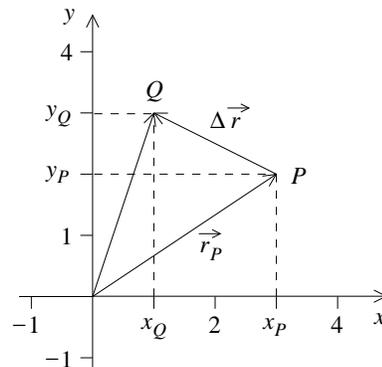


Figura 3.1

El trazo que une el origen O con el punto P , en el sentido que indica la punta de flecha en la figura 3.1, se denomina el *vector de posición* \vec{r}_p del punto P . La magnitud de este vector es igual a la longitud del trazo OP y se denota por $|\vec{r}_p|$ o simplemente como r_p (sin flecha).

La descripción de un vector como un par ordenado es equivalente a su descripción como una flecha, pero sirven propósitos distintos. Es la misma diferencia entre hacer Geometría Euclidiana (en que una recta, por ejemplo, es un objeto geométrico tal que pasa por dos puntos dados; para construir una recta no necesitamos otra cosa que lápiz y papel) y Geometría Analítica (en que una recta es el conjunto de puntos que satisface una ecuación del tipo $y = mx + n$, de modo que además de lápiz y papel necesitamos un par de ejes coordenados respecto a los cuales medir x e y .)

Es importante notar que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y que apuntan en la misma dirección. En la Fig. 3.2 se muestra un conjunto de vectores iguales, dibujados en diferentes posiciones del plano $x-y$.

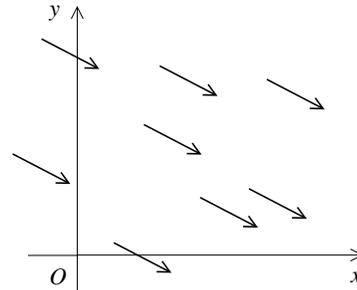


Figura 3.2

Supongamos ahora que la partícula en un instante t se encuentra en P y en un instante posterior $t' > t$ se encuentra en el punto Q (ver figura 3.1). El vector que une el origen O con Q es el nuevo vector de posición de la partícula. Llamémoslo \vec{r}_Q . Por analogía al caso unidimensional, deberíamos definir el *vector desplazamiento* a la diferencia entre los dos vectores posición, $\vec{r}_Q - \vec{r}_P$. Pero entonces vemos que, para describir el movimiento, necesitamos definir la resta (es decir, en general, la suma) entre vectores. Por ahora podemos decir que, en el caso de la Fig. 3.1, el *vector desplazamiento* corresponde al vector conformado por el trazo PQ y cuyo sentido va desde P hacia Q , y corresponde precisamente a $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_Q - \vec{r}_P$. Pero para formalizar este hecho necesitamos definir antes la suma de vectores y estudiar sus propiedades.

Suma de vectores

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores. Traslademos paralelamente a sí mismo al vector \vec{B} hasta que su extremo romo se superponga con el extremo aguzado (punta de flecha) del vector \vec{A} . El vector suma $\vec{A} + \vec{B} \equiv \vec{C}$ se define como el trazo que comienza en el extremo romo de \vec{A} y termina en el extremo aguzado de \vec{B} . Esta definición se conoce con el nombre de *regla del paralelogramo*.

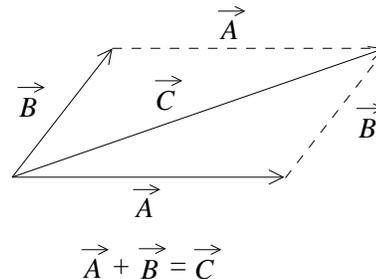


Figura 3.3

Equivalentemente, podemos decir que para sumar dos vectores basta colocar un vector a continuación del otro. Al unir el origen del primer vector con la flecha del segundo vector, se obtiene el vector suma (en el caso de la Fig. 3.3, corresponde a considerar sólo el “semi-paralelogramo” inferior; claramente el resultado es el mismo).

Ejemplo:

Un excursionista parte desde una cierta posición y camina 4 km hacia el Este y luego 3 km hacia el Sur. ¿Cuál es el vector desplazamiento resultante \vec{C} ?

El vector \vec{C} es la suma vectorial de los desplazamientos parciales realizados por el excursionista, hacia el este \vec{A} y luego hacia el sur \vec{B} . Gráficamente la situación está ilustrada en la figura 3.4. La magnitud del desplazamiento resultante se calcula utilizando el teorema de Pitágoras

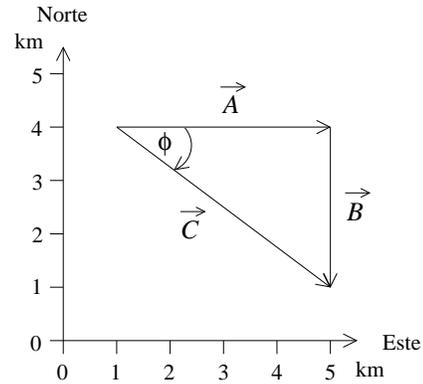


Figura 3.4

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ km} .$$

La dirección de \vec{C} queda definida por el ángulo ϕ que forma el vector \vec{C} con la dirección Oeste–Este. Consideraremos un ángulo positivo cuando se mide en sentido contrario a los punteros del reloj, luego

$$\tan \phi = -\frac{3}{4} = 0.75 , \text{ es decir, } \phi = - 36.9^\circ .$$

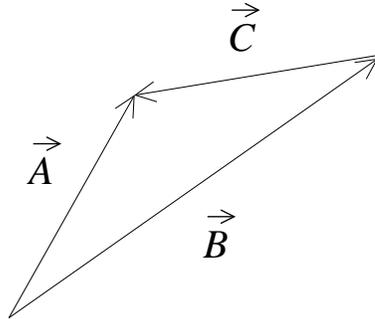
Que el ángulo ϕ sea negativo significa que está medido en el mismo sentido de los punteros del reloj.

La suma de vectores tiene las siguientes propiedades:

- i) Conmutatividad: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} .$
- ii) Asociatividad: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} .$
- iii) Existe un vector nulo tal que $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A} .$
- iv) Para cada vector \vec{A} existe un vector opuesto, que denotaremos por $-\vec{A}$, tal que $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0} .$

De hecho, son éstas propiedades las que permiten llamar “suma” a la operación definida en la Fig. 3.3. En general, a cualquier operación que satisfaga las cuatro propiedades anteriores se le puede llamar suma, y asignarle el símbolo “+”.

¿Y cómo se restan dos vectores? Por una parte, podemos calcularlo sumando un vector con el opuesto aditivo del otro. Alternativamente, podemos verlo como sugiere la figura siguiente:



Si $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, entonces \vec{C} debe ser tal que $\vec{C} + \vec{B} = \vec{A}$, esto es, al poner el vector \vec{C} a continuación del vector \vec{B} , debería obtenerse el vector \vec{A} . Esto es lo que muestra la figura anterior, y por tanto el vector $\vec{A} - \vec{B}$ es el vector que une las puntas de los dos vectores involucrados, y apunta en dirección de \vec{B} hacia \vec{A} .

También es posible definir la multiplicación de un vector por un escalar, como veremos a continuación.

Multiplicación de un vector por un escalar real.

La multiplicación de un vector \vec{A} por un número real α (escalar real) se define como un nuevo vector \vec{B} de magnitud $\alpha|\vec{A}|$, cuyo sentido coincide con el de \vec{A} si $\alpha > 0$ y es opuesto al de éste si $\alpha < 0$.

Propiedades de la multiplicación por un escalar real.

Sean α y β dos números reales y \vec{A} y \vec{B} dos vectores, entonces:

- i) $\alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$.
- ii) $(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}$.
- iii) $(\alpha\beta)\vec{A} = \alpha(\beta\vec{A})$.
- iv) Para todo vector \vec{A} se cumple que $1\vec{A} = \vec{A}$.

Ejercicio: Compruebe gráficamente, con algunos ejemplos concretos, que se cumplen todas las propiedades de los vectores recién señaladas.

Las dos operaciones que hemos definido son fundamentales para un vector. De hecho, desde el punto de vista matemático, un vector es un objeto para el cual se puede definir una suma y un producto por escalar (es decir, dos operaciones, una entre vectores y otra entre un vector y un escalar, con las propiedades indicadas más arriba). Cualquier objeto que tenga tales operaciones con dichas propiedades, podrá ser llamado vector. La imagen de un vector como una flecha es, entonces, sólo

pictórica, nos permite tener una intuición, pero matemáticamente podemos ser más abstractos aún.

Componentes cartesianas y polares de un vector.

Para describir unívocamente un vector en dos dimensiones necesitamos las dos componentes del par ordenado que lo representa, por ejemplo. A dichos números se les denomina las *componentes cartesianas* del vector. Dos vectores $\vec{A} = (A_x, A_y)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y)$ son iguales si cada una de sus componentes son iguales: $A_x = B_x$, y $A_y = B_y$.

Sin embargo, la anterior no es la única posibilidad de descripción. Como se ve en la Fig. 3.4, también es posible caracterizar al vector dando *otros* dos números, a saber, su módulo y su dirección, en la forma de un ángulo respecto al eje x . A éstos se les denomina las *coordenadas polares* del vector.

El vector es, desde luego, uno solo. Lo único que cambia son los números (las coordenadas) con las cuales se decide describirlo. Debe existir, entonces, una relación entre ambos sistemas de coordenadas.

Sea $\vec{A} = (A_x, A_y)$ un vector cualquiera del plano x - y . Expresemos el vector, alternativamente, en función de su magnitud A y del ángulo θ que forma con el semieje x positivo. La figura 3.5 muestra que

$$A_x = A \cos \theta \quad A_y = A \sin \theta ,$$

y que

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{A_y}{A_x} .$$

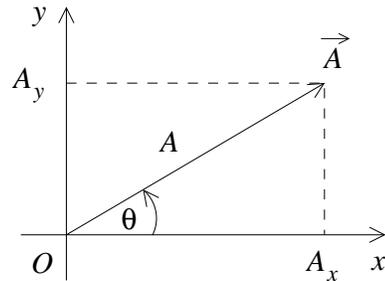


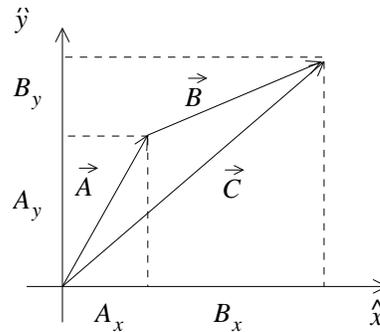
Figura 3.5

Los números (A_x, A_y) se denominan las *coordenadas cartesianas* del vector; los números (A, θ) reciben el nombre de *coordenadas polares* del vector \vec{A} . Cualquiera sea el caso, un vector en un plano queda determinado si se conocen dos números.

Notemos que al calcular las coordenadas polares en términos de las cartesianas, es necesario invertir una función trigonométrica. Como el cociente A_y/A_x no distingue entre vectores en los cuadrantes I y III, por un lado, ni en los cuadrantes II y IV, por otro, es importante tener presente esto y no usar la calculadora ciegamente.

Ahora que manejamos el concepto de coordenadas, es conveniente notar la forma que tienen las dos operaciones que hemos definido sobre vectores, pero ahora en coordenadas cartesianas. Esto, en la práctica, y dependiendo del problema en cuestión, puede ser más conveniente que manejar sólo las definiciones geométricas dadas hasta ahora.

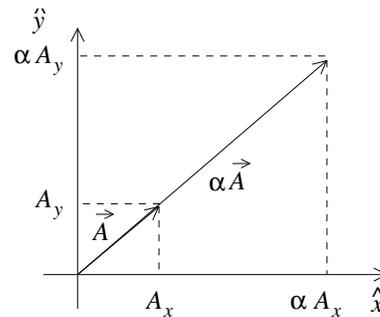
En la siguiente figura, representamos la suma de dos vectores:



Es claro de la figura que, de la definición de suma de vectores, ésta es, en coordenadas cartesianas,

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y) .$$

Análogamente, para la multiplicación por un escalar:



se tiene que

$$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y) .$$

Los análisis anteriores han sido realizados para vectores en dos dimensiones, pero naturalmente pueden ser generalizados a tres. En este caso, el módulo de un vector en coordenadas cartesianas es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} ,$$

la suma entre vectores es

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) ,$$

y el producto por un escalar es

$$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z) .$$

Vectores unitarios.

Habiendo definido la multiplicación entre escalares y vectores, sería interesante tener ciertos vectores “elementales”, tal que un vector arbitrario se pudiera escribir como un múltiplo de esos vectores elementales. Para ello definimos los *vectores unitarios*, que son los vectores de módulo uno. Para distinguirlos del resto de los vectores, los denotamos con un “tongo”: \hat{A} . Para caracterizar una dirección, entonces, basta con indicar *el* vector unitario que tiene dicha dirección (existe uno solo; todos los otros vectores con la misma dirección no son unitarios).

Dado cualquier vector \vec{A} es posible obtener el vector unitario con su misma dirección: basta dividirlo por su módulo. En efecto, el vector

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A} \right)$$

es unitario:

$$|\hat{A}| = \sqrt{(A_x/A)^2 + (A_y/A)^2 + (A_z/A)^2} = \sqrt{\frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2}} = 1 .$$

Es posible, entonces, encontrar infinitos vectores unitarios. Existen, sin embargo, tres vectores unitarios que merecen mención especial. Éstos son los vectores unitarios \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} que apuntan en sentido positivo sobre cada uno de los ejes coordenados de un sistema cartesiano en tres dimensiones. (En algunos libros estos vectores se designan con \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , respectivamente.)

Observemos la figura 3.6. Recordando que la suma de vectores equivale a poner un vector a continuación del otro, es claro que el vector \vec{A} se puede escribir como la suma de tres vectores: $A_x\hat{x}$ (un vector en la dirección \hat{x} , de módulo A_x), $A_y\hat{y}$ (dirección \hat{y} , módulo A_y), y $A_z\hat{z}$ (dirección \hat{z} , módulo A_z). Es decir,

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} .$$

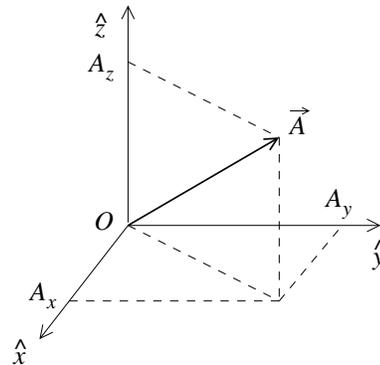


Figura 3.6

Sabemos sumar vectores y multiplicarlos por escalares. ¿Es posible definir otras operaciones, análogas a las conocidas entre números reales? ¿Por ejemplo, un producto entre vectores? La respuesta es sí, pero no hay una única manera de hacerlo. Revisemos a continuación una de ellas.

Producto escalar o producto punto de dos vectores

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores arbitrarios. Se define el *producto punto* entre los vectores \vec{A} y \vec{B} mediante la expresión

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \gamma ,$$

donde γ es el ángulo entre los dos vectores (ver figura 3.7).¹

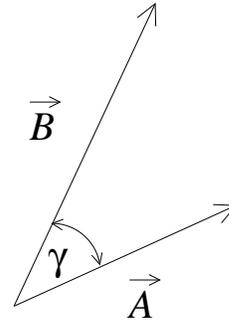


Figura 3.7

De la definición se desprende que el producto punto de dos vectores es un número real. Podemos reinterpretar geoméricamente el producto punto como el producto entre el módulo de un vector (A) y el módulo de la *proyección del otro vector* sobre éste ($B \cos \gamma$). Y viceversa.

Es claro que si los vectores \vec{A} y \vec{B} son rotados simultáneamente, en el mismo ángulo, su producto punto no cambia.

Se tiene también que si dos vectores son paralelos, el producto punto es simplemente el producto de sus módulos. Por su parte, si dos vectores son perpendiculares el producto punto entre ellos es cero.

En particular, para los vectores unitarios \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} :

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

y

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 .$$

Otras características importantes del producto punto son su conmutatividad

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

y distributividad

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} .$$

Ejercicio: Demuestre las dos propiedades anteriores a partir de las definiciones geométricas de suma de vectores y producto punto.

Es claro que

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} .$$

¹A diferencia del producto entre números reales, el punto que representa el producto escalar entre vectores no se puede omitir.

Notemos que, a diferencia del producto entre reales, no existe un elemento neutro. Si existiera (llamémoslo \vec{N}), sería un vector tal que $\vec{A} \cdot \vec{N}$ sea igual a \vec{A} , lo que es imposible, ya que el primero es un escalar, y el segundo un vector. Por tanto, tampoco existe un elemento inverso bajo el producto punto, y no es posible definir una “división” entre vectores.

Usando las propiedades conocidas, evaluemos el producto punto entre los dos vectores \vec{A} y \vec{B} en términos de sus coordenadas cartesianas. Se tiene

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \cdot \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \cdot \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \cdot \hat{z} + A_y B_x \hat{y} \cdot \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \cdot \hat{y} + \\ &\quad + A_y B_z \hat{y} \cdot \hat{z} + A_z B_x \hat{z} \cdot \hat{x} + A_z B_y \hat{z} \cdot \hat{y} + A_z B_z \hat{z} \cdot \hat{z} , \end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z .$$

Note que la última expresión permite evaluar el ángulo entre dos vectores si se conocen sus componentes cartesianas.

Ejemplo

Evaluemos nuevamente el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

Sea \vec{A} el vector a lo largo de la diagonal que une el punto $(0,0,0)$ con el punto $(1,1,1)$ y \vec{B} el vector a lo largo de la diagonal que une el punto $(1,0,0)$ con el punto $(0,1,1)$. Los vectores \vec{A} y \vec{B} , por lo tanto, pueden escribirse en coordenadas cartesianas de la forma

$$\vec{A} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} .$$

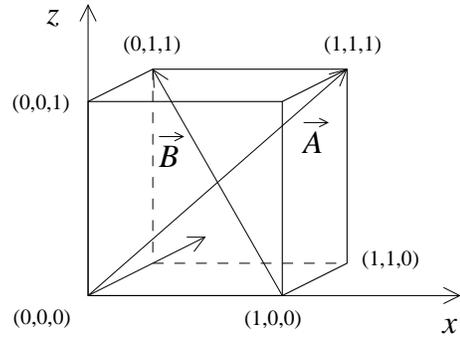


Figura 3.8

Evaluemos el producto punto de estos dos vectores. Se tiene

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \gamma = \sqrt{3} \sqrt{3} \cos \gamma ,$$

donde γ es el ángulo entre los dos vectores (o sea, el ángulo entre las dos diagonales). Por otra parte, usando coordenadas cartesianas

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 .$$

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que $\cos \gamma = 1/3$, o sea, $\gamma = 70.53^\circ$.

3.2. Cinemática

Habiendo ya definido los aspectos fundamentales de vectores, es directo generalizar los conceptos de la cinemática de una a dos y tres dimensiones.

Supongamos que $\vec{r}(t)$ representa la posición de cierta partícula. Entonces su velocidad y aceleración (instantánea) vendrán dadas por

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta) - \vec{r}(t)}{\Delta}$$

y

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta) - \vec{v}(t)}{\Delta}.$$

De la expresión anterior se deduce que si

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z},$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las componentes del vector de posición, entonces

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} \hat{x} + \frac{y(t + \Delta) - y(t)}{\Delta} \hat{y} + \frac{z(t + \Delta) - z(t)}{\Delta} \hat{z} \right],$$

es decir

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z},$$

o sea, para encontrar la velocidad se puede derivar cada componente del vector posición por separado. Análogamente,

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z}.$$

Introduzcamos también el concepto de *velocidad relativa*. Supongamos que una partícula A se mueve con velocidad \vec{v}_A y otra partícula B con velocidad \vec{v}_B , entonces la velocidad con que A observa que se mueve B , viene dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A.$$

Se dice que “ \vec{v} es la velocidad relativa de B respecto a A ”.

Ejemplo:

Suponga que la corriente de un canal tiene una velocidad de 10 km/h en dirección Este. Un transbordador navega en la dirección de 30° Noroeste, a una velocidad de 20 km/hora con respecto a la corriente del canal (ver figura 3.9). ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según un observador situado en la ribera?

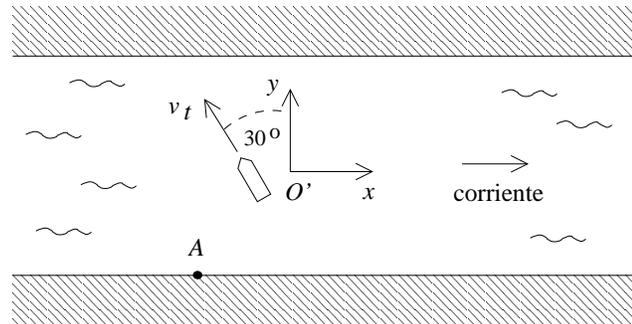


Figura 3.9

Para resolver el problema introduciremos un sistema de coordenadas \hat{x}, \hat{y} cuyo origen O' se mueve junto al agua del canal. Para el observador O' , un punto fijo en la orilla se mueve con velocidad

$$\vec{v}_A = [-10, 0] \text{ km/h} ,$$

mientras que el transbordador se aleja con una velocidad

$$\vec{v}_t = [-20 \sin(30^\circ), 20 \cos(30^\circ)] \text{ km/h} = [-10, 10\sqrt{3}] \text{ km/h} .$$

Luego, la velocidad con que el observador parado en la orilla en el punto A ve alejarse al transbordador (o sea, la velocidad relativa entre el transbordador y la orilla), será

$$\vec{v} = \vec{v}_t - \vec{v}_A = [0, 10\sqrt{3}] \text{ km/h} = 10\sqrt{3} \hat{y} \text{ km/h} ,$$

un movimiento puramente transversal a la corriente del canal.

Analicemos ahora el problema de otra forma. Supongamos que nos damos un intervalo de tiempo arbitrario, por ejemplo, 1 hora (porque es el más fácil de usar en este caso) e imaginemos que durante ese intervalo la corriente del canal está detenida. Calculamos el desplazamiento del transbordador en este caso. En una hora el ferry se desplaza 20 km desde O hasta el punto P' . En seguida —y siempre en nuestra imaginación— dejemos fluir la corriente del canal durante una hora, pero ahora con el ferry detenido (dejando que simplemente flote en la corriente). El desplazamiento debido al arrastre del canal llevará al ferry desde el punto P' hasta P (10 km hacia la derecha), como mostramos en la figura 3.10.

El desplazamiento total del ferry es el vector de O hasta P . Este desplazamiento, como es fácil de demostrar, coincide con el que el ferry hubiese tenido en una hora si los dos movimientos hubiesen estado presentes simultáneamente. Es decir, para resolver el problema podemos descomponer el movimiento en dos movimientos separados, congelando uno y otro sucesivamente. El movimiento total es la *superposición* de ambos movimientos. Esta operación, sólo posible en la imaginación, arroja

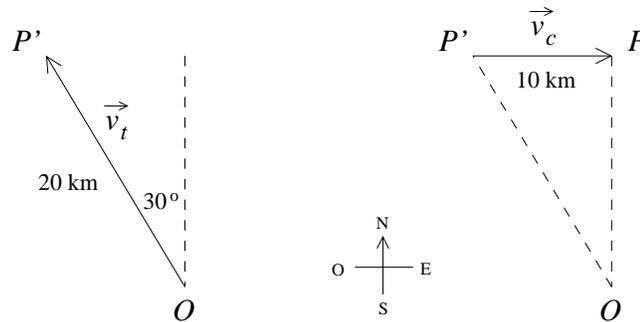


Figura 3.10

los mismos resultados que se observan en la vida real, y es extremadamente útil para describir movimientos complejos, al considerarlos como superposición de dos o más movimientos más sencillos.

Demostremos otro ejemplo del uso del principio de superposición. Consideremos un anillo que rueda (sin resbalar) por una superficie horizontal con velocidad constante. Tomemos un punto cualquiera sobre el anillo y analicemos su movimiento. Para un observador O en reposo respecto a la superficie, el movimiento del punto tendrá un aspecto complicado. Sin embargo, al trasladarnos uniformemente con la misma velocidad que el centro del anillo, el movimiento del punto se tornará muy simple: es un movimiento circular uniforme. Así, el movimiento complicado que observa O se puede descomponer en dos movimientos simples, un movimiento de traslación uniforme superpuesto a un movimiento circular uniforme (ver problema 13).

Problema resuelto en clases: 3.19

Caída libre

Podemos utilizar el principio de superposición para describir la caída de una partícula en el campo gravitatorio terrestre.

La figura 3.11, a la izquierda, muestra la posición de una pelota en caída libre durante varios instantes equiespaciados. A la derecha se muestra la situación que se observa si el cuerpo además inicialmente tiene una velocidad horizontal. La trayectoria en este caso es una parábola. Históricamente, los filósofos se esforzaron mucho para intentar explicar este movimiento, sin éxito. Fue Galileo Galilei quien comprendió que la solución era describir el movimiento de la manera más sencilla y directa. Fue él quien, por primera vez, estudió la caída de una partícula como una superposición de dos movimientos: i) la tendencia natural de los cuerpos a mantener su velocidad (ley de inercia) y ii) la caída libre de un cuerpo debida a la atracción gravitatoria. Cuando ambos movimientos se superponen simultáneamente, se pue-

de mostrar, geoméricamente, que dan origen al movimiento parabólico, tal como se observa experimentalmente.²

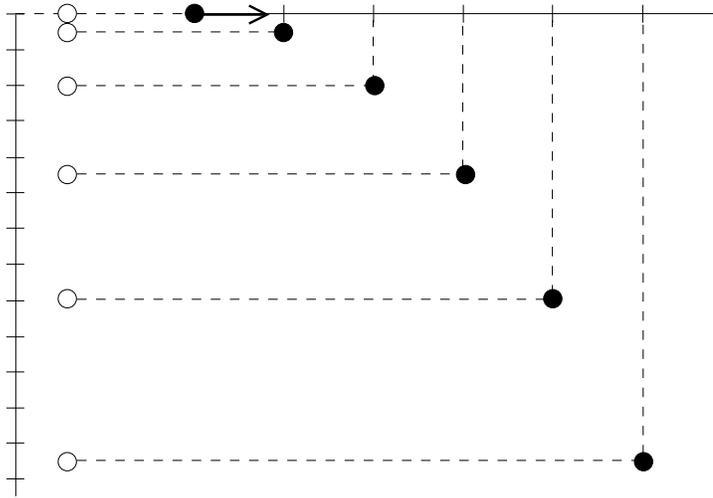


Figura 3.11

Analicemos ahora vectorialmente este problema. Para comenzar, especifiquemos el sistema de referencia. El eje \hat{x} lo elegimos de manera que su dirección coincida con la proyección de la velocidad sobre el plano horizontal, mientras que el eje \hat{z} lo elegimos hacia arriba (o sea, una partícula al caer acelera en la dirección $-\hat{z}$). De acuerdo a las observaciones del propio Galileo, la aceleración en todo instante es $\vec{a}(t) = -g\hat{z}$. También supondremos que la velocidad en el instante $t = 0$ viene dada por $\vec{v}(0) = v_x^{(0)}\hat{x} + v_z^{(0)}\hat{z}$ y que la partícula se encuentra en el lugar $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = x_0\hat{x} + z_0\hat{z}$. Deseamos encontrar, con toda esta información, la posición de la partícula, $\vec{r}(t)$, para todo instante t . Puesto que $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t)$, el problema corresponde, matemáticamente, integrar dos veces el vector $\vec{a}(t)$; la primera vez obtendremos la velocidad, y la segunda vez la posición. Pero ya sabemos que derivar un vector equivale a derivar cada componente por separado; es claro que lo mismo debe ocurrir con la operación inversa: integrar un vector equivale a integrar cada componente por separado [basta recordar que integrar $\vec{a}(t)$ es encontrar aquella función tal que su derivada es $\vec{a}(t)$.] En la práctica, esto significa que podemos analizar cada una de las componentes del vector \vec{a} por separado.

²Es importante notar la gran intuición física que implica, de parte de Galileo, el haber sido capaz de separar el movimiento de este modo, en una época en que las condiciones para hacer experimentos de precisión era muy limitada, y ni siquiera existía el concepto de la necesidad de realizar experimentos de precisión.

Componente x : La aceleración no tiene componente en la dirección x , o sea,

$$a_x = 0 .$$

La velocidad v_x es, por lo tanto, constante, igual al valor inicial:

$$v_x(t) = v_x^{(0)} \quad \forall t .$$

Para el desplazamiento en la dirección x se encuentra que

$$x(t) = x_0 + v_x^{(0)} t .$$

Componente z : La aceleración es

$$a_z = -g .$$

La velocidad v_z y el desplazamiento en la dirección z vendrán dados por

$$v_z(t) = v_z^{(0)} - gt$$

y

$$z(t) = z_0 + v_z^{(0)} t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Estos resultados los podemos condensar escribiéndolos en forma vectorial:

$$\vec{a}(t) = -g\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}^{(0)} - gt\hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}^{(0)} t - \frac{1}{2}gt^2\hat{z} .$$

Con esto hemos resuelto completamente el problema. Es posible, a partir de estas ecuaciones, mostrar que la trayectoria corresponde, efectivamente, a una parábola (ver Problema 3.21).

Notemos, finalmente, cómo el hecho de usar vectores para describir el movimiento nos permitió (por argumentos puramente matemáticos), separar el movimiento en dos componentes, que analizamos por separado. Pero éste es precisamente el espíritu del principio de superposición que había usado Galileo. Esto no es casualidad: el hecho de que sea posible usar superposición para describir movimientos complejos en términos de movimientos más sencillos, y el hecho de que podamos describir el movimiento con cantidades vectoriales, están íntimamente relacionados.

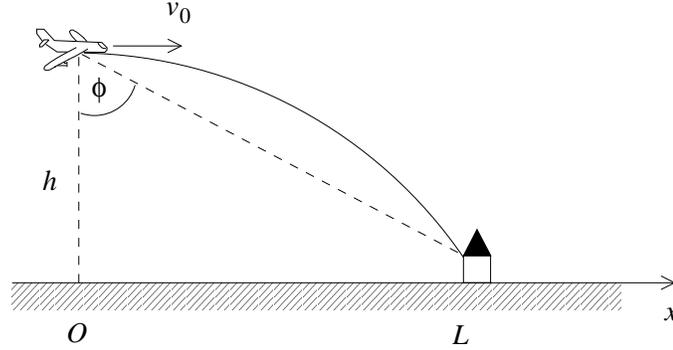


Figura 3.12

Ejemplo

Un bombardero vuela con una velocidad horizontal v_0 , constante, y a una altura h en una trayectoria que pasa directamente por sobre su objetivo. ¿A qué ángulo de visión ϕ debe soltar la bomba, de forma que ésta llegue a su objetivo? (Ignore el efecto debido al roce del aire.)

La bomba en el instante en que se deja libre tiene la misma velocidad que el bombardero. Definimos el sistema de coordenadas de acuerdo a lo que se observa en la figura 3.12. Entonces la posición y la velocidad inicial de la bomba vienen dadas por $\vec{r}_0 = h\hat{z}$ y $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$, respectivamente. ¿Cuánto demora la bomba en caer? La bomba llegará al suelo cuando $z(t) = h - gt^2/2 = 0$. Esto ocurre en el instante $\tau = \sqrt{(2h/g)}$. Durante el intervalo de tiempo τ la bomba alcanza a recorrer una distancia horizontal $L = v_0 \tau$. Luego para el ángulo de visión obtenemos

$$\tan \phi = \frac{L}{h} = \frac{v_0}{h} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{gh}}.$$

Observemos que, mientras mayor es la velocidad del bombardero, mayor es el ángulo al cual debe lanzarse la bomba. En particular, cuando $v_0 \rightarrow \infty$, $\phi = \pi/2$, lo que significa que el lanzamiento debe producirse cuando el avión se encuentra infinitamente lejos del objetivo. Otro límite interesante es $h \rightarrow \infty$, en cuyo caso $\phi = 0$, lo cual dice que cuando el avión se encuentra a una altura demasiado grande, hay que arrojar la bomba cuando el avión se encuentra directamente sobre el objetivo. Lo cual suena contradictorio a primera vista, ya que si el avión se mueve, siempre habrá un desplazamiento horizontal de la bomba, y éste será cada vez mayor precisamente mientras más alto se encuentre el avión. La solución es que, precisamente debido a que el movimiento es acelerado en la dirección vertical, para alturas demasiado grandes la bomba tiene mucho tiempo para aumentar su velocidad, superando cualquier velocidad horizontal que pueda haber tenido inicialmente. Esto hace que

su desplazamiento horizontal termine siendo despreciable respecto al vertical, y eso corresponde a ϕ despreciable, es decir cero.

Notemos también que si el campo gravitatorio disminuyera, sería necesario arrojar la bomba desde ángulos cada vez mayores, lo cual también está de acuerdo con la intuición, ya que la bomba demoraría más en caer.

Problema resuelto en clases: 3.34

Movimiento circular uniforme

Además del movimiento parabólico antes descrito, el movimiento circular es otro movimiento sencillo que podemos describir en dos dimensiones.

Consideremos una partícula que gira con rapidez constante sobre una trayectoria circular de radio R (que define el plano x - y). Eligiendo el origen al centro del círculo, que el movimiento sea uniforme significa que el ángulo del vector posición con el eje \hat{x} aumentará en la forma:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t ,$$

donde ϕ_0 es el ángulo en el instante $t = 0$ y ω_0 es una constante que determina cuán rápido varía el ángulo. Observemos la analogía entre la expresión anterior y la ecuación de itinerario para la posición en un movimiento uniforme en una dimensión. La variable lineal x es reemplazada por el ángulo ϕ , y la velocidad lineal v por la así llamada *velocidad angular* ω .

Las componentes x e y del vector posición vienen dadas por

$$x(t) = R \cos \phi(t) = R \cos(\phi_0 + \omega_0 t)$$

e

$$y(t) = R \sin \phi(t) = R \sin(\phi_0 + \omega_0 t).$$

El vector posición es, por lo tanto,

$$\vec{r}(t) = R \cos(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{x} + R \sin(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{y} .$$

Derivando $\vec{r}(t)$ se encuentra la velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = & - R\omega_0 \sin(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{x} \\ & + R\omega_0 \cos(\phi_0 + \omega_0 t) \hat{y} . \end{aligned}$$

Evaluemos el módulo de la velocidad (rapidez):

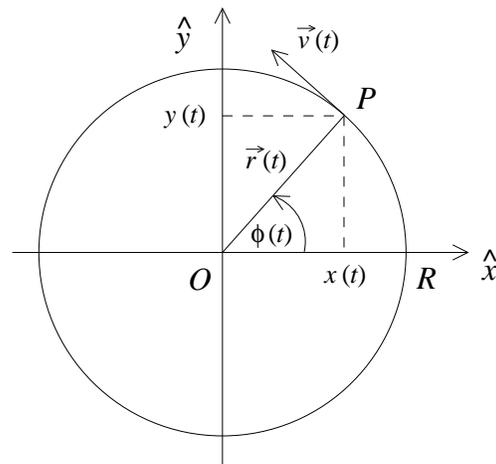


Figura 3.13

$$\begin{aligned}
 v &= |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \\
 &= \sqrt{R^2\omega_0^2 \sin^2(\phi_0 + \omega_0 t) + R^2\omega_0^2 \cos^2(\phi_0 + \omega_0 t)} = R\omega_0 .
 \end{aligned}$$

A pesar de que la rapidez es constante (no depende del tiempo), la velocidad no lo es, ya que continuamente cambia de sentido (y por tanto, existe una aceleración). Esta última ecuación enseña que la velocidad angular es la rapidez de la partícula dividida por el radio de giro. Lo cual es razonable, considerando lo siguiente: si la velocidad angular es constante, entonces la partícula debe dar una vuelta completa al círculo (es decir, recorrer un ángulo 2π), siempre en el mismo tiempo (el período T). Equivalentemente, la partícula debe recorrer la circunferencia completa (una distancia $2\pi R$, en el mismo tiempo T). Es decir:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{R} \frac{2\pi R}{T} = \frac{1}{R} v .$$

Si observamos la expresión para \vec{v} recién obtenida, notaremos que, cuando la partícula se encuentra sobre el eje \hat{x} ($\phi(t) = 0$), su velocidad es $R\omega_0\hat{y}$, vertical hacia arriba. Cuando se encuentra sobre el eje \hat{y} ($\phi(t) = \pi/2$), su velocidad es $-R\omega_0\hat{x}$, horizontal hacia la izquierda. Así sucesivamente, esto sugiere que la velocidad es un vector siempre tangente a la circunferencia.

Podemos verificar lo anterior evaluando el producto punto entre \vec{r} y \vec{v} :

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = x(t)v_x(t) + y(t)v_y(t) = 0 .$$

Como el producto punto de dos vectores no nulos vale cero sólo si los dos vectores son perpendiculares, se halla que la velocidad de una partícula en un movimiento circular uniforme es siempre perpendicular al radio.

Derivando la velocidad se encuentra la aceleración:

$$\vec{a}(t) = -R\omega_0^2 \cos(\phi_0 + \omega_0 t)\hat{x} - R\omega_0^2 \sin(\phi_0 + \omega_0 t)\hat{y} .$$

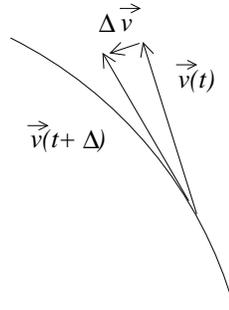
Note que en todo instante

$$\vec{a}(t) = -\omega_0^2 \vec{r}(t) ,$$

o sea, la aceleración siempre apunta hacia el origen (razón por la cual se llama *aceleración centrípeta*). La magnitud de la aceleración siempre es constante y vale

$$a = |\vec{a}(t)| = R\omega_0^2 .$$

Observemos que podríamos haber concluido desde un comienzo que la aceleración debía ser radial. En efecto, la aceleración es proporcional a la diferencia de velocidades entre dos instantes infinitamente cercanos, $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t + \Delta)$. Si la velocidad se debe mantener tangente al círculo, breves segundos de reflexión nos deberían convencer que el vector diferencia $\Delta\vec{v}(t) = \vec{v}(t + \Delta) - \vec{v}(t)$ debe ser puramente radial:



3.3. Coordenadas polares

Los vectores unitarios \hat{r} y $\hat{\theta}$.

Hemos visto que el movimiento de un punto P en el plano x, y se puede especificar usando dos funciones que describan sus coordenadas cartesianas del punto, o sea,

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} .$$

También podemos especificar el movimiento P usando coordenadas polares, es decir, dando las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$. Debería ser posible, por analogía a las coordenadas cartesianas, escribir el vector posición en la forma:

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r} + \theta(t) \hat{\theta} .$$

¿Qué son los vectores \hat{r} y $\hat{\theta}$?

Al menos para \hat{r} es evidente cómo definirlo:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} ,$$

un vector unitario en la dirección radial (ver Fig. 3.14). De la misma figura podemos deducir que

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} .$$

¿Y $\hat{\theta}$? Debería ser un vector perpendicular a \hat{r} , y por tanto tangente a la circunferencia de radio r . Existen dos direcciones perpendiculares, pero elegimos $\hat{\theta}$ de modo que apunte en la dirección en que aumenta el ángulo θ , como se indica en la Fig. 3.14. Nuevamente, podemos deducir de la figura que

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} .$$

Ejercicio: Demuestre que los vectores \hat{r} y $\hat{\theta}$ efectivamente son unitarios. También demuestre que son *ortonormales*, es decir, $\hat{r} \perp \hat{\theta}$.

Observe que estos vectores unitarios generalmente (cuando $\theta = \theta(t)$ depende del tiempo) son tiempo dependientes. El vector \hat{r} apunta en la dirección radial, mientras que el vector $\hat{\theta}$ es tangencial al círculo que pasa por P y tiene su centro en el origen.

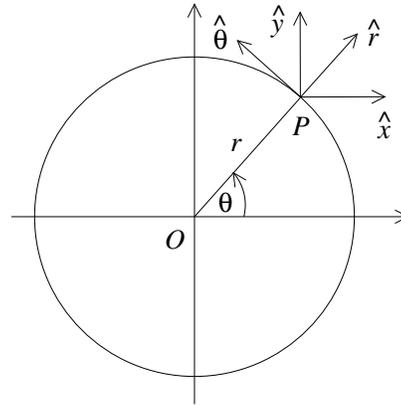


Figura 3.14

En principio, puede parecer incómodo el haber definido dos vectores unitarios que dependen del tiempo. Y no sólo que dependen del tiempo, sino que dependen de la posición de la propia partícula cuyo movimiento se intenta describir. Efectivamente, es menos sencillo trabajar en este sistema de coordenadas que en el sistema cartesiano, que es independiente del tiempo y de la partícula a observar. Pero nada, en principio, nos prohíbe trabajar en tal sistema, y de hecho encontraremos muchas situaciones en que es la mejor opción (a pesar de las apariencias).

Ya que los vectores unitarios varían con el tiempo, calculemos su derivada temporal. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\hat{r}} &= \frac{d}{dt} [\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}] \\ &= \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \hat{x} + \frac{d \sin \theta(t)}{dt} \hat{y} \\ &= -\sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{x} + \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{y} \\ &= \dot{\theta}(t) [-\sin(\theta(t)) \hat{x} + \cos(\theta(t)) \hat{y}] = \dot{\theta} \hat{\theta} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\hat{\theta}} &= \frac{d}{dt} [-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}] \\ &= -\frac{d \sin \theta(t)}{dt} \hat{x} + \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \hat{y} \\ &= -\cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{x} - \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{y} \\ &= -\dot{\theta}(t) [\cos(\theta(t)) \hat{x} + \sin(\theta(t)) \hat{y}] = -\dot{\theta} \hat{r} \end{aligned}$$

Resumen:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} \tag{3.1}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} . \quad (3.2)$$

Los resultados anteriores son completamente generales, y no dependen de que el movimiento sea uniforme, y ni siquiera circular. Notemos además que son completamente esperables. En efecto, de la Fig. 3.14 es evidente que si \hat{r} cambia, la única posibilidad es que la partícula cambie su ángulo θ . Cambios en su coordenada $r(t)$ mantienen el vector \hat{r} constante. Por lo tanto, $\dot{\hat{r}}$ debía ser un vector paralelo a la dirección $\hat{\theta}$, y además proporcional a $\dot{\theta}$ (de modo que si θ es constante, \hat{r} también lo sea). Análogamente, si $r(t)$ cambia ello no altera $\dot{\hat{\theta}}$ en la Fig. 3.14. Nuevamente, la única manera de que $\dot{\hat{\theta}}$ cambie es que θ lo haga, de modo que $\dot{\hat{\theta}}$ debe ser proporcional también a $\dot{\theta}$. Pero ahora, al cambiar el ángulo, $\hat{\theta}$, que es tangente a la circunferencia, cambia en dirección radial hacia el centro del círculo (la razón es la misma que la que hace que la aceleración en un movimiento circular uniforme sea centrípeta), y por tanto $\dot{\hat{\theta}}$ debía ser proporcional a $-\hat{r}$.

Movimiento circular (en coordenadas polares).

Estudiemos ahora el mismo problema anteriormente resuelto, de una partícula en movimiento circular, pero ahora en coordenadas polares.

Consideremos un punto P que se mueve en torno al origen sobre un círculo de radio R y sea $\theta(t)$ el ángulo polar (medido respecto al eje \hat{x} y en el sentido contrario al avance del reloj). El vector posición del punto P es:

$$\vec{r}(t) = R \hat{r}(t) .$$

La velocidad es:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = R \dot{\hat{r}} = R \dot{\theta} \hat{\theta} ,$$

y la aceleración es:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) &= R \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \hat{\theta}) \\ &= R (\ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}}) \\ &= R \ddot{\theta} \hat{\theta} - R \dot{\theta}^2 \hat{r} \end{aligned}$$

En el caso particular en que el movimiento es uniforme, la *velocidad angular* $\dot{\theta} \equiv \omega_0$ es constante. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R \hat{r} , \\ \vec{v} &= R \omega_0 \hat{\theta} , \\ \vec{a} &= -R \omega_0^2 \hat{r} . \end{aligned}$$

Estos resultados, por supuesto, son consistentes con los anteriormente obtenidos en coordenadas cartesianas. De hecho, es trivial recuperar todos los hechos que ya discutimos sobre el movimiento circular uniforme simplemente inspeccionando las igualdades anteriores: La distancia al origen es constante ($|\vec{r}|$ es constante); la rapidez es constante e igual a $|\vec{v}| = R\omega_0$; el módulo de la aceleración es constante e igual a $|\vec{a}| = R\omega_0^2$; la velocidad es perpendicular a la posición en todo momento (\vec{r} es proporcional a \hat{r} , mientras que \vec{v} lo es a $\hat{\theta}$); y la aceleración es centrípeta (\vec{a} tiene dirección $-\hat{r}$).

Podemos apreciar, entonces, que la descripción del movimiento circular uniforme es considerablemente más sencilla en coordenadas polares, a pesar de que, al introducirlas, los vectores unitarios dependen del tiempo. Naturalmente, lo complejo del movimiento circular, que antes se traducía en tener que derivar funciones trigonométricas, ahora se traduce en tener que derivar los vectores unitarios. Ahí esta encapsulada la no trivialidad del movimiento. Pero una vez que sabemos cómo dependen \hat{r} y $\hat{\theta}$ del tiempo, encontrar la posición, la velocidad y la aceleración es muy sencillo, y la interpretación es inmediata, no como en el caso de coordenadas cartesianas.

Notemos que si el movimiento ahora es no uniforme, sigue siendo cierto que la velocidad es perpendicular a la posición. Debe ser así, porque la velocidad es, por la propia definición de derivada, tangente a la trayectoria, de modo que si ésta es un círculo, la velocidad debe tener dirección $\hat{\theta}$. En cambio, la aceleración deja de ser puramente centrípeta. Además de una aceleración radial $-R\dot{\theta}^2\hat{r}$, aparece un término $R\ddot{\theta}\hat{\theta}$. Esta *aceleración tangencial* debía aparecer, puesto que un movimiento circular sólo puede ser no uniforme si el ángulo no varía linealmente con el tiempo, en cuyo caso $\ddot{\theta} \neq 0$, y si dicha aceleración es precisamente en la dirección angular, $\hat{\theta}$. La aceleración, así, tiene dos términos, uno radial, que se encarga de que el cuerpo se mueva en un círculo, y uno tangencial, que cambia la velocidad con la cual se recorre el círculo.

3.4. Problemas

1. Sean \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} los vectores $\vec{A} = 2\hat{x} + \hat{y}$, $\vec{B} = 3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$ y $\vec{C} = \hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$.

- Encuentre el módulo de \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .
- Encuentre el módulo del vector suma, o sea, evalúe

$$D = |\vec{D}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| .$$

- ¿Cuál vector es más largo: $\vec{A} + \vec{B}$ o $\vec{A} + \vec{C}$? En vista de lo calculado en la parte a), ¿le sorprende este resultado?
- Encuentre el ángulo entre los vectores \vec{B} y \vec{C} .

Respuesta: d) $49,86^\circ$.

2. Demuestre que los vectores:

$$\vec{A} = \cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{y}$$

$$\vec{B} = \cos(\beta)\hat{x} + \sin(\beta)\hat{y}$$

son vectores unitarios que forman un ángulo α y β con el eje \hat{x} , respectivamente. Evalúe $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y encuentre una fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Considere los tres puntos cuyas coordenadas cartesianas vienen dadas por: $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, 2, 0)$ y $P_3 = (2, 3, 1)$. Demuestre que ellos definen los vértices de un triángulo rectángulo.
4. Encuentre un vector unitario \hat{A} que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\vec{u} = 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$ y $\vec{v} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$. ¿Cuántos vectores unitarios \hat{A} existen con esta propiedad?

5. Definamos los vectores:

$$\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$$

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + \hat{y})$$

a) Grafique \vec{s} y \vec{t} .

b) Evalúe $s = |\vec{s}|$ y $t = |\vec{t}|$.

c) Encuentre el ángulo entre \vec{s} y \vec{t} .

Comentario: Note que \vec{s} y \vec{t} pueden considerarse como un nuevo conjunto de ejes de referencia (\hat{s}, \hat{t}) . Para indicar que \vec{s} y \vec{t} son vectores unitarios se ha usado la convención de reemplazar las flechas por tongos.

d) Considere los vectores $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y}$ y $\vec{B} = 2\hat{x} - 3\hat{y}$. Exprese estos vectores en términos de los nuevos vectores unitarios, es decir, escriba \vec{A} y \vec{B} de la forma

$$\vec{A} = a_s\hat{s} + a_t\hat{t}$$

$$\vec{B} = b_s\hat{s} + b_t\hat{t}$$

y evalúe las constantes a_s , a_t , b_s y b_t .

e) Evalúe $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de dos maneras distintas: primero usando las componentes respecto al sistema de referencia (\hat{x}, \hat{y}) y luego usando las componentes respecto al sistema de referencia (\hat{s}, \hat{t}) .

6. Sea $\vec{A} = \hat{x} + 3\hat{z} - 2\hat{y}$. Encuentre un vector \vec{B} en el plano \hat{x}, \hat{y} que sea perpendicular a \vec{A} .

Respuesta: $\vec{B} = \alpha (2\hat{x} + \hat{y})$, donde α es un número real no nulo.

7. Considere la siguiente situación en nuestro espacio físico de tres dimensiones: Desde cierto origen emergen cuatro vectores de igual tamaño, de manera que los ángulos entre cualquier par de vectores sean iguales. Encuentre el valor de ese ángulo. (Para resolver este problema relaciónelo con el de las diagonales de un cubo considerado en la sección 3.1.)

Comentario: Las “puntas” de los cuatro vectores forman los vértices de un tetraedro regular. La molécula de metano CH_4 es un ejemplo de lo arriba planteado. En tal molécula el átomo de carbono se encuentra al centro de los cuatro átomos de hidrógeno que están distribuidos de la manera más regular posible.

8. Encuentre el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de largo, si el vector suma forma un ángulo de 50° con el mayor de ellos. Encuentre también la magnitud del vector suma.
9. La suma de dos vectores mide 30 unidades y forma ángulos de 25° y 50° con ellos. ¿Cuál es la magnitud de cada uno de los vectores?
10. Suponga que la posición \vec{r} de una partícula en función del tiempo t viene dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r_0 \left(\cos \left(\frac{t}{t_0} \right) \hat{x} + \sin \left(\frac{t}{t_0} \right) \hat{y} \right),$$

con $t_0 = 1$ min y $r_0 = 3$ cm. ¿Qué trayectoria recorre la partícula? ¿Cuánto tiempo tarda la partícula en volver al punto de partida?

11. Supongamos que la posición \vec{r} de una partícula en función del tiempo t viene dada por

$$\vec{r} = at\hat{x} + (b - ct^2)\hat{y},$$

con $a = 2$ m/s, $b = 10$ m y $c = 9.8$ m/s². Grafique la trayectoria. ¿Qué tipo de trayectoria es? ¿En qué instante la partícula cruza el eje \hat{x} ?

12. Un barco a vapor se dirige hacia el sur con una velocidad $v_b = 25$ km/h en un área donde sopla un viento desde el suroeste con velocidad $v_0 = 18$ km/h. Encuentre el ángulo θ_0 que forma el humo emitido por el vapor con la dirección norte-sur (ver figura 3.15).

Respuesta: $\theta_0 \simeq 18,64^\circ$

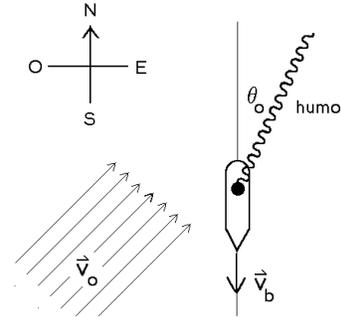


Figura 3.15

13. Considere un disco de radio $R = 50$ cm que rueda sobre una recta (el eje \hat{x}) con una velocidad angular $\omega = 2$ s⁻¹. Considere un punto P ubicado en el perímetro del disco, y designe por \vec{r} al vector que va desde el origen hacia el punto P . Encuentre una expresión para $\vec{r} = \vec{r}(t)$; suponga que en el instante $t = 0$ el punto P está en el origen.

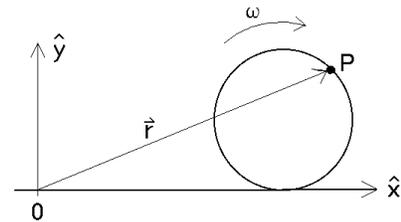


Figura 3.16

Haga un gráfico de $\vec{r}(t)$ para el intervalo $t \in [0\text{ s}, 10\text{ s}]$. ¿Cuánto tarda la rueda en dar una vuelta completa?

14. Una partícula recorre una trayectoria circular en el plano $x-y$, cuyo radio es $R = 5$ m con una velocidad constante $v_0 = 15$ m/s y en el sentido del reloj. Encuentre el vector posición $\vec{r}(t)$, el vector velocidad $\vec{v}(t)$ y el vector aceleración $\vec{a}(t)$ (en coordenadas cartesianas) si en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en $\vec{r}_0 = -5\hat{y}$.

15. Considere un disco de radio R en el plano $x-y$. Sea θ el ángulo de un punto ubicado en el borde del disco respecto al eje \hat{x} . Suponga que el disco gira con una *aceleración angular* constante α_0 (es decir, $\ddot{\theta}(t) = \alpha_0$). Encuentre la velocidad y aceleración de P en función del tiempo. Suponga que en el instante $t = 0$ el punto P se encontraba en reposo sobre el eje \hat{x} .

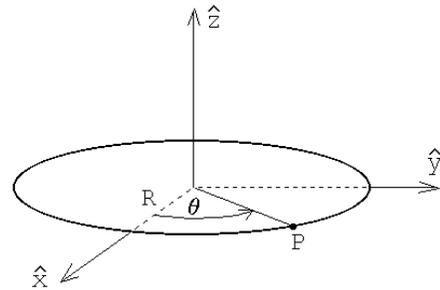


Figura 3.17

16. Estime (en m/s y km/h) la velocidad máxima con la que usted puede lanzar

una piedra.

17. Una pelota sale rodando del descanso de una escalera con velocidad horizontal $v_0 = 1.52 \text{ m/s}$. Los escalones son de 20 cm de alto y 20 cm de ancho. ¿Cuál será el primer escalón al que llegue la pelota? Dibuje una figura para ilustrar el problema.

18. Un cañón se encuentra a una distancia D de un edificio. Encuentre el ángulo de elevación θ_0 y la velocidad v_0 de la bala de manera que el proyectil entre horizontalmente por la ventana que se encuentra a una altura h (ver figura 3.18).

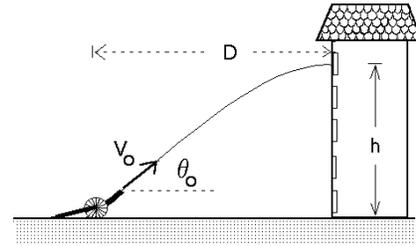


Figura 3.18

19. Considere un río de ancho L en el cual el agua fluye con velocidad v_0 . Un nadador recorre el trayecto $A \rightarrow B \rightarrow A$, mientras que un segundo nada el trayecto $C \rightarrow D \rightarrow C$ (ver figura 3.19). Los puntos C y D están anclados fijamente al fondo del río y la separación entre C y D es la misma que entre A y B . Si ambos nadan con la misma velocidad v respecto al agua, ¿quién ganará la carrera?

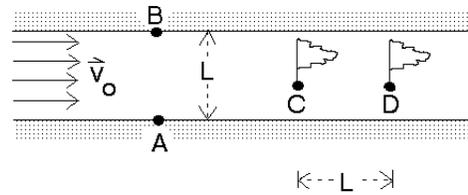


Figura 3.19

20. Un pato vuela horizontalmente en línea recta con velocidad v_p a una altura h . Un niño con una honda, que puede disparar piedras con una velocidad v_0 , hace uso de su arma en el instante que el pato lo sobrevuela.

a) ¿Cuál es el ángulo respecto a la normal con el cual debe disparar la piedra?

b) ¿Qué distancia d alcanza a recorrer el pato antes de ser alcanzado por el proyectil?

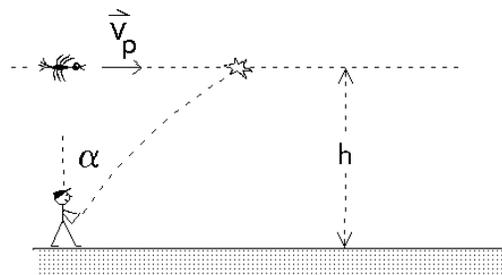


Figura 3.20

- (c) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener el proyectil para que éste llegue al pato?

21. Se lanza un proyectil con cierto ángulo de elevación θ_0 . El alcance del proyectil es R (ver figura 3.21). Si se desprecia el roce con el aire, demuestre que la trayectoria viene dada por la ecuación

$$y(x) = -\left(\frac{\tan \theta_0}{R}\right)x^2 + x \tan \theta_0 .$$

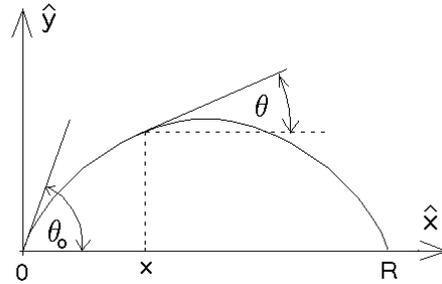


Figura 3.21

Note que esta ecuación corresponde a una parábola. Demuestre también que el ángulo de la tangente en el punto x viene implícitamente dado por

$$\tan \theta = \left[1 - \frac{2x}{R}\right] \tan \theta_0 .$$

22. Grafique en papel polar la trayectoria de una partícula si su posición en coordenadas polares, en función del tiempo, viene dada por:

a)
$$\begin{cases} r(t) = r_0 \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con $r_0 = 1$ [m] y $t_0 = 2\pi$ [s].

b)
$$\begin{cases} r(t) = At \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con $A = 1/(4\pi)$ [m/s] y $t_0 = 2\pi$ [s].

c)
$$\begin{cases} r(t) = r_0 + B \cos(t/2t_0) \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con $r_0 = 1$ [m], $t_0 = 2\pi$ [s] y $B = 0.5$ [m].

23. Una partícula se encuentra en el instante $t = 0$ en el lugar $\vec{r}(0) = 10\hat{y}$ cm y tiene una velocidad $\vec{v}(0) = 2\hat{x}$ cm/s. La aceleración en todo instante es

$$\vec{a} = -G \frac{\vec{r}}{r^3} ,$$

con $G=200$ cm/s². Encuentre numéricamente la trayectoria de la partícula para $t \in [0, 3.5$ s]. ¡Grafique!

Indicación: programe las siguientes relaciones

$$\vec{r}(t + \Delta) \simeq \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta$$

$$\vec{v}(t + \Delta) \simeq \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \Delta$$

$$\vec{a}(t + \Delta) = -G\vec{r}(t + \Delta)/r^3(t + \Delta).$$

24. Calcule la máxima distancia Δ que un objeto puede alejarse del borde de un “peldaño” para evitar ser alcanzado por los objetos lanzados con velocidad v_0 desde el punto A . La distancia desde A al borde del peldaño es L y la altura de éste es H .

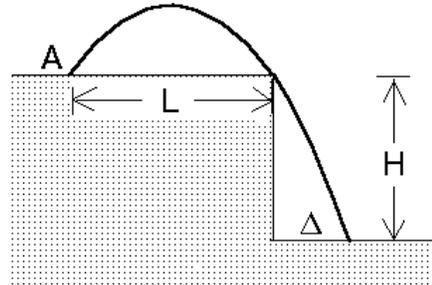


Figura 3.22

25. Un proyectil se lanza con velocidad inicial v_0 y ángulo de lanzamiento θ , ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de ancho a conocido, pero altura h desconocida, rozando sus dos vértices A y B (ver figura 3.23). Encuentre la distancia d que separa el punto de lanzamiento con la pared más cercana al obstáculo. También encuentre la altura h de la barrera.

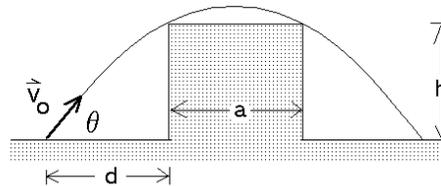


Figura 3.23

26. Una partícula tiene un vector posición dado por $\vec{r} = 30 \cdot t \hat{x} + (40 \cdot t - 5 t^2) \hat{y}$, donde r está en metros y t en segundos. Encuentre los vectores velocidad y aceleración instantáneas.

27. Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

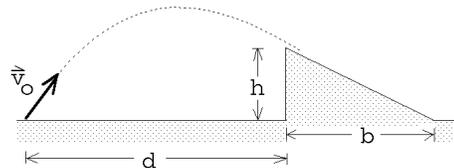


Figura 3.24

Respuesta:

$$\vec{v} = d \sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}} \hat{x} + (2b+d) \sqrt{\frac{hg}{2b(b+d)}} \hat{z} .$$

28. Supongamos que $r(t)$ y $\theta(t)$ son las coordenadas polares de un punto que se mueve en un plano. Demuestre que la velocidad de tal punto, en coordenadas cartesianas, viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left[\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right] \hat{x} + \left[\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right] \hat{y} \\ &= \left[\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \right] \hat{x} + \left[\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \right] \hat{y} . \end{aligned}$$

Encuentre la velocidad en coordenadas cartesianas para los tres casos del problema 22.

29. Una partícula tiene aceleración constante

$$\vec{a} = (6 \cdot \hat{x} + 4 \cdot \hat{y})[\text{m/s}^2] .$$

En $t = 0$ la velocidad es cero y el vector posición es $\vec{x}_0 = 10 \cdot \hat{x}$ [m].

- Encuentre los vectores velocidad y posición en un instante t cualquiera.
 - Encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano y dibújela.
30. De un cañón se disparan dos proyectiles: el primero con un ángulo de elevación $\theta_1 = 60^\circ$ y el segundo con un ángulo de elevación $\theta_2 = 45^\circ$. La velocidad de los proyectiles, al emerger del cañón es $v_0 = 250$ m/s. Despreciando la resistencia del aire, encuentre el intervalo de tiempo entre los dos disparos que asegure que los proyectiles choquen.

31. La figura indica la conexión en una caja de cambios de un automóvil. Encuentre la razón entre los radios de ambos engranajes, que es la misma para ambos pares, si uno desea que en la primera marcha, con el motor a 2000 RPM, el auto tenga una velocidad de 30 Km/h. Por cada cinco vueltas en la salida de la caja de cambios, las ruedas, cuyo radio es de 50 cm, dan una vuelta.

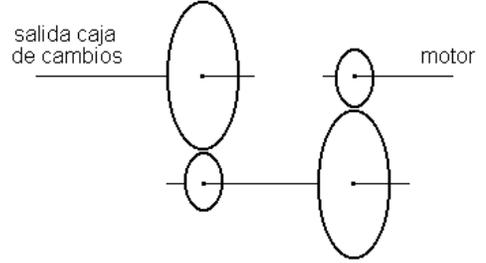


Figura 3.25

32. Consideremos una turbina hidráulica. Supongamos que el agua ingresa a la turbina con una velocidad \vec{v} , con $v = |\vec{v}| = 15 \text{ m/s}$, formando un ángulo con la tangente al rotor en el punto de entrada $\alpha = 30^\circ$ (ver figura 3.26). Suponga además que el radio externo del rotor es $R = 2 \text{ m}$ y que, en su estado estacionario, el rotor gira a 30 RPM (o sea, con frecuencia $\nu = 0,5 \text{ s}^{-1}$). La forma de las paletas de un rotor de una turbina hidráulica es tal que la velocidad relativa entre el agua que ingresa a la turbina y la paleta en el punto de entrada, sea tangente a la paleta (de esta manera el agua ingresa a la turbina sin choques).

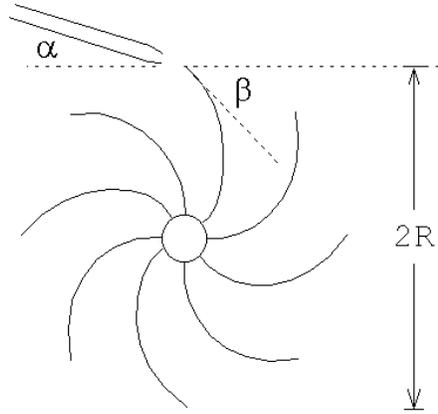


Figura 3.26

Determine el ángulo β entre la paleta del rotor y la tangente al rotor en el punto de entrada de agua. Encuentre también la velocidad relativa v_r del agua (respecto a la paleta) en ese punto.

Respuesta:
$$\tan \beta = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - 2\pi R\nu} ; \quad v_r = 10,06 \text{ [m/s]} .$$

33. Una partícula se mueve en el plano x - y con una velocidad (que depende de la posición) $\vec{v} = a\hat{x} + bx\hat{y}$, donde a y b son constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen ($x(0) = y(0) = 0$). Encuentre la ecuación de la trayectoria $y(x)$.

Respuesta:
$$y(x) = \frac{b}{2a}x^2 .$$

34. Un mono está colgado a una altura h de un árbol. Un cazador apunta con una cerbatana directamente al mono desde una distancia d (ver figura 3.27). En el mismo instante en que el cazador sopla el dardo envenenado el mono se suelta del árbol. ¿Sobrevivirá el mono? (Desprecie el efecto de fricción del dardo con el aire)

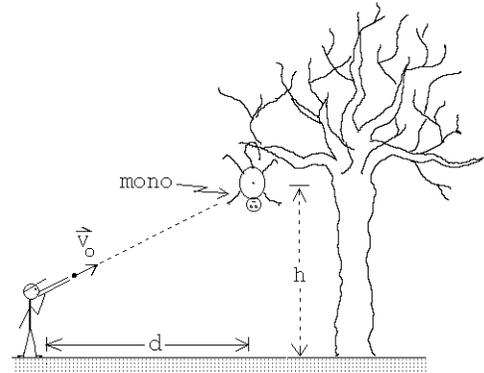


Figura 3.27

35. Una rueda gira en torno a un eje horizontal a 30 rpm ($1 \text{ rpm} = \text{una revolución por minuto} = 1 \text{ vuelta por minuto}$), de manera que su parte inferior queda a nivel del suelo, pero sin rozarlo. (O sea, la rueda gira sin rodar).

Sobre el borde de la rueda se han adosado dos piedrecitas, en posiciones diametralmente opuestas.

- Suponga que cuando el diámetro que une a las piedras pasa por la posición horizontal, éstas se desprenden del borde, en forma simultánea (figura 3.28a), y una de ellas llega al suelo antes que la otra. Se observa que durante el intervalo de tiempo entre la llegada al suelo de una y otra piedra, la rueda da una vuelta completa. Determine el radio de la rueda.
- ¿Qué ángulo α debe formar la línea que une a ambas piedras con la vertical para que, si las piedras se desprenden en esa posición, lleguen al suelo al mismo tiempo?

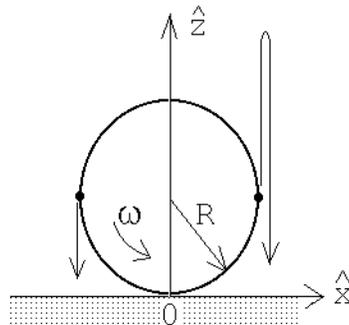


Figura 3.28a

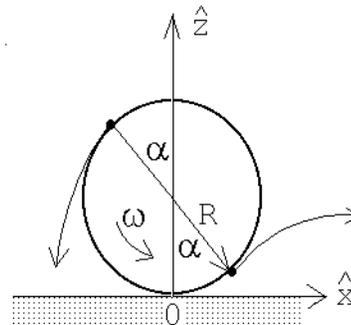


Figura 3.28b

36. Un globo sonda es soltado desde la tierra y se aleja con velocidad constante en trayectoria recta la cual forma un ángulo de 30° con la vertical. La velocidad del viento con respecto al suelo es de 10 [km/h] , estable, hacia el norte.

- a) Calcule la velocidad del globo respecto al aire.
- b) Calcule el tiempo que tarda el globo en alcanzar una altura de 1 km con respecto al suelo.

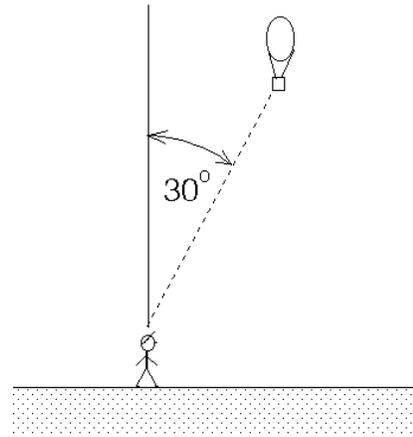


Figura 3.29

37. * Una rueda de radio $0,25 \text{ [m]}$ ha estado girando en forma uniforme a razón de una revolución por segundo. En cierto instante la rueda es frenada y se detiene, uniformemente, después de haber girado media vuelta. Calcule la aceleración tangencial y centrípeta de un punto fijo en el borde de la rueda cuando ésta comienza a ser frenada.

38. Dos proyectiles son lanzados simultáneamente desde el mismo punto en un plano horizontal. Los proyectiles son lanzados con igual rapidez y con ángulos con respecto a la horizontal α y β , respectivamente ($\alpha < \beta$). Ambos proyectiles llegan al mismo punto en la horizontal pero a instantes diferentes. Demuestre que lo descrito es posible y encuentre la razón entre los tiempos de llegada. (Expresar el resultado en términos de α).

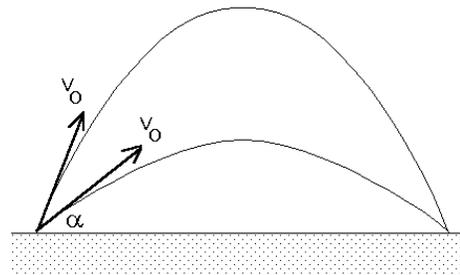


Figura 3.30

39. Un proyectil es lanzado desde un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación con la horizontal es α . Si el proyectil es lanzado con rapidez v_0 y con un ángulo de eyección β con respecto al plano (ver figura 3.31), calcule el alcance D del proyectil a lo largo del plano.

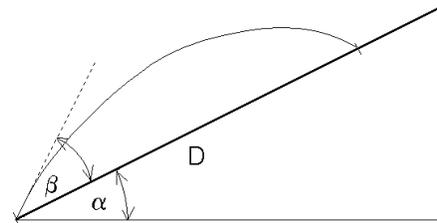


Figura 3.31

40. El *avix*, una apetitosa ave del tiempo de las cavernas, desarrolló por un proceso de evolución, una coraza en la parte inferior de su cuerpo de manera que los trogloditas no podían cazarlas con arcos y flechas.

Ogú, un ingenioso troglodita, desarrolló un método para cazarla aprovechando que el ave no tiene coraza sobre el dorso. El disparaba flechas que impactarían al *avix* por arriba.

Dados la velocidad del ave v_{ave} , la altura h a la que vuela, la velocidad v_0 con que la flecha es impulsada por el arco y el ángulo θ (respecto a la horizontal) con que el troglodita dispara la flecha, calcular:

- El tiempo que le toma a la flecha pasar por la altura h la segunda vez.
- El valor de la distancia d entre el ave y la vertical por el punto de lanzamiento, en el instante del lanzamiento, para que la flecha impacte al ave.

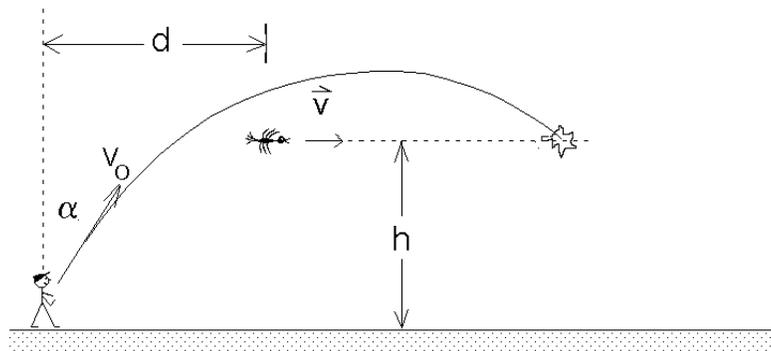


Figura 3.32

41. Se lanzan dos proyectiles A y B de modo que tienen igual alcance horizontal L . A se lanza horizontalmente desde una altura h , que es igual a la altura máxima que alcanza B durante su vuelo (ver figura 3.33)

- Calcule la razón entre los tiempos de vuelo de A y B .
- Calcule la razón entre las componentes horizontales de la velocidad de los proyectiles.
- ¿Cuál es la rapidez (magnitud de la velocidad) de cada uno de ellos al llegar al suelo?

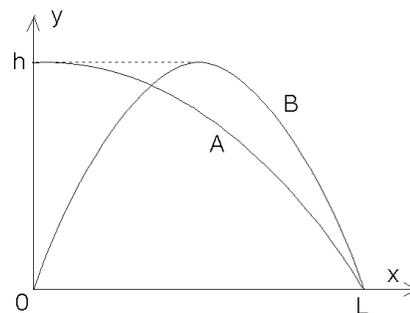


Figura 3.33

3.5. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 18.

Coloquemos el origen en el lugar en que está ubicado el cañón y sean \hat{x} y \hat{z} los ejes horizontal y vertical, respectivamente. La posición de la bala (siendo $t = 0$ el instante del disparo) vendrá dada por las coordenadas

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \theta_0 t \\ y \\ z(t) &= v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 . \end{aligned}$$

La componente vertical de la velocidad de la bala será

$$v_z(t) = v_0 \sin \theta_0 - gt .$$

Sea t^* el instante en que la bala penetra por la ventana. En ese instante deben cumplirse las relaciones

$$\begin{aligned} y \\ v_0 \cos \theta_0 t^* &= D \\ v_0 \sin \theta_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} &= h . \end{aligned}$$

La condición de que la bala penetre en forma horizontal por la ventana exige que en t^* la velocidad vertical de la bala sea nula. O sea, además de las dos relaciones anteriores, debe cumplirse que

$$v_0 \sin \theta_0 - gt^* = 0 .$$

Despejando t^* de la última relación y reemplazándola en las dos anteriores se obtiene

$$v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = Dg \tag{1}$$

y

$$v_0^2 \sin^2 \theta_0 = 2hg . \tag{2}$$

Dividiendo la última por la antepenúltima se encuentra

$$\tan \theta_0 = \frac{2h}{D} .$$

Esta relación permite encontrar el ángulo de elevación del disparo θ_0 . Para determinar el valor de v_0 elevamos al cuadrado la ecuación (1):

$$v_0^4 \sin^2 \theta_0 (1 - \sin^2 \theta_0) = D^2 g^2 .$$

Despejando $\sin^2 \theta_0$ de (2), sustituyéndolo en la última ecuación se encuentra para v_0 la expresión

$$v_0^2 = \frac{(D^2 + 4h^2)g}{2h} .$$

Solución al problema 30.

Sea $x-y$ el plano en que se mueven los proyectiles, \hat{z} el eje que apunta hacia arriba y coloquemos el origen en el lugar en que se encuentra el cañón.

Sea t el tiempo transcurrido desde el disparo de la bala # 1. La posición de esa bala viene dada por

$$\begin{cases} z_1(t) &= v_0 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_1(t) &= v_0 \cos \theta_1 t . \end{cases}$$

Sea t' el tiempo transcurrido desde el disparo de la bala # 2. La posición de la segunda bala viene, análogamente, dada por

$$\begin{cases} z_2(t') &= v_0 \sin \theta_2 t' - \frac{1}{2}gt'^2 \\ x_2(t') &= v_0 \cos \theta_2 t' . \end{cases}$$

Para que las balas choquen deben coincidir las dos coordenadas de ambas balas, o sea, debe cumplirse

$$\cos \theta_1 t = \cos \theta_2 t' \quad (3.3)$$

y

$$v_0 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta_2 t' - \frac{1}{2}gt'^2 . \quad (3.4)$$

Despejando t' de la primera de estas ecuaciones y reemplazándola en la segunda se obtiene

$$v_0 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta_2 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} t - \frac{1}{2}g \frac{\cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2} t^2 .$$

Luego dividimos por t , multiplicamos por $\cos \theta_2$ y reordenamos los términos:

$$v_0 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1) = \frac{gt}{2 \cos \theta_2} (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1) . \quad (3.5)$$

Sea Δt el tiempo entre ambos disparos. Se tiene entonces que $t' = t - \Delta t$. Sustituyendo esto en (5.14) se encuentra que

$$t = \left(\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_2 - \cos \theta_1} \right) \Delta t . \quad (3.6)$$

Sustituyendo esta relación a su vez en (5.17), se obtiene:

$$v_0 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1) = \frac{g}{2} \frac{(\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1)}{\cos \theta_2 - \cos \theta_1} \Delta t ,$$

o sea,

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} \simeq 11 \text{ s} .$$

Solución al problema 33.

Sea $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ la posición de la partícula. Derivando respecto al tiempo se encuentra su velocidad:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y}.$$

Por otra parte, de acuerdo al enunciado, sabemos que

$$\vec{v}(t) = a\hat{x} + bx(t)\hat{y}.$$

Igualando ambas expresiones, componente a componente, obtenemos

$$\dot{x}(t) = a$$

y

$$\dot{y}(t) = bx(t).$$

La primera de estas expresiones indica que, para la componente a lo largo del eje \hat{x} , el movimiento es uniforme, o sea,

$$x(t) = x(0) + at.$$

Pero, de acuerdo al enunciado, $x(0) = 0$, luego $x(t) = at$. Sustituyendo esto en la ecuación para $\dot{y}(t)$ se encuentra

$$\dot{y}(t) = bat.$$

De aquí se deduce que el movimiento a lo largo del eje \hat{y} es uniformemente acelerado, luego

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{2}bat^2 = \frac{1}{2}bat^2.$$

De esta manera hemos encontrado que las coordenadas x e y de la partícula, en función del tiempo, vienen dadas por

$$x = at$$

$$y = \frac{ab}{2}t^2.$$

Despejando t de la primera de estas ecuaciones y reemplazándolo en la segunda, se obtiene finalmente la ecuación de la trayectoria

$$y = y(x) = \frac{b}{2a}x^2.$$

Solución al problema 36.

a) Sea v_0 la velocidad del globo respecto a un observador fijo en la Tierra. La velocidad vertical y horizontal serán

$$v_z = v_0 \cos 30^\circ = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2}$$

y

$$v_x = v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2} ,$$

respectivamente. La componente horizontal de la velocidad del globo debe coincidir con la del viento, o sea, $v_x = v_0/2 = v_v$. De aquí se deduce que $v_0 = 2v_v = 20$ km/h.

La componente vertical de la velocidad del globo es precisamente la velocidad con que éste se mueve respecto al aire (su movimiento horizontal se debe al viento). Esta velocidad vertical viene dada por $v_z = v_0 \sqrt{3}/2 = 17,3\dots$ km/h.

b) Conociendo v_z es fácil evaluar el tiempo t^* que demora el globo en alcanzar una altura de $h = 1$ km. Este viene dado por

$$t^* = \frac{h}{v_z} \simeq \frac{1}{17,3} \quad [\text{h}] \simeq 3,46 \quad [\text{minutos}] .$$

Solución al problema 37.

Sea ω_0 la velocidad angular de la rueda antes de ser frenada: $\omega_0 = 2\pi \text{ s}^{-1}$. Sea α la aceleración angular que sufre la rueda al ser frenada. Si $t = 0$ es el instante en que se aplica el freno, se tiene que la velocidad angular vendrá dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t ,$$

mientras que el ángulo que rotará la rueda será

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 .$$

Sea t^* el tiempo que tarda la rueda en quedar en reposo. De acuerdo al enunciado del problema, debe cumplirse que $\omega(t^*) = 0$ y $\theta(t^*) = \pi$, o sea,

$$\pi = \omega_0 t^* + \frac{1}{2} \alpha t^{*2} \quad \text{y} \quad \omega_0 + \alpha t^* = 0 .$$

De estas ecuaciones podemos despejar t^* y α . En particular para la aceleración angular se obtiene

$$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\pi} = -2\pi \quad [\text{s}^{-2}] .$$

La magnitud de la aceleración tangencial y centrípeta (ver sección 3.3) vienen dadas por $a_t = R\alpha$ y $a_c = -R\omega^2$. Usando estas expresiones con $R = 0,25$ [m] y $\omega = \omega_0 = 2\pi \text{ s}^{-1}$ se encuentra que la aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto fijo en el borde de la rueda, cuando ésta comienza a ser frenada, son $a_t = -1,57$ [m/s²] y $a_c = 9,87$ [m/s²].

Solución al problema 41.

a) Lo que A tarda en llegar hasta el suelo es igual a lo que demora B desde su punto máximo (ambos ahí tienen una velocidad vertical nula). B demora lo mismo en subir que en bajar, luego la razón entre los tiempos de vuelo de A y B es

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{2}.$$

b) La velocidad horizontal de ambos proyectiles es constante. Ambos recorren la misma distancia horizontal y como B para ello demora el doble que A , se deduce que la velocidad horizontal de B debe ser la mitad de la de A .

c) La velocidad vertical con que A y B llegan al suelo es la misma (la de una caída libre de una altura h). Esta es $v_v = \sqrt{2gh}$. El tiempo de caída de A es $t^* = \sqrt{(2h/g)}$. En ese tiempo A avanza en dirección horizontal una distancia horizontal L . Como la velocidad horizontal es uniforme se deduce que ésta (para la partícula A) debe ser $v_h = L/t^* = L\sqrt{g/(2h)}$. La rapidez de A cuando llega al suelo es, por lo tanto,

$$|\vec{v}_A(t^*)| = \sqrt{v_v^2 + v_h^2} = \sqrt{2gh + \frac{L^2g}{2h}}.$$

Para la partícula B la componente vertical de la velocidad es la misma, mientras que la componente horizontal es la mitad de la de A , o sea,

$$|\vec{v}_B(t^*)| = \sqrt{v_v^2 + (v_h/2)^2} = \sqrt{2gh + \frac{L^2g}{8h}}.$$

Capítulo 4

Las leyes de Newton

versión 19 agosto 2010

Hasta el momento, sólo nos hemos preocupado de *describir* el movimiento. Ahora que tenemos las herramientas adecuadas para ello, podemos ocuparnos del problema siguiente, que es estudiar las *causas* del movimiento, es decir, estudiaremos la *dinámica* del movimiento.

En principio, es sencillo: basta con enunciar las así llamadas tres *Leyes de Newton*. Sin embargo, en realidad no es tan simple, y de hecho dedicaremos este capítulo, y prácticamente todo el resto de este curso, a analizar sus consecuencias. El resultado, es decir, la descripción de la Naturaleza basada en las leyes de Newton, se denomina *Mecánica Clásica*. En estricto rigor, es posible hacer ciertas objeciones desde el punto de vista lógico a estudiar la mecánica partiendo de las leyes de Newton. Existen alternativas a esta formulación de la mecánica clásica, pero son más abstractas y por ende no tan adecuadas para un primer curso de Mecánica. Además, esta forma de proceder corresponde mejor al desarrollo histórico de la Física

Pero antes incluso de enunciar las famosas leyes de Newton, debemos discutir algunos conceptos preliminares.

4.1. Espacio y tiempo

En la *Mecánica Newtoniana* se supone que las partículas, como también los observadores, “viven” en un espacio *euclidiano tridimensional*. Que sea tridimensional no es una suposición realmente sorprendente, ya que nuestra experiencia avala que, para determinar únicamente la posición de una partícula, necesitamos tres coordenadas. Por su parte, que sea euclidiano significa que se cumplen los cinco postulados de Euclides. En particular, el quinto postulado. Éste indica que por un punto externo

a una recta pasa sólo una recta paralela a la recta original.¹ Estos cinco postulados determinan completamente lo que se denomina Geometría Euclidiana, que es la que estudiaron los griegos naturalmente, y que nos parece completamente natural en la vida cotidiana. Por ejemplo, a partir de estos postulados (¡y en particular el quinto!) es posible demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre 180° . Otra característica de un espacio euclidiano es, por ejemplo, que la suma de dos vectores de desplazamiento es conmutativa.

Es interesante notar que es posible considerar también espacios no euclidianos. Un ejemplo es la superficie de una esfera. Sobre una esfera es imposible trazar “una recta”, en el sentido tradicional. Podemos salvar este punto notando que una recta, en el espacio euclidiano, es el camino de menor longitud entre dos puntos dados. Si usamos ese hecho para definir una “recta”, entonces sí podemos trazar “rectas” sobre una esfera: el camino de menor distancia entre dos puntos dados corresponde en tal caso a los *meridianos* (técnicamente, para una superficie cualquiera se dice que el camino de menor longitud entre dos puntos dados es una *geodésica*). Y ahora nos preguntamos: ¿es posible trazar, por un punto externo a un meridiano dado, otro meridiano paralelo (es decir, que no se cruce con el otro meridiano en ningún punto)? La respuesta es no, y sabemos por qué: los dos meridianos se encontrarán invariablemente en los polos. Vemos que, sobre una esfera, el quinto postulado de Euclides no se cumple: no es posible trazar ninguna “recta” paralela a una recta dada. A pesar de ello, es posible construir una geometría completamente consistente desde el punto de vista matemático, sólo que el espacio resultante es no euclidiano. Este caso fue estudiado por Riemann. En un espacio de Riemann se presentan varias situaciones curiosas. Por ejemplo, al viajar en línea “recta” en ese espacio, en algún instante uno vuelve al punto de partida. Además, la suma de los ángulos interiores de un triángulo dibujado sobre tal esfera es mayor a 180° y también la suma de dos vectores es no conmutativa.

También es posible violar el quinto postulado de Euclides en el sentido opuesto, es decir, proponer un espacio en el cual es posible trazar *infinitas* rectas paralelas a una recta dada. Esto da origen a la geometría de Lobachevsky, y corresponde a una superficie tipo silla de montar.

El espacio que Newton usa para desarrollar la mecánica no sólo es euclidiano sino que también homogéneo e isótropo. Esto significa que todos los lugares del espacio son equivalentes y que el espacio tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.

Para desarrollar la mecánica también es indispensable decir algo sobre el concepto de tiempo. Newton usó la suposición de que: “*El tiempo matemático, absoluto y verdadero fluye, debido a su propia naturaleza, parejamente y en forma independiente a cualquier agente externo*”. Esta suposición también nos parece completamente natural, avalada por nuestra experiencia: el hecho de que el tiempo avanza homogénea y continuamente, independiente de la posición de un observador, de su velocidad, de cualquier cosa.

Ahora bien, notemos que Newton no nos entrega precisamente una noción de tiempo. De hecho, nos dice que el tiempo fluye “parejamente”, pero sin conocer de

¹En realidad, Euclides formuló el quinto postulado de otro modo, pero ésta es la formulación quizás más famosa, debida a Ptolomeo.

antemano lo que es el tiempo, la palabra “parejamente” no tiene sentido. De modo que, desde el punto de vista estrictamente lógico, la concepción del tiempo anterior es insatisfactoria. Pero, de todos modos, no es fácil decir algo sobre la noción *tiempo* que sea mejor o que clarifique lo expresado por Newton, consecuentemente, no intentaremos hacerlo aquí. Más bien apelaremos a nuestra intuición y experiencia cotidiana sobre lo que entendemos como “tiempo”.

Hay muchos modos de verificar que la noción Newtoniana del tiempo como algo independiente de todos los observadores es “correcta” o por lo menos “plausible”. Si dos personas se encuentran y sincronizan sus relojes en un momento dado, sabemos que sus relojes permanecerán sincronizados siempre, independiente de lo que hagan. En eso se basan todas nuestras actividades. Si decimos que una clase comienza a las 10 de la mañana, un programa de televisión a las 9 de la noche, o quedamos de encontrarnos con un amigo en 20 minutos más, dichas afirmaciones tienen un carácter absoluto para todos.

Este hecho, que relojes inicialmente sincronizados permanecen sincronizados, es básico en la mecánica newtoniana. Por ejemplo, el movimiento rotatorio de la Tierra en torno al Sol se usa para definir la unidad de tiempo llamada *año*; el movimiento de la Tierra en torno a su propio eje puede usarse para definir *día solar*. Un péndulo, o una masa colgada de un resorte, también puede usarse como reloj.

Supongamos que un observador O tiene numerosos relojes idénticos a su disposición, que los ha sincronizado y que tales relojes no modifican su ritmo si se los aleja, cada uno de los demás. De esta manera el observador O puede tener en todos los lugares del espacio relojes sincronizados con el que él posee. Para el observador O , dos eventos que ocurren en lugares distintos, serán *simultáneos* si los relojes ubicados en los dos lugares marcan la misma hora al ocurrir los eventos. Una consecuencia de la concepción newtoniana del tiempo es que si dos eventos son simultáneos para un observador, también lo serán para todos los demás observadores. En la mecánica newtoniana el concepto *simultaneidad* tiene una validez absoluta.

Como hemos dicho, todas éstas son suposiciones. Razonables, pero suposiciones. Validadas, en todo caso, por nuestra experiencia cotidiana. Es oportuno indicar, sin embargo, que más adelante (en futuros cursos) nos veremos forzados a abandonar este concepto intuitivo del tiempo. Y no solamente del tiempo; en algún momento nos veremos obligados a revisar muchos otros conceptos que ya creíamos tener claramente establecidos. La razón esencial es que nuestra experiencia cotidiana sólo alcanza a un conjunto limitado de fenómenos. Las leyes de Newton no son necesariamente (y de hecho no lo son) aplicables a fenómenos que ocurren en el mundo microscópico o en escalas cosmológicas, fracasando estrepitosamente cuando los sistemas son muy pequeños o las partículas se desplazan a velocidades comparables a la velocidad de la luz. No obstante, esto no invalida la necesidad de nuestro estudio: la mecánica newtoniana es una buena descripción para una gran diversidad de fenómenos, y sus éxitos (aunque ahora sepamos que están restringidos a un cierto ámbito de fenómenos) son indiscutibles.

4.2. Las leyes de Newton

Éstos son los postulados fundamentales de la mecánica que Isaac Newton publicó en su libro “*Principia Mathematica*” en 1687.

Primera ley:

Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que una fuerza, que actúa sobre el cuerpo, lo conmine a cambiar de estado.

Si miramos con cuidado, notamos que esta ley está escrita en términos de un concepto aún no definido, la *fuerza*. Sólo podemos apelar a nuestro conocimiento intuitivo sobre qué es una fuerza: una fuerza es lo que hacemos, por ejemplo, al usar nuestros músculos para empujar un objeto.

Estamos diciendo entonces que mientras no haya una fuerza sobre un objeto, éste va a seguir en reposo si está en reposo, o en movimiento rectilíneo uniforme si está en movimiento. Es decir, si no hay fuerzas sobre un objeto éste tendrá velocidad constante (nula o no). Este principio, también conocido como *ley o principio de inercia*, ya había sido enunciado por Galileo.

Ahora bien, consideremos la siguiente situación: estamos dentro de un auto en reposo, y observamos un árbol en la calle. Nadie empuja o tira del árbol, y éste no se mueve. Eso es precisamente lo que dice la primera ley de Newton. Pero ahora el auto *acelera*. Repentinamente, vemos que, a pesar de que nadie empuja al árbol, éste se mueve. Es decir, en nuestro sistema de referencia, dentro de ese automóvil, el árbol acelera a pesar de que no hay fuerzas sobre él. ¿Qué significa esto, entonces? ¿Qué la primera ley de Newton no es cierta? Efectivamente. La primera ley de Newton *no se cumple* en sistemas de referencia acelerados (como nuestro auto cuando parte). Esto no significa que un sistema de referencia acelerado “sea malo”; simplemente significa que la primera ley de Newton no se cumple. Diremos que un sistema de referencia en que se cumple la primera ley de Newton es un *sistema de referencia inercial*. Por lo tanto, podemos considerar que la primera ley de Newton no es tanto una afirmación sobre lo que le ocurre a un cuerpo cuando aplico o no una fuerza, sino que, en realidad, es la *definición* de sistema de referencia inercial.

En general en Física, y lo haremos así en este curso, preferimos trabajar con sistemas de referencias inerciales, porque la descripción es más sencilla. En nuestro problema del árbol visto desde un auto acelerando, cualquier explicación sobre las causas del movimiento del árbol será inverosímil, pues de verdad no hay nada en el Universo que haya intentado mover el árbol. Claro, si alguien ve esta situación desde la acera, va a ser evidente para ese observador adicional que, desde dentro del auto, el árbol *parece* acelerar porque en realidad es el auto el que acelera, pero hacer Física en el interior del auto significa trabajar sólo sobre observaciones que se pueden

realizar desde el interior del auto. Es posible, sin embargo, hacer Física en sistemas no inerciales, lo cual será tema de un capítulo posterior en este mismo curso. No es que los sistemas no inerciales no sirvan para hacer Física, sino simplemente que la descripción es más complicada.

Para enunciar la segunda ley debemos definir previamente una cantidad física nueva: el concepto de *cantidad de movimiento*, *momentum*, *momento* o *momento lineal* de una partícula. El momentum de una partícula es el producto de la masa de la partícula por su velocidad. Como el producto de un escalar (la masa) por un vector (la velocidad), es un vector, el momentum de una partícula es un vector:

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

Nuevamente estamos en dificultades con el lenguaje acá. La velocidad tiene un significado claro, pero ¿qué es la masa? Y nuevamente tendremos que apelar a nuestra intuición cotidiana. La *masa* m de un cuerpo será una magnitud que es proporcional a su *peso*, es decir, dicho de alguna manera imprecisa, proporcional al esfuerzo que es necesario realizar para levantarlo o suspenderlo. Si un cuerpo pesa más que otro, esto se debe a que el primero tiene una masa mayor que el segundo.

La unidad de masa en el sistema internacional de unidades SI es el *kilógramo*, y corresponde a la masa del *kilógramo patrón* guardado en una oficina en París. Sin embargo, para la mayoría de los efectos prácticos podemos definir a un kilógramo como la cantidad de masa que posee un litro de agua dulce.

Con esta definición, podemos enunciar la segunda ley de Newton.

Segunda ley:

El cambio de momentum $\Delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, como también al intervalo Δt durante el cual ella se aplica, y apunta en la dirección y sentido de esta fuerza, o sea,

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \Delta t .$$

Más adelante definiremos a la cantidad $\vec{F}\Delta t$ como el *impulso*, de modo que la segunda ley de Newton se puede enunciar diciendo que el cambio de momentum es igual al impulso.

Observamos de inmediato que esta ley sólo es válida si la fuerza \vec{F} es constante durante el intervalo Δt y si las magnitudes son observadas desde un sistema de referencia inercial.

Pero notemos también que en la expresión anterior, conocemos las definiciones de tiempo, masa y velocidad, de modo que la segunda ley es, en realidad, la *definición de fuerza*.

Si una partícula está sometida a una fuerza \vec{F} durante un intervalo de tiempo Δt , cambiará su velocidad y, por tanto, su momentum. De acuerdo a la segunda ley, podemos definir la fuerza que actúa sobre la partícula haciendo el cociente:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} ,$$

donde con los paréntesis $\langle \cdot \rangle$ indicamos que esto en realidad corresponde a la *fuerza media* que siente la partícula durante el tiempo Δt (de modo análogo a los conceptos de velocidad y aceleración media en el Cap. 2).

La fuerza instantánea se obtiene en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, o sea, viene dada por

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Ésta será nuestra definición de fuerza. En todo momento podemos determinar explícitamente el momentum de una partícula como función del tiempo. Su derivada temporal *es* la fuerza. Notemos que es evidente que la fuerza es también una magnitud vectorial.

Si la masa de una partícula no varía a medida que transcurre el tiempo, entonces

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} .$$

Es decir, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual al producto de su masa y su aceleración. La anterior es ciertamente una formulación popularmente conocida de la segunda ley de Newton, pero enfatizamos que es sólo válida si la masa es constante. Hay muchas situaciones en que la masa no es constante: por ejemplo, un cohete que sube desde la superficie terrestre quemando combustible, un auto que va gastando gasolina, etc. En tales casos, lo correcto es utilizar la expresión original, en términos del momentum.

En el sistema de unidades SI, si la masa se mide en kg y la aceleración en m/s^2 , entonces la fuerza viene dada en newtons (N):

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Tercera ley:

*Si un cuerpo **A** ejerce una fuerza sobre otro **B**, entonces este último ejercerá sobre **A** una fuerza de igual magnitud y en la misma dirección, pero en sentido opuesto.*

La tercera ley se conoce también como *ley de acción y reacción*. De acuerdo a ella, una fuerza nunca aparece en forma solitaria, sino que siempre vendrá acompañada de otras fuerzas, de manera que la suma vectorial de todas ellas sea nula. Por ejemplo, la Tierra nos atrae hacia ella, y esto no nos genera ninguna complicación conceptual, pues la Tierra tiene mucho más masa que nosotros. Pero la tercera ley de Newton asegura que también es cierto que nosotros atraemos a la Tierra, con una fuerza igual a nuestro peso. Estamos acostumbrados a atornillar tornillos en nuestras casas, pero si hiciéramos eso en ausencia de gravedad, al intentarlo el tornillo nos haría girar a nosotros en dirección contraria, con la misma fuerza que nosotros aplicamos sobre él, pues no habría otras fuerzas sobre nosotros que lo impidieran.

Si no lo pensamos con cuidado, la tercera ley nos puede llevar a imaginar ciertas paradojas. Por ejemplo, si un caballo intenta tirar una carreta, puesto que la carreta ejerce la misma fuerza sobre el caballo, ¿cómo es posible que el caballo mueva a la carreta? ¿No debería ser la suma de las fuerzas igual a cero? Bueno, la suma de esas dos fuerzas es cero, pero es crucial notar que *no actúan sobre el mismo cuerpo*, y la primera ley de Newton asegura que un cuerpo comenzará a moverse si la fuerza total *sobre él* es cero. En este caso, el caballo ejerce una fuerza sobre la carreta, y ésta sobre el caballo, de modo que sobre ambos, carreta y caballo, se ejerce una fuerza neta distinta de cero, y por tanto es posible que se muevan. (El hecho de que en efecto se muevan en la dirección que el caballo tira tiene que ver en realidad con otros efectos, relacionados con el suelo; de hecho, si el suelo fuera muy resbaloso, el caballo tampoco lograría mucho, pero dejaremos la discusión de estos efectos para más adelante.)

A pesar de que no se menciona explícitamente, al aplicar la tercera ley se supone que la acción y reacción aparecen en forma simultánea. Esto debe ser cierto independiente de la distancia en que se encuentren. Por ejemplo, dos cuerpos pueden interactuar a distancia a través de la interacción gravitacional, y los pares de fuerza de acción y reacción deben aparecer simultáneamente tanto para una manzana cerca de la Tierra, el sistema Tierra-Sol, entre galaxias, entre quasares. . . Por lo tanto, implícitamente estamos aceptando que, en la mecánica newtoniana, debe existir una manera de transmitir la información de un cuerpo a otro con una velocidad infinita. Ahora sabemos que en la naturaleza tales velocidades infinitas no existen; hoy en día sabemos que la velocidad de la luz en el vacío es un límite superior para las velocidades con que se puede trasladar algo material o información de un lugar a otro. Por esta razón, la tercera ley es generalmente una muy buena aproximación, pero no tiene una validez universal; por ejemplo, en colisiones atómicas no es siempre aplicable.

4.3. Uso de las leyes de Newton

Para aprender a manejar las leyes de Newton y comprender su significado, lo mejor es ilustrar su uso en algunas situaciones concretas.

Ejemplos:

1. Analicemos las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae.

Debido a la atracción gravitatoria, todo objeto sufrirá una fuerza que apunta hacia el centro de la tierra. Es esta fuerza la que acelera al cuerpo durante su caída.

¿Cuál es el tamaño de esta fuerza? Sabemos que al realizar experimentos con cuerpos sobre la superficie terrestre, al soltarlos todos ellos caen con la misma aceleración hacia la superficie. Esta aceleración constante, llamada *aceleración de gravedad*, se denota por g , y su valor es aproximadamente $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. (En realidad, al realizar estos experimentos hay que asegurarse de que los efectos de la densidad y viscosidad de la atmósfera sean despreciables. Más aún, el experimento debe realizarse sin alejarse demasiado—a lo más unas pocas decenas de kilómetros—de la superficie terrestre, además de haber pequeñas variaciones con la latitud. Pero para todos los efectos prácticos, cerca de la superficie terrestre la aceleración de gravedad se puede considerar constante.)

Conociendo la aceleración del cuerpo y su masa m podemos (usando la segunda ley de Newton) establecer cuál es la fuerza gravitacional que actúa sobre el cuerpo. Definiendo al vector unitario \hat{z} como un vector que apunta hacia arriba, el vector aceleración del cuerpo vendrá dado por $\vec{a} = -g\hat{z}$. La fuerza sobre el cuerpo es entonces

$$\vec{F} = m(-g\hat{z}) = -mg\hat{z} .$$

A la magnitud de esta fuerza gravitacional es lo que se llama *peso* del objeto. Usando la letra W para denotar al peso se tiene

$$|\vec{F}| \equiv W = mg = \text{peso del objeto} .$$

El peso de un objeto no es sino la fuerza que ejerce la Tierra sobre él. En el lenguaje coloquial, es habitual decir que el “peso” se mide en kilogramos. Pero vemos que el peso es una fuerza, y por tanto se mide en newtons; es la masa, una cantidad escalar, la que se mide en kilogramos. Ambos conceptos pueden considerarse intercambiables, sin embargo, mientras estemos en la Tierra, pues masa y peso difieren en un factor constante para todos los cuerpos, igual a g . Pero en rigor, siempre debemos hacer la distinción entre masa y peso.

2. Analicemos las fuerzas que actúan sobre un libro de masa M , en reposo sobre una mesa (superficie horizontal).

Ya sabemos que sobre el libro actúa una fuerza, debido a la gravedad terrestre, que es

$$\vec{W} = -Mg\hat{z} .$$

Por otra parte, debido a que el libro se encuentra (y se mantiene) en reposo, la fuerza neta sobre el libro debe ser nula. ¿Quién o qué ejerce otra fuerza, igual a $-\vec{W}$, sobre el libro? La respuesta es: la mesa. Efectivamente, el libro se apoya sobre la mesa y la superficie de ella ejerce sobre el libro una fuerza hacia arriba, \vec{R} , cuya magnitud es igual al peso del libro, y de sentido opuesto, $\vec{R} = -\vec{W}$.

A su vez, como \vec{R} es la fuerza ejercida por la mesa sobre el libro, éste debe ejercer una fuerza de igual magnitud y sentido opuesto, $\vec{S}_1 = -\vec{R}$, sobre la mesa. Y también es cierto que el libro debe ejercer una fuerza de magnitud igual a $\vec{S}_2 = -\vec{W}$ sobre la Tierra. Pero aunque \vec{S}_1 y \vec{S}_2 existen en este problema, no actúan sobre el libro, y por tanto son completamente ignorables cuando se trata de estudiar el comportamiento del libro. Más aún, el hecho mismo de que el libro sea atraído por la Tierra y de que esté sobre la mesa es irrelevante, ya que lo único que le importa al libro es que sobre él actúan fuerzas \vec{W} y \vec{R} . Toda la influencia de la Tierra y la mesa se reduce a la existencia de dichas fuerzas sobre el libro. Esto sugiere que es posible estudiar al libro aislado de todos los otros cuerpos del Universo, como si éstos no existieran, y reemplazando aquellos que tienen efecto sobre él por las fuerzas respectivas:

Al analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es conveniente aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Para ello cada objeto que interactúa con este cuerpo es sustituido por una fuerza que cumple con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es el así llamado diagrama de cuerpo libre del objeto.

Para el caso del libro, la interacción de éste con la tierra se reemplaza por el vector \vec{W} que apunta hacia abajo y cuya magnitud coincide con el peso del libro; el efecto de la mesa sobre el libro se reemplaza por el vector \vec{R} , (ver figura 4.1). Si el libro se mantiene en reposo, la segunda ley de Newton requiere que $\vec{W} + \vec{R} = 0$.

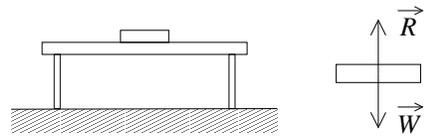


Figura 4.1

A la fuerza \vec{R} se le denomina fuerza *normal*, pues es perpendicular a la superficie sobre la cual está apoyado el objeto. La fuerza normal es la responsable de que el cuerpo no “atravesase” la superficie. En el caso sencillo analizado recién, la fuerza normal $\vec{R} = -\vec{W}$. Un error usual es decir que la fuerza normal es la reacción al peso. Es el mismo vector que la fuerza de reacción al peso, pero en realidad son fuerzas distintas, pues la normal es una fuerza que ejerce la mesa sobre el libro, y la reacción al peso es la fuerza que ejerce el libro sobre la Tierra.

Y además, la normal tiene igual magnitud que el peso sólo en este caso, en que la superficie de apoyo es horizontal.

3. Consideremos un objeto de masa m que cuelga del techo sujetado por una cuerda ideal (ver figura 4.2). ¿Cuál es la fuerza que la cuerda ejerce sobre el gancho en el techo y cuál es la tensión de la cuerda?

Una *cuerda ideal* es una cuerda que, a menos que se especifique lo contrario, no tiene masa, es perfectamente flexible y no es extensible. Que una cuerda sea perfectamente flexible quiere decir que sólo es capaz de transmitir una fuerza a lo largo de ella; no puede ejercer fuerzas transversales.

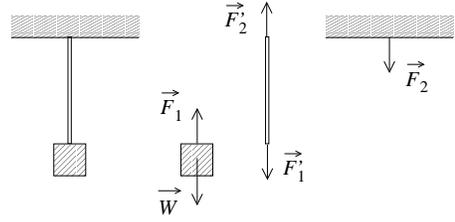


Figura 4.2

Sobre el objeto actúan dos fuerzas; una es el peso $\vec{W} = -mg\hat{z}$ y la otra es la fuerza \vec{F}_1 ejercida por la cuerda. Como el objeto no acelera, la fuerza neta (es decir, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él) debe ser nula. Por consiguiente, $\vec{F}_1 = -\vec{W}$.

Debido al principio de acción y reacción, debe haber una fuerza ejercida por el objeto sobre la cuerda igual a $\vec{F}'_1 = -\vec{F}_1$. Sobre la cuerda también hay una fuerza ejercida por el gancho, \vec{F}'_2 .

Nuevamente, debido al principio de acción y reacción, la cuerda debe ejercer sobre el gancho una fuerza igual a $\vec{F}_2 = -\vec{F}'_2$.

Ahora, debido a que la cuerda no tiene masa, las únicas fuerzas que actúan sobre ella serán \vec{F}'_1 y \vec{F}'_2 . Al estar en equilibrio (la cuerda no acelera), la suma de ambas fuerzas debe ser cero, luego $\vec{F}'_2 = -\vec{F}'_1$. Resumiendo, tenemos que

$$-mg\hat{z} = \vec{W} = -\vec{F}_1 = \vec{F}'_1 = -\vec{F}'_2 = \vec{F}_2 ,$$

o sea, la fuerza \vec{F}_2 que la cuerda ejerce sobre el gancho es igual al peso $-mg\hat{z}$.

Cada uno de los extremos de la cuerda ejerce una fuerza sobre los objetos a los cuales está unida. Cuando la masa de la cuerda es nula, la magnitud de esa fuerza es la misma. A esta magnitud se le llama *tensión* de la cuerda. A lo largo de una cuerda ideal, que no tiene masa, la tensión no varía. Para la cuerda del presente problema, la tensión es $\tau = mg$. La tensión es un escalar.

A primera vista, uno podría haber adivinado que si colgamos del techo una masa, la fuerza que se va a ejercer sobre el gancho del que todo cuelga será igual al peso del objeto suspendido. Pero notemos la cadena de implicaciones que han conducido a este resultado, en particular la importancia de que el sistema esté en reposo.

4. Máquina de Atwood.

Consideremos dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda ideal sin masa que pasa sobre una polea ideal (ver figura 4.3). Deseamos encontrar la aceleración de las masas y las tensiones de las cuerdas.

Con la expresión *polea ideal* nos estamos refiriendo a una polea que no tiene masa y gira sin roce. El objetivo de la polea es simplemente cambiar la dirección de la cuerda y, por lo tanto, de la fuerza (que actúa siempre a lo largo de la cuerda). La tensión a la que está sometida una cuerda no se modifica al pasar por una polea ideal.

Sea τ la tensión de la cuerda que une ambas masas y $\vec{a}_1 = a_1 \hat{z}$ la aceleración que sufrirá la masa 1. La fuerza neta que actúa sobre la masa 1 es $(-m_1 g + \tau) \hat{z}$, luego, de acuerdo a la segunda ley de Newton

$$(-m_1 g + \tau) \hat{z} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 a_1 \hat{z} .$$

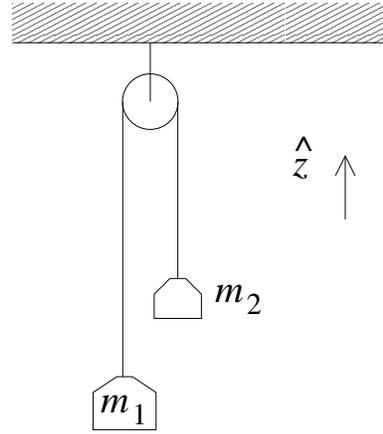


Figura 4.3

De esta relación se deduce que

$$\tau - m_1 g = m_1 a_1 . \tag{4.1}$$

Análogamente, aplicando la segunda ley de Newton a la segunda masa se obtiene la expresión

$$\tau - m_2 g = m_2 a_2 . \tag{4.2}$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) contienen toda la información que se puede extraer a partir de las fuerzas. Sin embargo, no permiten encontrar la aceleración de cada masa, pues son dos ecuaciones para las tres incógnitas: a_1 , a_2 y τ . ¿De dónde se puede extraer una ecuación adicional? La respuesta es típica de este tipo de problemas, con poleas: la tercera ecuación es una condición *geométrica*, no dinámica, que se deduce del hecho de que la cuerda es inextensible. En efecto, como el largo de la cuerda es constante, debe tenerse que el desplazamiento de la masa 1 en un tiempo dado debe ser igual en módulo y de signo opuesto que el desplazamiento de la masa 2 en el mismo tiempo; es decir, lo que sube (baja) m_1 , debe bajarlo (subirlo) m_2 :

$$\Delta z_1 = -\Delta z_2 .$$

Dividiendo por el tiempo Δt durante el cual ha ocurrido este desplazamiento, y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$, esta expresión queda $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2$. Derivando una vez más respecto al tiempo queda $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$, es decir,

$$a_1 = -a_2 .$$

Ésta es la tercera ecuación que necesitamos para resolver el sistema.

Sea entonces

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = a_0 \hat{z} .$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) podemos despejar las dos incógnitas a_0 y τ :

$$\tau = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

y

$$a_0 = - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Como la polea no tiene masa y ésta no sufre aceleraciones, la tensión de la cuerda que la sujeta deberá ser igual a 2τ .

Casos particulares:

Si $m_1 = m_2$, entonces $a_0 = 0$ y $\tau = m_1 g = m_2 g$. Tal como era de esperarse, si las masas son iguales, ninguna de ellas acelera.

Si $m_1 > m_2$ entonces a_0 resulta ser una magnitud negativa. Esto quiere decir que $\vec{a}_1 = a_0 \hat{z}$ es una aceleración que apunta hacia abajo; tal como debe ser, la masa 1 baja, mientras que la masa 2 sube.

Si m_1 es muy parecida a m_2 , entonces $|a_0| \ll g$. O sea, cada una de las masas realizará un movimiento uniformemente acelerado, pero con una aceleración mucho menor que g .

Si $m_1 = 0$, entonces $a_0 = g$ y $\tau = 0$. En este caso la cuerda deja de tener tensión, y por consiguiente la partícula 2 caerá con aceleración g .

El método expuesto es muy general, permitiendo abordar una gran variedad de problemas con poleas y cuerdas. Es interesante notar, sin embargo, que el sistema analizado es particularmente sencillo, y existen otros modos de llegar a la misma solución. En efecto, notemos que, para todo efecto práctico, la cuerda tiene sólo el efecto de mantener unidas las dos masas, y que éstas pueden ser consideradas como un solo cuerpo. Si ponemos este sistema de dos masas unidas por una cuerda en el suelo, horizontalment, podemos pensar que está sometido a dos fuerzas: los pesos de cada masa, uno hacia la derecha, el otro hacia la izquierda. Por lo tanto, uno podría escribir la fuerza neta sobre el sistema:

$$\vec{F} = -m_1 g \hat{x} + m_2 g \hat{x} ,$$

lo que debe ser igual, por la segunda ley de Newton, a:

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)a_0\hat{x} .$$

Despejando a_0 de estas ecuaciones, se recupera el resultado ya obtenido. Este procedimiento tan sencillo, sin embargo, es posible porque el problema es en sí sencillo. Para configuraciones más complicadas, es mejor proceder del modo general anteriormente expuesto, escribiendo cuidadosamente las fuerzas sobre cada masa, y cualquier condición geométrica adicional sobre los desplazamientos de las mismas.

5. Considere una cuerda flexible de masa M que cuelga entre dos paredes, siendo α el ángulo que forma la cuerda con la pared (ver figura 4.4). Se desea encontrar la tensión que la cuerda tiene en el punto mínimo. (En este caso, a diferencia de los anteriores, la tensión no es constante, precisamente porque la cuerda tiene masa.)

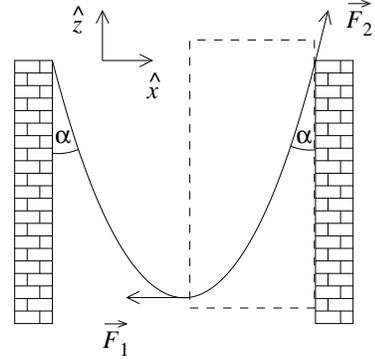


Figura 4.4

Para resolver el problema consideremos como nuestro sistema sólo la mitad derecha de la cuerda. Este “truco” es en el mismo espíritu que el diagrama de cuerpo libre. De hecho, es un diagrama de cuerpo libre, para la mitad derecha de la cuerda. Estamos reemplazando, en el fondo, la mitad izquierda de la cuerda por la fuerza que ésta ejerce sobre la otra mitad, \vec{F}_1 . A la mitad derecha de la cuerda le da lo mismo lo que haya al lado izquierdo, sea una cuerda, una pared, una persona, o cualquier agente, mientras ejerza la misma fuerza \vec{F}_1 en el mismo punto.

Hay tres fuerzas que actúan sobre el sistema considerado:

- i) El peso $\vec{W} = -\frac{1}{2}Mg\hat{z}$.
- ii) La fuerza \vec{F}_1 ejercida por la parte izquierda de la cuerda. La magnitud de esta fuerza es igual a la tensión de la cuerda en el mínimo, que llamaremos τ_0 . Se tiene que $\vec{F}_1 = -\tau_0\hat{x}$.
- iii) La fuerza que ejerce el gancho sobre la cuerda. Como la cuerda es flexible la fuerza necesariamente es a lo largo de la tangente de la cuerda. Si a la magnitud de esta fuerza la llamamos f_0 , se tiene que $\vec{F}_2 = f_0 \cos \alpha \hat{z} + f_0 \sin \alpha \hat{x}$.

Como nuestro sistema está en equilibrio (no acelera), la suma de las tres fuerzas debe ser nula:

$$\vec{W} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{1}{2}Mg\hat{z} - \tau_0\hat{x} + f_0 \cos \alpha \hat{z} + f_0 \sin \alpha \hat{x} = \vec{0} .$$

Pero para que un vector sea cero es necesario que cada una de sus componentes sea nula. Este hecho nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{componente } z: \quad -\frac{1}{2}Mg + f_0 \cos \alpha = 0$$

y

$$\text{componente } x: \quad -\tau_0 + f_0 \sin \alpha = 0 .$$

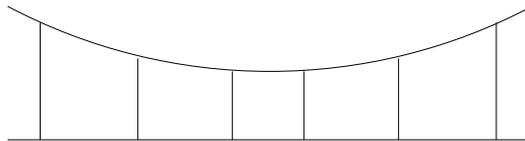
De estas dos ecuaciones podemos despejar τ_0 y f_0 , obteniéndose

$$\tau_0 = \frac{1}{2}Mg \tan \alpha$$

y

$$f_0 = \sqrt{\tau_0^2 + \left(\frac{Mg}{2}\right)^2} .$$

Notemos cómo para $\alpha \rightarrow 90^\circ$, o sea, a medida que la cuerda se cuelga en forma más “tirante”, la tensión de la cuerda tiende a infinito. Esto viene, matemáticamente, del hecho de que si α es muy parecido a $\pi/2$, la fuerza ejercida por el gancho tiene una componente vertical muy pequeña. Como debe contrarrestar a la única otra fuerza vertical, el peso de la cuerda, se sigue que $|\vec{F}_2| = f_0$ debe ser muy grande. En el límite $\alpha = \pi/2$, $f_0 \rightarrow \infty$. Esto tiene importantes consecuencias prácticas. Los cables del tendido eléctrico, entre postes, tienen una cierta curvatura. Intentar colocarlos completamente horizontales sería un gran riesgo, ya que estarían sometidos a una tensión demasiado alta, y cualquier perturbación podría romperlos. Si uno desea suspender un cable horizontalmente una solución posible es utilizar cuerdas auxiliares:



Solución que, por cierto, se utiliza en puentes colgantes, por ejemplo.

6. Consideremos una masa m que gira en el plano x, y , en un círculo de radio R y con una velocidad angular constante, ω_0 . Encontramos la fuerza neta a la que está sometida la masa.

En la sección 3.3 ya analizamos el movimiento circular y demosotramos que la aceleración de la masa m viene dada por $\vec{a}(t) = -R\omega_0^2 \hat{r}$. De acuerdo a la tercera ley de Newton, el hecho que la masa m esté acelerada implica que sobre ella está actuando una fuerza neta

$$\vec{F} = m\vec{a} = -Rm\omega_0^2 \hat{r} .$$

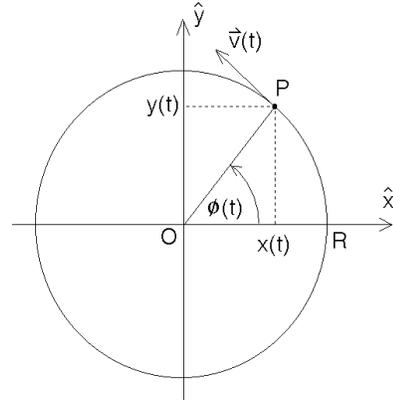


Figura 4.5

Esta fuerza (de magnitud constante) apunta hacia el origen y por esta razón se le denomina *fuerza centrípeta*.

Debido a la importancia de este resultado lo reiteramos: Una masa m que realiza un movimiento circular uniforme, está sometida a una fuerza que apunta hacia el centro de giro. La magnitud de esta fuerza centrípeta es

$$F_{\text{cent}} = mR\omega_0^2 = \frac{mv^2}{R} ,$$

donde R es el radio del círculo, ω_0 la velocidad angular y $v = \omega_0 R$ el módulo de la velocidad de la partícula.

Problema resuelto en clases: 4.6

4.4. Roce cinético y estático

Si un cuerpo se desliza sobre otro, tarde o temprano se detendrá a menos que exista una fuerza externa que perpetúe el movimiento. La fuerza que se opone al deslizamiento relativo entre los dos cuerpos se denomina *fuerza de roce cinético*. Se origina en la interacción de ambas superficies en contacto.

La fuerza de roce no sólo aparece cuando dos cuerpos están en movimiento relativo, sino que también puede estar presente cuando los dos cuerpos se encuentran en reposo relativo. En efecto, si, por ejemplo, intentamos deslizar una mesa por el piso, notamos que aparece una fuerza que impide que este deslizamiento comience. A esta fuerza se le denomina *fuerza de roce estático*.

También existen otras fuerzas de roce que aparecen en diversas circunstancias (por ejemplo, el *roce rodante*, el *roce viscoso*, etc), sin embargo, en el presente capítulo centraremos nuestro interés en las fuerzas de roce cinético y estático.

Se sabe relativamente poco acerca de ambos y es difícil cuantificarlos porque dependen de la naturaleza de los materiales y de propiedades de la superficie como el pulido, la existencia de óxidos en la interfase, etc. Lo que dificulta aún más la cuantificación de la fuerza de roce es su dependencia de la historia de las superficies: el paso del roce estático al roce dinámico depende de si las superficies se han deslizado previamente o no.

Las fuerzas de roce tienen un origen microscópico. Dos superficies, por suaves que parezcan, a nivel microscópico tienen irregularidades. Estas protuberancias forman, en algunos casos, microsoldaduras, y son el origen de la fuerza adicional que uno debe aplicar para poder iniciar un movimiento relativo entre los cuerpos. Una vez que éstos están en movimiento, estas aristas microscópicas se “enganchan” unas con otras y dan origen al roce cinético (también a veces llamado “*roce cinemático*” o “*roce dinámico*”). Por otra parte, cuando dos superficies están en reposo relativo, aparecen fuerzas entre las moléculas de cada superficie, y estas fuerzas son las que hay que vencer para comenzar a desplazar entre sí las superficies, dando origen así al roce estático.

Lo cierto es que no hay una teoría completa, de primeros principios, para el roce. Lo cual causa problemas desde el punto de vista teórico, porque es un efecto que evidentemente está presente, pero que es difícil de modelar en general. En todo caso, numerosos estudios experimentales permiten extraer algunas conclusiones generales sobre el roce. No se trata de “leyes fundamentales de la naturaleza”, sino de resultados fenomenológicos y cualitativos sobre el roce, suficientes para introducir los efectos del roce en las ecuaciones dinámicas.

Consideremos un bloque de masa M que descansa sobre una superficie, el cual intentamos deslizar aplicando sobre él una fuerza horizontal \vec{F} , que incrementamos paulatinamente. Designemos por \vec{f} a la fuerza de roce que aparece debido a la fricción entre las dos superficies y describamos la forma en que típicamente varía esta fuerza.

- a) Mientras la fuerza horizontal externa $F = |\vec{F}|$ varía desde 0 hasta un cierto valor $f_e^{(\max)}$, el bloque M no se desplazará. Como no hay aceleración, la fuerza neta horizontal sobre el cuerpo debe ser nula, o sea, debe haber otra fuerza horizontal sobre el bloque que exactamente cancele a la fuerza \vec{F} . Ésta es la fuerza de roce estática \vec{f} . Se tiene, por lo tanto, que $\vec{f} = -\vec{F}$.
- b) Cuando la fuerza horizontal externa F sobrepasa cierto valor $f_e^{(\max)}$, la fuerza de roce no sigue aumentando. Como ahora la componente horizontal de la fuerza neta no es nula, el bloque comenzará a acelerar. Tan pronto como los cuerpos se deslizan con cierta velocidad relativa, la fuerza de roce se vuelve constante,

siendo su magnitud algún valor f_c (menor que $f_e^{(\max)}$) y su sentido opuesto al movimiento relativo.

De ahí en adelante, si se desea mantener el bloque deslizándose con una velocidad constante, debe aplicarse una fuerza horizontal de exactamente la magnitud f_c , en la dirección de movimiento.

Es decir, el resultado experimental es que, para mover, por ejemplo, un mueble sobre el piso, “cuesta” un poco más comenzar a moverlo que mantenerlo en movimiento.

Este comportamiento fenomenológico recién descrito, que muestra la fuerza de roce, se muestra en la figura 4.6. Empíricamente se ha observado que, para dos superficies (secas) en contacto, tanto la fuerza de fricción dinámica f_c como el máximo de la fricción estática $f_e^{(\max)}$, son proporcionales a la fuerza normal entre ambas superficies, o sea,

$$f_c = \mu_c F_N$$

y

$$f_e^{(\max)} = \mu_e F_N .$$

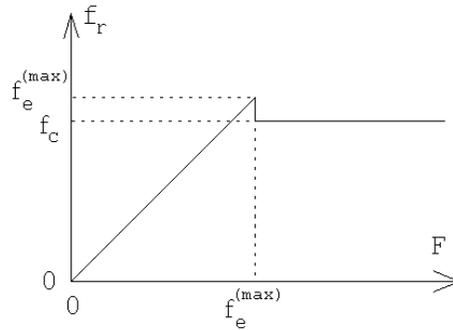


Figura 4.6

\vec{F}_N es la fuerza normal entre las superficies (es decir, perpendicular a la interfase formada por las dos superficies) y μ_c y μ_e son los *coeficientes de fricción* o de roce. Los coeficientes de fricción de alguna manera engloban nuestra ignorancia de los distintos parámetros que intervienen en el problema. Siempre se tiene que el coeficiente de roce cinemático es menor al coeficiente de roce dinámico: $\mu_c < \mu_e$. Ambas fuerzas de roce actúan en la dirección paralela a las superficies. El sentido de la fuerza de roce estático es opuesto a la fuerza horizontal neta que actúa sobre el cuerpo, mientras que el sentido de la fuerza de roce dinámico es siempre opuesto al movimiento relativo (y no a la fuerza) entre las dos superficies.

Ilustremos los conceptos anteriores con un ejemplo.

Problema:

Considere el montaje experimental mostrado en la figura 4.7. Supongamos que los coeficientes de fricción estático y cinemático entre la masa $M=4$ Kg y el plano

inclinado son $\mu_e = 0.4$ y $\mu_c = 0.3$, respectivamente.

¿Qué rango de valores puede tener m para que el sistema se encuentre en equilibrio estático? Si la masa m justo sobrepasa ese máximo, ¿con qué aceleración se moverá el bloque sobre el plano?

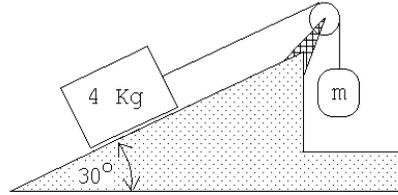


Figura 4.7

Solución:

Resolvamos primero el problema estático.

Lo primero que hay que tener claro es que el sistema puede estar en equilibrio para un *rango* de valores de m . En efecto: si no hay roce, es claro que hay un único valor de m (digamos m_0), tal que el sistema se mantiene en equilibrio. Si m es ligeramente mayor que m_0 , entonces el sistema intentará moverse hacia la derecha en la Fig. 4.7. Pero como hay roce, dicho movimiento no ocurrirá, a menos que m sea suficientemente grande para que la fuerza aplicada sobre el otro bloque sea mayor que la fuerza de roce estático máxima. Entonces, existe un valor *máximo* de m tal que el sistema puede mantenerse en equilibrio. Por argumentos similares, podemos convencernos de que existe también un valor *mínimo* de m . El problema ahora es encontrar dichos valores.

La figura 4.8 muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque que se encuentra sobre el plano inclinado. A priori no sabemos en qué sentido apunta la fuerza de roce f_r . La hemos dibujado apuntando a lo largo del plano hacia abajo; si después de realizar el cálculo f_r resulta tener un valor negativo entonces la fuerza de roce en realidad apunta en el sentido opuesto al mostrado en la figura. Sea Mg el peso, τ la fuerza ejercida por la tensión de la cuerda y F_N la fuerza normal que ejerce el plano inclinado sobre el bloque. Debido al principio de acción y reacción, F_N también coincide con la magnitud de la fuerza que el bloque ejerce sobre el plano.

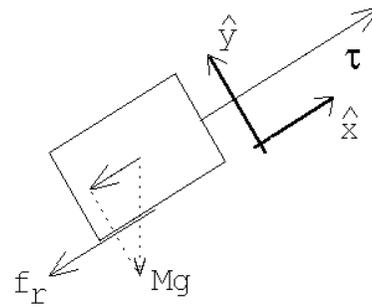


Figura 4.8

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas en que el eje \hat{x} es paralelo y el eje \hat{y} normal al plano inclinado (ver figura 4.8). Como el bloque está en reposo, la fuerza neta sobre el bloque debe ser nula, esto es, tanto la fuerza total a lo largo del eje \hat{x} como a lo largo del eje \hat{y} . Esto nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{eje } \hat{x}: \quad \tau - Mg \sin \alpha - f_r = 0$$

$$\text{eje } \hat{y}: \quad F_N - Mg \cos \alpha = 0 \quad ,$$

donde α es el ángulo de elevación del plano inclinado. Como la masa m no acelera, la tensión de la cuerda debe ser $\tau = mg$. Luego, de la primera ecuación se deduce que

$$f_r = mg - Mg \sin \alpha \quad .$$

Recordemos que f_r puede ser positivo o negativo: f_r es positivo si $m > M \sin \alpha$ y negativo si $m < M \sin \alpha$. También se tiene que

$$|f_r| \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg \cos \alpha \quad .$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} mg - Mg \sin \alpha &= +f_r \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg \cos \alpha && \text{si } m > M \sin \alpha \quad , \\ -mg + Mg \sin \alpha &= -f_r \leq \mu_e F_N = \mu_e Mg \cos \alpha && \text{si } m < M \sin \alpha \quad , \end{aligned}$$

o sea el bloque de masa M no se desliza sobre el plano inclinado si

- i) para $M \sin \alpha < m$, se cumple que $m \leq M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha)$,
- ii) para $M \sin \alpha > m$, se cumple que $m \geq M(\sin \alpha - \mu_e \cos \alpha)$.

Para los valores numéricos del enunciado, el bloque no se deslizará por el plano si $0.61 \text{ kg} < m < 3.4 \text{ kg}$.

Observemos que, si $\alpha = 0$, resulta $-M\mu_e \leq m \leq M\mu_e$. En este caso, la superficie es completamente horizontal, y la masa m es simplemente equivalente a una fuerza externa mg . Para que el sistema se mantenga en equilibrio se requiere simplemente que dicha fuerza externa (que puede ir hacia la derecha o hacia la izquierda) no sea mayor que la fuerza de roce estático máxima.

Por su parte, si $\alpha = \pi/2$, se tiene $M \leq m \leq M$, es decir, el sistema se mantiene en equilibrio sólo si $m = M$. Lo cual es evidente, ya que cuando la superficie es completamente vertical la fuerza normal sobre el bloque es cero, de modo que el roce desaparece del problema. Tenemos entonces un sistema de dos masas colgando de los extremos de una cuerda que pasa por una polea, el cual sólo se mantiene en equilibrio si las masas en ambos extremos son iguales.

Analícemos ahora lo que sucede si m sobrepasa (en una magnitud infinitesimal) al valor $M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha)$. En ese caso, el bloque comenzará a deslizarse hacia arriba. La fuerza de roce, por lo tanto, será

$$\vec{f}_r = -\mu_c Mg \cos \alpha \hat{x} \quad .$$

La fuerza neta sobre el bloque y su aceleración, en la dirección \hat{x} , vendrán dados por

$$F_x = \tau - f_r - Mg \sin \alpha = \tau - \mu_c Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha \quad .$$

y

$$a_x = \frac{F_x}{M} = \frac{\tau}{M} - g(\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha) .$$

Por otra parte, la fuerza neta sobre la masa m y su aceleración en la dirección vertical, serán

$$F' = \tau - mg .$$

y

$$a' = \frac{F'}{m} = \frac{\tau}{m} - g = -a_x .$$

La última igualdad en la ecuación anterior se debe a que la cuerda es inextensible; por consiguiente, cuando el bloque acelera hacia arriba, la masa m acelerará con la misma magnitud, pero hacia abajo. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$a_x = g \left[\frac{\left(\frac{m}{M} - \mu_c \cos \alpha - \sin \alpha \right)}{\frac{m}{M} + 1} \right] . \quad (4.3)$$

Este resultado también lo podemos escribir de otra manera. Recordemos que m sobrepasa en una magnitud infinitesimal al valor $M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha)$, luego

$$m = M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha) , \quad (4.4)$$

o sea,

$$\frac{m}{M} = \mu_e \cos \alpha + \sin \alpha .$$

Sustituyendo esto en la expresión para a_x se obtiene

$$a_x = g \frac{(\mu_e - \mu_c) \cos \alpha}{1 + \mu_e \cos \alpha + \sin \alpha} . \quad (4.5)$$

Con los valores numéricos del enunciado se obtiene $a_x \simeq 0.047 g$.

Note que la tensión de la cuerda es distinta en el caso estacionario que en el caso dinámico. En el primer caso es $\tau = mg$, mientras que en el segundo viene dada por $\tau = m(g - a_x)$.

En el caso dinámico, el límite $\alpha = \pi/2$ es problemático, pues (4.5) da $a_x = 0$, lo que es imposible, pues si m supera ligeramente el valor de equilibrio (que en este límite es igual a M), el sistema debería acelerar. El problema es que, en rigor, (4.4) debería ser $m = M(\mu_e \cos \alpha + \sin \alpha) + \epsilon$, con $\epsilon \ll 1$. En ese caso, la expresión (4.5) adquiere un término adicional de orden ϵ . Dicho término es irrelevante para ángulos arbitrarios, siendo el término dominante el que aparece en (4.5), es decir, la aceleración es esencialmente independiente de la diferencia ϵ entre m y su valor de equilibrio. Pero para ángulos muy grandes, en particular $\alpha = \pi/2$, la situación se invierte, es el término independiente de ϵ el que es despreciable, y $a_x \sim \epsilon$, tal como sugiere la intuición, esto es, la aceleración depende exclusivamente de la diferencia de las masas m y M .

Problema resuelto en clases: 4.35

Problema resuelto en clases: 4.32

4.5. Problemas

- Un automóvil de 2000 kg moviéndose a 80 km/h puede llevarse al reposo en 75 m mediante una fuerza de frenado constante:
 - ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse?
 - ¿Cuál es la fuerza necesaria para detener el coche en esa distancia? ¿Quién o qué ejerce esa fuerza horizontal que detiene al coche?
- Una carga de 2 toneladas se levanta mediante una grúa.
 - Inicialmente, durante cierto intervalo de tiempo, la carga sube con una aceleración $a = 1.3 \text{ m/s}^2$. ¿Cuál es la tensión del cable que la soporta?
 - Después de un breve período de aceleración, la carga sigue elevándose con una velocidad constante. ¿Cuál es la tensión del cable en ese caso?
- Dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, descansan sobre planos lisos como se muestra en la figura 4.9.
 - ¿En qué sentido se moverá el sistema?
 - ¿Cuál es la aceleración de los bloques?
 - ¿Cuál es la tensión de la cuerda?
- Una pelota de 2 kg cae libremente llegando, en cierto instante, a tener una rapidez de 6 m/s. ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5 m? ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5 s?

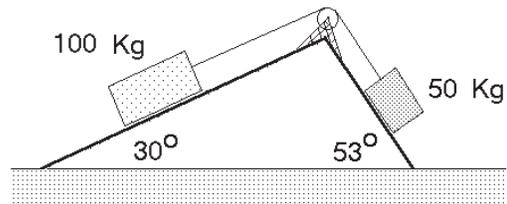


Figura 4.9

5. ¿Qué fuerza \vec{F} debe aplicarse al carro de masa M (ver figura adjunta) para que el carro de masa m_2 no suba ni baje?

Respuesta: $F = g(M + m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1}$

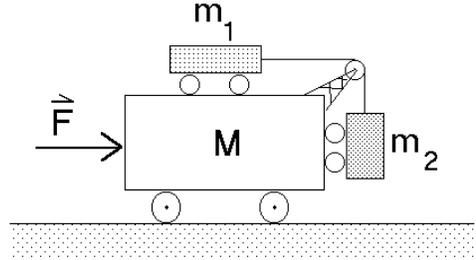


Figura 4.10

6. Considere un péndulo que consiste en una masa m colgada de un hilo de largo ℓ . En presencia de un campo gravitacional constante, al sacar el péndulo de su posición de equilibrio y soltarlo, éste oscilará. Encuentre la aceleración de la masa m en el instante en que el péndulo forma un ángulo θ con la normal.

Si $\theta \ll 1$, demuestre que

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \theta(t) = 0 ,$$

con $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

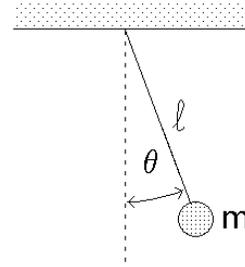


Figura 4.11

7. Considere una masa m adosada a un resorte de constante de restitución k . Sea $x = 0$ la posición de equilibrio del sistema. De acuerdo a la *Ley de Hook*, al desplazar la masa m una distancia x desde su posición de equilibrio, la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa es $F = -kx$. Demuestre que

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 ,$$

con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Compare este resultado con el del problema anterior.

8. Un cuerpo de 500 g desliza por un plano inclinado liso. El cuerpo parte del reposo y durante el tercer segundo recorre una distancia de 120 cm. Encuentre el ángulo de inclinación del plano.

9. Una esfera de masa m es mantenida en la posición **A** por dos cuerdas (ver figura 4.12). Sea T_A la tensión de la cuerda indicada. Se corta la cuerda horizontal y el péndulo oscila hasta la posición **B**. ¿Cuál es la razón de las tensiones T_B/T_A ?

Respuesta: $T_B/T_A = \cos^2 \alpha$.

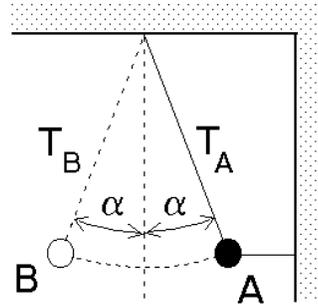


Figura 4.12

10. Considere el montaje mostrado en la figura 4.13, con $M=1,650$ kg, $m=0,150$ kg y $d_0=4$ m. El sistema está en reposo cuando $d = d_0 = 4$ m. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que la masa m llegue a la base de M ?

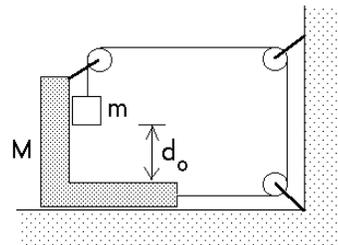


Figura 4.13

11. Un objeto se encuentra sobre un plano liso sin roce y es sometido a una fuerza \vec{F} que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es m , obtenga y grafique las siguientes magnitudes:

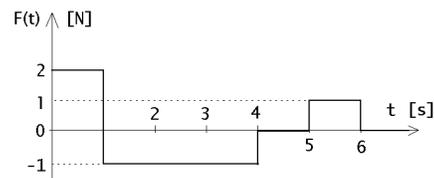


Figura 4.14

- Aceleración del objeto en función del tiempo.
 - Velocidad del objeto, si éste parte del reposo.
 - Posición del objeto en función del tiempo.
12. Una pesa calibrada en Newtons se coloca sobre una plataforma móvil y se hace deslizar con una rapidez constante de 14 m/s sobre un terreno ondulado (ver figura 4.15). Sobre la pesa se coloca una caja que pesa 500 N.
- Cuando la plataforma pasa sobre la cresta de una colina con radio de curvatura de 100 m, ¿cuál es la lectura de la pesa?
 - Cuando la plataforma pasa por la parte inferior de una hondonada con radio de curvatura de 80 m, ¿cuál es la lectura de la pesa?

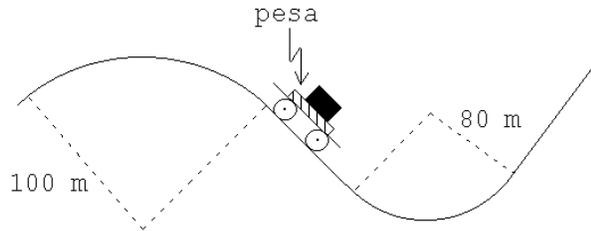


Figura 4.15

Respuesta: (parte b) $\simeq 625$ N.

13. Un bloque de masa M es tirado hacia una muralla vertical mediante el uso de una cuerda y poleas como se muestra en la figura. El bloque se desliza sin roce sobre la superficie. La fuerza con que se tira la cuerda es F , el largo de la cuerda es $2L$ y la separación inicial entre el bloque y la muralla es L . Determine el tiempo que transcurre hasta que se encuentren la punta de la cuerda y el bloque.

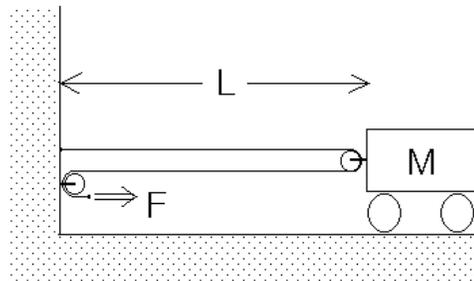


Figura 4.16

14. Un plato cónico de ángulo característico α gira uniformemente entorno a su eje, el cual se mantiene en posición vertical. Una piedrecilla de masa m rota solidariamente con el plato. Suponiendo que no hay roce entre la piedrecilla y la superficie del plato, calcule el radio de la órbita circular que describe la piedrecilla.

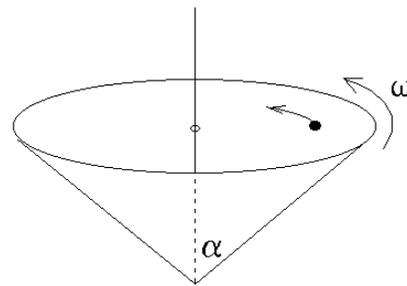


Figura 4.17

15. Una persona se para sobre una balanza dentro del ascensor y observa que ésta registra un peso igual a un 70% de su peso normal. Si el ascensor y el pasajero tienen masas M y m respectivamente, calcule la tensión a la que está sometido el cable que sujeta el ascensor. Compare esta tensión con la que se produciría si el ascensor acelera con la misma magnitud pero en sentido opuesto.

16. Considere el montaje mostrado en la figura 4.18. Suponga que las masas de la polea y del hilo, así como el rozamiento son despreciables. Se conocen las masas m , M y el ángulo de la cuña. Encuentre la aceleración de la cuña.

Respuesta:
$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} .$$

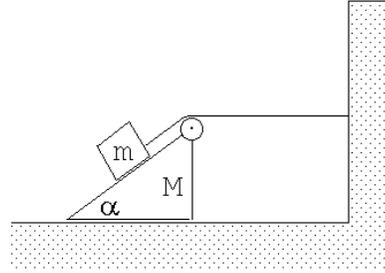


Figura 4.18

17. Dos masas m y M se encuentran unidas por una cuerda de masa despreciable y largo ℓ . En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme (en un plano horizontal) en torno al así llamado *centro de masas* del sistema. Suponga que el período del movimiento rotatorio es T . Encuentre la distancia entre la masa m y el centro de giro (para resolver esta parte del problema no es necesario conocer la definición de centro de masas). Calcule la tensión de la cuerda que une ambas masas.

Respuesta:
$$\tau = \frac{mM}{m + M} \ell \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 .$$

18. Una cuña lisa de masa M se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal F . Sobre ella se coloca un bloque de masa m .

- a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.
- b) Determine el valor de F para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña.

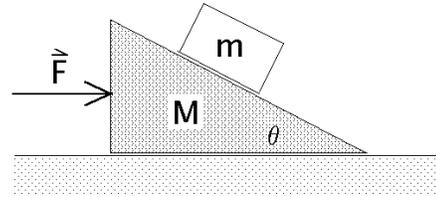


Figura 4.19

19. Dos bloques idénticos y de masa m posan sobre una superficie horizontal pulida. Uno de ellos es tirado mediante una cuerda en cuyo extremo libre se aplica una fuerza horizontal igual a Mg . El otro bloque es también tirado horizontalmente mediante una cuerda pero en cuyo extremo libre cuelga una bola de masa M . Determine cual de los bloques se mueve más rápido si ambos parten del reposo simultáneamente.

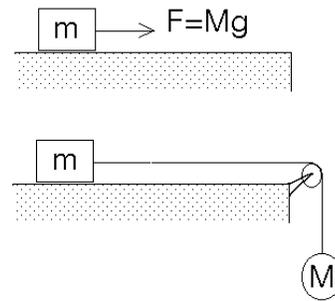


Figura 4.20

20. Un pintor que pesa 900 Newtons trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newtons. La silla misma pesa 300 Newtons.

- a) ¿Cuál es la aceleración del pintor y de la silla?
- b) ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?

Respuestas: a) $a = 2g/3$; b) $F_{tot} = 2000$ N.

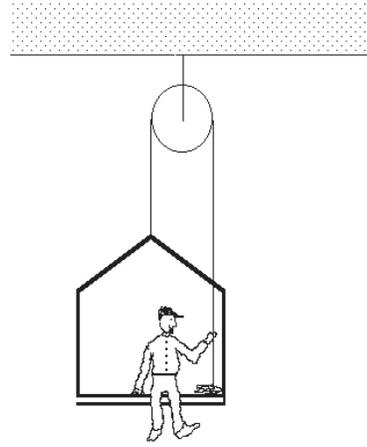


Figura 4.21

21. Considere el montaje mostrado en la figura 4.22. La masa del cuerpo # 1 es $n = 4$ veces mayor que la del cuerpo # 2. Suponga que las masas de las poleas y de los hilos, así como el rozamiento son despreciables por su pequeñez. Cuando el cuerpo # 2 se suelta, la masa # 1 se encuentra a una altura h . ¿Cuál es la aceleración de la masa # 2 mientras m_1 baja? ¿Cuál es la altura máxima del suelo H a la que subirá la masa # 2? (¡La altura máxima no es $2h$!)

Respuesta: $H = 6hn/(n + 4)$.

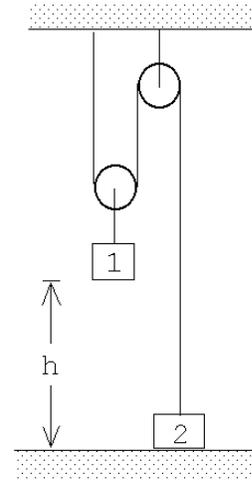


Figura 4.22

22. Una masa m se encuentra apoyada sobre una cuña de masa M y ángulo de elevación α . La cuña se puede desplazar horizontalmente sin roce sobre un plano. Dos guías restringen el movimiento de la masa m de manera que sea sólo en dirección vertical. No hay roce entre la masa m y la cuña como tampoco entre las guías y la masa m .

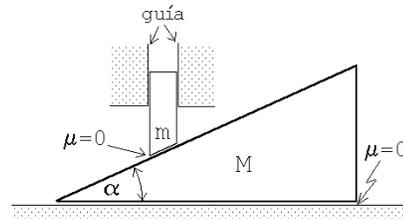


Figura 4.23

- a) Encuentre la relación que existe entre la aceleración vertical a_m de la masa m y la aceleración horizontal a_M de la cuña.
 - b) Haga los diagramas de cuerpo libre de la masa m y de la cuña M .
 - c) Encuentre la aceleración a_M de la cuña.
 - d) Si entre la cuña y el suelo hay roce ¿cuánto es el valor mínimo que debe valer el coeficiente de roce estático μ_e para que la cuña no acelere?
23. Considere dos masas M y m unidas por un hilo que pasa por una polea ideal tal como se muestra en la figura adjunta. Inicialmente la masa M se sujeta con un hilo auxiliar (que no se muestra en la figura) y el sistema se encuentra en reposo. En cierto instante el hilo auxiliar se corta. Demuestre que la aceleración de la masa M es (con el eje \hat{z} apuntando hacia arriba):

$$\vec{a} = -\frac{4M + 2m}{4M + m}g\hat{z} .$$

Demuestre que esta expresión da el valor correcto en los límites $M \gg m$ y $m \gg M$.

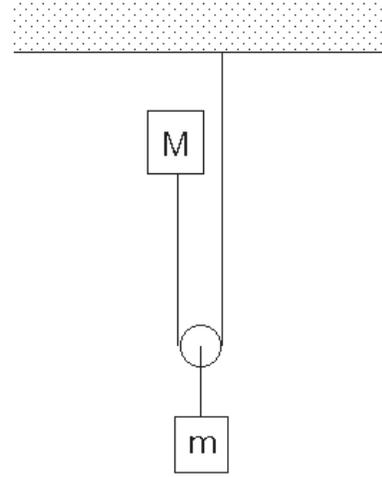


Figura 4.24

24. Dos objetos 1 y 2, de igual masa, están atados a los extremos de una cuerda ideal de largo L . El conjunto descansa sobre un disco que gira en un plano horizontal con velocidad angular constante, en torno a su centro (ver figura). Suponga que no existe fricción entre el disco y el objeto 1, pero existe fricción entre el objeto 2 y la superficie del disco. Los coeficientes de fricción estático y cinético entre la masa 2 y el disco son μ_e y μ_c , respectivamente.

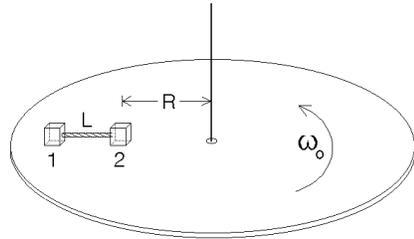


Figura 4.25

Se observa que cuando el disco gira con velocidad angular ω_0 , la cuerda se mantiene tensa y alineada en la dirección radial. En esta condición el objeto 2 está en reposo a una distancia R del eje de rotación. Cuando la velocidad

angular es mayor que ω_0 el objeto 2 (y también el 1) resbala sobre el disco. Calcule el valor de ω_0 .

25. Tal como el campo gravitacional ejerce sobre una masa m una fuerza, un campo eléctrico \vec{E} ejerce una fuerza sobre una carga q . Esta última viene dada por

$$\vec{F} = q \vec{E}.$$

(En el sistema internacional de unidades SI, la unidad para la carga es el *Coulomb* [C] y la del campo eléctrico *Volt/metro* = *Newton/Coulomb*, siendo las abreviaciones [V/m]=[N/C]. Un campo de 1 [V/m] ejerce sobre una carga de 1 [C] una fuerza de 1 [N].)

Considere un electrón, inicialmente en reposo, que es acelerado entre dos placas (un condensador) separadas por una distancia de 1 cm. En el espacio entre las dos placas hay un campo eléctrico de 900 Volt/cm.

- a) ¿Cuál es su velocidad terminal (la velocidad con que emerge del primer condensador)?
- b) Suponga ahora que el electrón de la parte a), después de ser acelerado y emerger (por un pequeño agujero) del espacio entre las dos placas, ingresa a una región de largo $L = 3\text{cm}$ en que existe un campo eléctrico transversal de magnitud $|\vec{E}_\perp| = 30\text{ Volt/cm}$. ¿Cuál será el ángulo de deflexión θ con que emergerá el electrón del segundo condensador? (Ver figura 4.26). (En este problema Usted puede despreciar la interacción gravitatoria, es decir, puede suponer que $g = 0$. La carga de un electrón (universalmente denotada con la letra e) es $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ [C] y su masa $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ [Kg].)

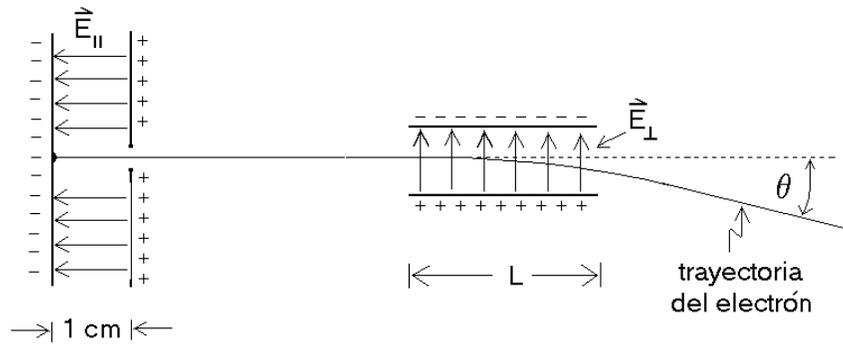


Figura 4.26

26. Un pulso de iones de Cs^+ (simplemente ionizados) que han sido acelerados desde el reposo por un campo eléctrico de 1 (statvolt/cm) a lo largo de 0,33 cm, tarda un tiempo $\Delta t = 87 \cdot 10^{-9}$ s para recorrer 1 mm después del proceso de aceleración (ver figura 4.27).

- Encuentre la masa del Cs^+ .
- Si en lugar de Cs^+ se realiza el experimento con deuterones, ¿cuánto sería el tiempo de travesía Δt ?
- Suponiendo que los protones y los neutrones tienen la misma masa, encuentre la masa de un neutrón.
- Con este dispositivo experimental, ¿será posible distinguir entre deuterones y partículas α ?

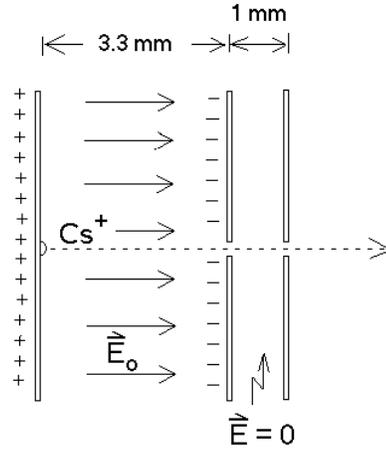


Figura 4.27

(Un deuterón es un núcleo atómico formado por un protón y un neutrón; una partícula α es equivalente a un núcleo de un átomo de He y consiste en dos protones y dos neutrones. El núcleo de cesio consta de 58 protones y 84 neutrones, el ión Cs^+ corresponde a un átomo de cesio que ha perdido un electrón).

27. Considere una carga q que en el instante $t = 0$ se encuentra en el origen y en reposo. A partir de $t = 0$ se le aplica un campo eléctrico alterno de la forma

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \hat{x} .$$

Encuentre la *ecuación diferencial* que describe el movimiento de la carga y encuentre la expresión más general para la posición $x(t)$.

28. Un bloque de masa M sube por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es α . Los coeficientes de roce estático y cinético entre la masa M y el plano son μ_e y μ_c , respectivamente.

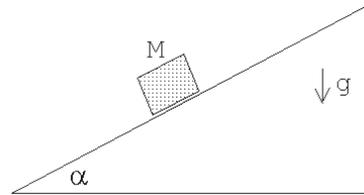


Figura 4.28

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el bloque, si parte con velocidad v_0 desde la base del plano?
- ¿Qué condición debe satisfacerse para que el bloque vuelva a descender?
- En caso de cumplirse la condición anterior, ¿con qué velocidad llegará a la base del plano inclinado?

29. Una masa de 100 kg se empuja a lo largo de una superficie en la cual el roce es despreciable mediante una fuerza \vec{F} , de modo que su aceleración es de 6 m/s^2 (ver figura). Una masa de 20 kg desliza a lo largo de la parte superior de la masa de 100 kg y tiene una aceleración de 4 m/s^2 (por lo tanto desliza hacia atrás respecto a la masa de 100 kg).

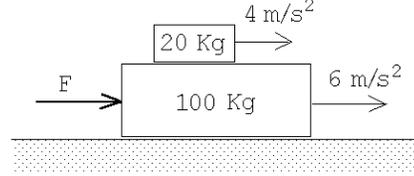
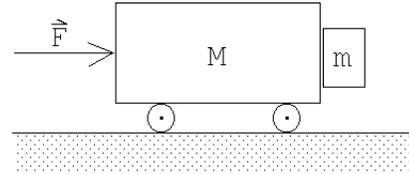


Figura 4.29

- ¿Qué fuerza de rozamiento ejerce la masa de 100 kg sobre la masa de 20 kg?
- ¿Cuál es la fuerza neta sobre la masa de 100 kg? ¿Cuál es la fuerza \vec{F} ?
- Una vez que la masa de 20 kg se cae de la masa de 100 kg, ¿cuál es la aceleración de la masa de 100 kg?

30. Sea μ el coeficiente de roce estático entre la masa m y el carro. ¿Cuál es la fuerza mínima que debe aplicarse al carro para que la masa m no caiga?



Respuesta: $F^{min} = (M + m)g/\mu$.

31. Las masas A y B son de 10 y 5 Kg respectivamente. El coeficiente de roce de A con la mesa es $\mu = 0.2$. Encuentre el mínimo valor de la masa C que impide el movimiento de A . Encuentre la aceleración de A si se saca C .

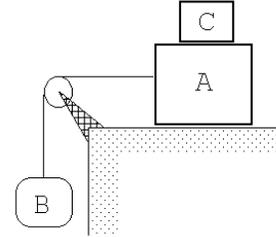


Figura 4.31

32. Una carretera está peraltada de modo que un automóvil, desplazándose a 80 Km/h, puede tomar la curva de 30 m de radio, incluso si existe una capa de hielo equivalente a un coeficiente de fricción aproximadamente cero.

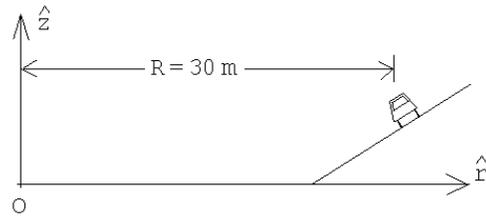


Figura 4.32

Determinar el intervalo de velocidades a que un automóvil puede tomar esta curva sin patinar, si los coeficientes de fricción estática y cinemática, entre la carretera y las ruedas, son $\mu_e = 0.3$ y $\mu_c = 0.26$, respectivamente.

33. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener m_3 para que m_1 no se caiga si el coeficiente de fricción estático entre m_1 y m_2 es μ_e , y el de fricción cinemática entre m_2 y la mesa es μ_c ?
 Respuesta:

$$m_3^{max} = \begin{cases} (m_1 + m_2) \frac{\mu_c + \mu_e}{1 - \mu_e} & \text{si } \mu_e < 1 \\ \infty & \text{si } \mu_e > 1 \end{cases}$$

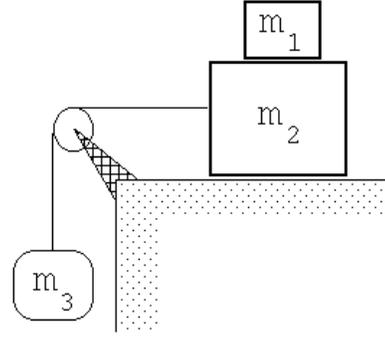


Figura 4.33

34. Un bloque de masa M , inicialmente en reposo, resbala por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es θ . Después de recorrer una distancia D el cuerpo lleva una velocidad igual al 50% de la velocidad que habría adquirido en ausencia de roce. Encuentre una expresión para el coeficiente de roce cinemático μ entre el plano y el bloque.

35. Sea μ_c el coeficiente de roce cinético entre un escobillón, cuya masa es m , y el piso. Un hombre ejerce una fuerza \vec{F} a lo largo del palo del escobillón. Encuentre $|\vec{F}|$ en función de θ . ¿Existe una solución para todo θ entre 0° y 90° ? (El barrendero avanza con velocidad uniforme.)

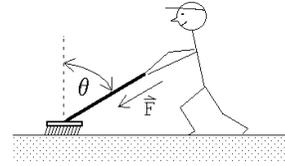


Figura 4.34

36. Una partícula de masa M descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Si el coeficiente de roce estático es μ_e , encuentre la mínima fuerza horizontal \vec{F}_{min} transversal a la pendiente del plano, que se requiere para que la partícula comience a moverse.

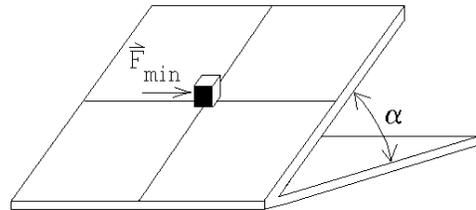


Figura 4.35

Respuesta:
$$F_{min} = \begin{cases} Mg \sqrt{\mu_e^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} & \text{si } \mu_e > \tan \alpha \\ 0 & \text{si } \mu_e < \tan \alpha \end{cases}$$

CAPÍTULO 4. LAS LEYES DE NEWTON

37. Considere un paquete, de masa m , que se mueve sin roce y con rapidez v_0 sobre una superficie de hielo. En cierto instante el paquete entra en contacto con el tablero horizontal de un trineo de masa M , que a su vez puede deslizarse sin roce sobre el hielo.

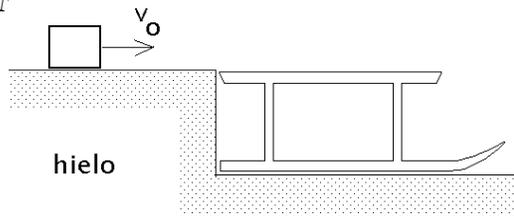


Figura 4.36

Suponga que el coeficiente de roce entre el paquete y el trineo es μ y que el paquete se desliza sobre el trineo hasta finalmente quedar en reposo con respecto a éste.

- Una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo, ¿cuál es la velocidad del trineo?
- ¿Cuánto tiempo demora el paquete en quedar en reposo con respecto al trineo?
- Evalúe el momento lineal del paquete antes de que entre en contacto con el trineo y compárelo con el momento lineal del conjunto (trineo más paquete) una vez que el paquete está en reposo respecto al trineo.

(El momento lineal de un objeto es el producto de su masa y velocidad).

38. Con dos bloques A y B se arman las configuraciones I y II que se indican en la figura adjunta. Suponga que las cuerdas y poleas tienen masas despreciables y el coeficiente de roce μ es constante y es el mismo entre todas las superficies en contacto. El valor de las fuerzas aplicadas F_I y F_{II} es tal que el bloque A se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cociente entre el

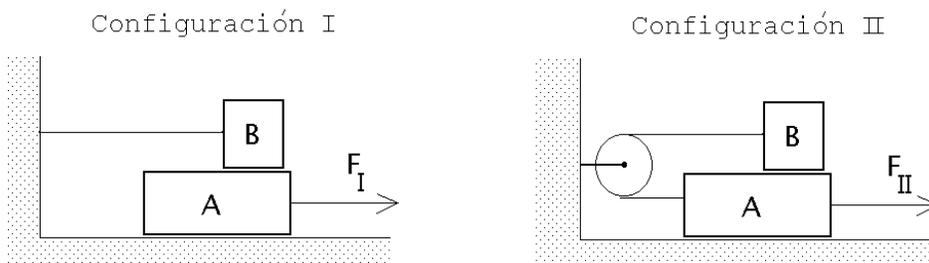


Figura 4.37

39. Considere un cuerpo que cae en la atmósfera. El aire se opone al movimiento con una fuerza que es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir

$$\vec{F}_{roce} = -kv\vec{v} \quad , \quad v = |\vec{v}| \quad .$$

Encuentre la velocidad terminal.

40. Cuando un cuerpo cae en un líquido y el flujo es laminar (es decir, no es turbulento), el fluido se opone al movimiento con una fuerza que es proporcional a la velocidad, es decir

$$\vec{F}_{roce} = -\eta\vec{v} \quad , \quad v = |\vec{v}| .$$

Encuentre la velocidad terminal. (El coeficiente η depende del fluido y de la forma del objeto).

41. Sea μ el coeficiente de roce cinemático que actúa entre las superficies de la masa m y las cuñas (ver figura adjunta). Entre las cuñas y el suelo el roce es nulo. Suponga que el valor del roce μ es tal que el sistema no se encuentra en equilibrio (es decir, las cuñas se separan y el bloque baja). Sea θ el ángulo, M la masa de las cuñas y m la masa del bloque. Determine la aceleración del bloque m .

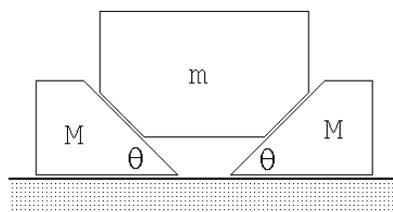


Figura 4.38

42. Sobre un plano inclinado liso, que forma un ángulo θ con la horizontal, se desliza un bloque partiendo del reposo. Después de recorrer una distancia D , el bloque entra en un tramo rugoso. El bloque se detiene luego de recorrer una distancia D en dicho tramo. Calcule el coeficiente de roce cinético entre el bloque y la superficie rugosa.

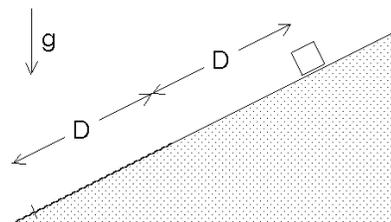


Figura 4.39

4.6. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 12a

Al pasar la plataforma por la cresta de la colina hay dos fuerzas actuando sobre la caja:

- i) El peso, $\vec{W} = -Mg\hat{z}$. (Hemos elegido al eje \hat{z} apuntando hacia arriba, M es la masa de la caja.)

ii) La reacción de la pesa sobre la caja: $\vec{F}_r = F_r \hat{z}$.

La fuerza neta es, por lo tanto,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = (F_r - Mg) \hat{z} .$$

Por otra parte, sabemos que la caja está realizando un movimiento circular de radio R con rapidez constante, o sea, hay una fuerza neta sobre la caja que actúa hacia el centro del círculo (la fuerza centrípeta), que es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{Mv^2}{R} \hat{z} .$$

La fuerza centrípeta y la fuerza neta deben ser iguales, es decir, se tiene que

$$F_r - Mg = -\frac{Mv^2}{R} .$$

Despejando F_r se obtiene

$$\begin{aligned} F_r &= Mg \left(1 - \frac{v^2}{gR} \right) \\ &= 500\text{N} \left(1 - \frac{14^2}{9,81 \cdot 100} \right) \simeq 400 \text{ N} . \end{aligned}$$

Solución al problema 16

Observe primero que, al moverse la cuña hacia la derecha, el bloque m se moverá en diagonal (hacia la derecha y hacia abajo). Sea \vec{r}_m el vector de traslación de m cuando la cuña se traslada en una magnitud s . Se tiene (ver figura 4.40) que

$$\vec{r}_m = s(1 - \cos \alpha) \hat{x} - s \sin \alpha \hat{y} .$$

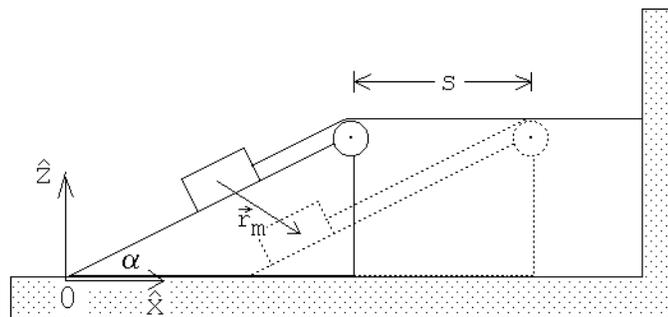


Figura 4.40

Por supuesto que la aceleración de la cuña M y del bloque m están relacionados. Si la aceleración de la cuña es

$$\ddot{\vec{r}}_M = a \hat{x},$$

entonces

$$\ddot{\vec{r}}_m = a(1 - \cos\alpha)\hat{x} - a \sin\alpha \hat{z}. \quad (4.6)$$

Sea τ la tensión de la cuerda y \vec{R} la fuerza que la cuña ejerce sobre el bloque m . Debido a que no hay roce entre las superficies, esta fuerza de reacción \vec{R} es normal al plano inclinado.

La figura 4.41 muestra el diagrama de cuerpo libre para la masa m . Las componentes horizontal y vertical de la fuerza neta que actúa sobre el bloque m son

$$F_x^{(m)} = \tau \cos\alpha - R \sin\alpha \quad (4.7)$$

y

$$F_z^{(m)} = -mg + \tau \sin\alpha + R \cos\alpha, \quad (4.8)$$

respectivamente.

Usando la segunda ley de Newton y las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8), se encuentran las relaciones

$$\tau \cos\alpha - R \sin\alpha = m a (1 - \cos\alpha) \quad (4.9)$$

y

$$-mg + \tau \sin\alpha + R \cos\alpha = -m a \sin\alpha \quad (4.10)$$

Sobre la cuña actúan 4 fuerzas:

- i) El peso $-Mg\hat{z}$.
- ii) Una fuerza (de reacción) \vec{R} que el suelo ejerce sobre la cuña. Esta fuerza, cuya magnitud no nos interesará, actúa en la dirección $+\hat{z}$.
- iii) Una fuerza que el bloque m ejerce sobre la cuña. Por el principio de acción esta fuerza es $-\vec{R}$, o sea, las componentes horizontal y vertical son $R \sin\alpha$ y $-R \cos\alpha$, respectivamente.

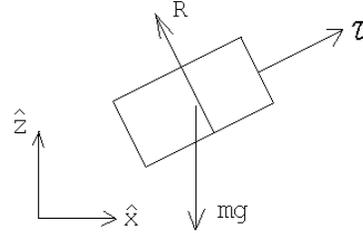


Figura 4.41

- iv) La fuerza ejercida por la roldana sobre la cuña (que es igual a la fuerza ejercida por la cuerda sobre la roldana). De la figura 4.42 se deduce que la fuerza total que ejerce la cuerda sobre la roldana es

$$\vec{F}_c = \tau(1 - \cos \alpha)\hat{x} - \tau \sin \alpha \hat{z} .$$

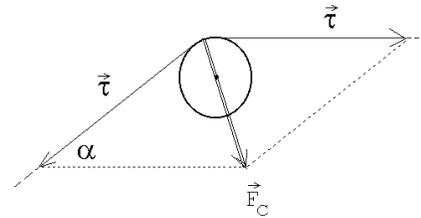


Figura 4.42

La cuña sólo se mueve a lo largo de la horizontal; por eso sólo nos interesa esa componente de la fuerza neta. Usando la segunda ley de Newton se obtiene

$$R \sin \alpha + \tau(1 - \cos \alpha) = Ma . \tag{4.11}$$

Las tres ecuaciones de movimiento (4.9), (4.10) y (4.11) con las tres incógnitas a , τ y R , permiten resolver el problema. Sumando (4.9) y (4.11) se obtiene

$$\tau = ma(1 \cos \alpha) + Ma \tag{4.12}$$

Multiplicando (4.9) por $\cos \alpha$ y (4.10) por $\sin \alpha$ y sumando ambas ecuaciones se obtiene

$$\tau = mg \sin \alpha + ma(\cos \alpha - 1) \tag{4.13}$$

De (4.12) y (4.13) se deduce finalmente que

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} .$$

Solución al problema 22

La relación entre las aceleraciones es $a_m = a_M \tan \alpha$. Los diagramas de cuerpo libre de la masa m y de la cuña se muestran en la figura 4.43. F_N es la fuerza entre la masa m y la cuña.

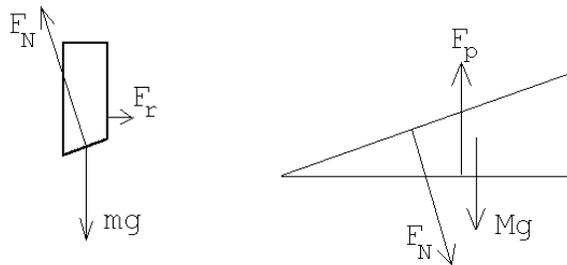


Figura 4.43

Debido a que no hay roce esta fuerza es normal al plano inclinado de la cuña. F_r es la fuerza que la guía ejerce sobre el bloque m (tal fuerza es perpendicular a la guía.) F_p es la fuerza que el piso ejerce sobre la cuña; en ausencia de roce esta fuerza es perpendicular al piso.

Las ecuaciones de movimiento para la masa m y la cuña son:

$$mg - F_N \cos \alpha = ma_m$$

y

$$F_N \sin \alpha = Ma_M .$$

Usando la relación entre las aceleraciones a_m y a_M , podemos despejar a_M , obteniéndose

$$a_M = g \frac{m \tan \alpha}{M + m \tan^2 \alpha} .$$

Si, debido al roce entre el suelo y la cuña el sistema está en equilibrio, entonces la suma de las fuerzas sobre m debe ser nula. Esto permite evaluar F_N de inmediato:

$$F_N \cos \alpha = mg .$$

Al diagrama de cuerpo libre de la cuña hay que agregar una fuerza de roce f_r horizontal (apuntando hacia la izquierda). Que la suma de las fuerzas horizontales sobre la cuña sean nulas nos da la relación

$$F_N \sin \alpha = f_r ,$$

o sea,

$$mg \tan \alpha = f_r .$$

Por otra parte, la fuerza de roce debe satisfacer la relación

$$f_r \leq \mu_e F_p = \mu_e (Mg + F_N \cos \alpha) = \mu_e (M + m)g .$$

De las relaciones anteriores se desprende que

$$mg \tan \alpha = \mu_e^{\min} (M + m)g ,$$

o sea,

$$\mu_e^{\min} = \frac{m}{m + M} \tan \alpha .$$

Solución al problema 24

Del hecho que la velocidad angular es constante y las masas 1 y 2 siguen trayectorias circulares, se deduce que la fuerza neta que actúa sobre ellas es

$$\vec{F}_1 = -m\omega_0^2 (R + L) \hat{r}$$

y

$$\vec{F}_2 = -m\omega_0^2 R \hat{r} ,$$

respectivamente. Aquí m es la masa de cada una de partículas y \hat{r} es un vector unitario que apunta en la dirección radial.

La única fuerza radial real que actúa sobre la masa 1 es la que ejerce la cuerda, luego

$$\tau = m\omega_0^2 (R + L) ,$$

donde τ es la tensión de la cuerda.

Sobre la partícula 2 actúan dos fuerzas radiales: la tensión de la cuerda $\tau\hat{r}$ y la fuerza de roce $-f_r\hat{r}$. Se tiene

$$\tau - f_r = -m\omega_0^2 R$$

o sea,

$$f_r = \tau + m\omega_0^2 R = m\omega_0^2 (2R + L) .$$

Para que las masas no se deslicen la fuerza de roce debe satisfacer la desigualdad $f_r \leq \mu_e mg$. De las dos últimas ecuaciones se deduce que

$$m\omega_0^2 (2R + L) \leq \mu_e mg .$$

La velocidad angular límite a partir de la cual las masas comienzan a deslizarse es, por lo tanto,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_e g}{2R + L}} .$$

Solución al problema 26

Sea M la masa, a la aceleración y t_* el tiempo que tardan las partículas de Cs^+ en atravesar el *condensador*. La carga de cada ión de cesio es $q = -e$, donde $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ [C] es la carga de un electrón (ver problema 25). Durante el proceso de aceleración, la fuerza que actúa sobre cada ión es $F = qE_0$. Usando la segunda ley de Newton se obtiene que $qE_0 = Ma$. La aceleración del átomo de cesio (mientras se mueve al interior del condensador) es, por lo tanto, $a = q/(ME_0)$. El movimiento es uniformemente acelerado.

Durante el intervalo de tiempo $[0, t_*]$ el ión alcanza a recorrer una distancia

$$s_1 = \frac{1}{2}at_*^2 = 0,33 \text{ cm},$$

siendo la velocidad con que emerge del condensador $v_1 = at_*$. A continuación los iones de cesio atraviesan con esa velocidad constante una región de ancho $s_2 = 0,1$ cm, tardando para ello un tiempo $\Delta t = 87 \cdot 10^{-9}$ s. Se tiene que

$$v_1 \Delta t = at_* \Delta t = s_2 ,$$

o sea

$$t_* = \frac{s_2}{a\Delta t}.$$

Por otra parte

$$t_*^2 = \frac{2s_1}{a}.$$

Eliminando t_* de las dos últimas ecuaciones se encuentra

$$a = \frac{s_2^2}{2s_1(\Delta t)^2}.$$

Igualando las dos expresiones que tenemos para la aceleración podemos despejar M (la masa de cada ión de cesio):

$$M = \frac{2|e|E_0s_1(\Delta t)^2}{s_2^2} = 2,4 \cdot 10^{-25} \text{ Kg}.$$

Cada ión de Cs^+ está formado por 58 protones, 84 neutrones y 57 electrones. La masa de los electrones es despreciable frente al de los protones y neutrones y por consiguiente, lo ignoraremos. La masa de un neutrón es muy parecida a la de un protón y, en primera aproximación, podemos suponer que son iguales. En lo que a masa respecta, el ión de cesio lo podemos pensar como un aglomerado de $58+84=142$ nucleones. (Nucleones es el nombre genérico que se le da a los protones y neutrones). Dividiendo la masa del ión de cesio por 142 se encuentra que la masa de un nucleón es aproximadamente $1,69 \cdot 10^{-27}$ Kg, valor que difiere en $\sim 1\%$ del valor medido usando otros métodos.

Al acelerar deuterones (un protón + un neutrón) en lugar de iones de cesio, sólo cambia la masa ya que, igual que en el caso del cesio, la carga neta del deuterón es $+|e|$ (o sea, la fuerza que actúa sobre la partícula acelerada en ambos casos es la misma). El tiempo de travesía Δt es proporcional a \sqrt{M} luego, al usar deuterones en lugar de iones de cesio, el tiempo de travesía será

$$\Delta t_d = \Delta t_{\text{Cs}} \sqrt{\frac{142}{2}} \simeq 10^{-8} \text{ s}.$$

El dispositivo experimental no es capaz de distinguir entre deuterones y partículas α . La partícula α (2 protones + 2 neutrones) tiene el doble de la masa del deuterón y también el doble de la carga neta. Estas dos modificaciones se cancelen en cuanto a la aceleración respecta, siendo por consiguiente ambas iguales.

Solución al problema 27

La fuerza que actúa sobre la carga (ver problema 25) es

$$\vec{F}(t) = q\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x} .$$

Usando la segunda ley de Newton obtenemos las *ecuaciones de movimiento*:

$$m \ddot{x}(t) = qE_0 \sin(\omega t)$$

$$m \ddot{y}(t) = 0$$

y

$$m \ddot{z}(t) = 0 .$$

De las dos últimas, usando las condiciones iniciales se deduce que

$$y(t) = z(t) = 0 \quad \forall t ,$$

o sea, el movimiento sólo ocurre a lo largo del eje x .

Integremos la primera ecuación de movimiento. Se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \int_0^t \frac{qE_0}{m} \sin(\omega t) dt \\ &= 0 - \frac{qE_0}{m\omega} \cos(\omega t) \Big|_0^t \\ &= \frac{qE_0}{m\omega} (1 - \cos(\omega t)) . \end{aligned}$$

La posición de la carga en función del tiempo se obtiene integrando la última ecuación:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{qE_0}{m\omega} \int_0^t (1 - \cos(\omega t)) dt \\ &= 0 + \frac{qE_0}{m\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{qE_0}{m\omega^2} (\omega t - \sin(\omega t)) . \end{aligned}$$

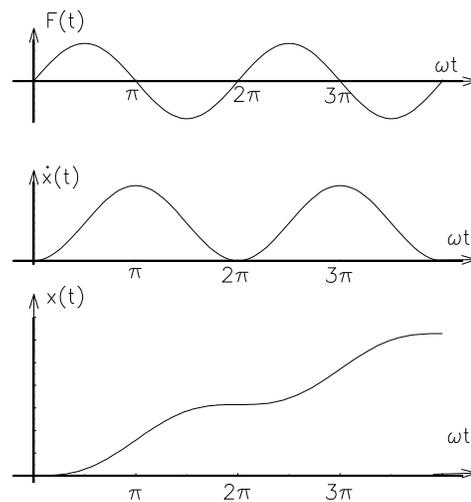


Figura 4.44

La figura 4.44 muestra un gráfico de la fuerza, la velocidad y la posición de la carga en función del tiempo.

Solución al problema 32

De acuerdo con el enunciado, si la rapidez del coche es $v_0 = 80 \text{ km/h}$, no actuará ninguna fuerza de roce. Como la trayectoria del automóvil es circular, se tiene que el movimiento es acelerado y, por lo tanto, sobre el coche actúa una fuerza neta hacia el centro de giro O (la fuerza centrípeta):

$$\vec{F}_c = -\frac{mv_0^2}{R} \hat{r} .$$

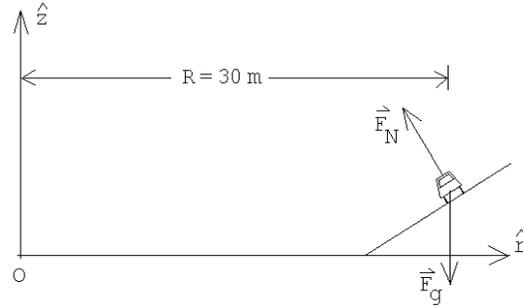


Figura 4.45

Las fuerzas “reales” que actúan sobre el auto (y cuya suma da origen a la fuerza centrípeta) son la fuerza de gravedad

$$\vec{F}_g = -mg \hat{z}$$

y la fuerza normal que la carretera ejerce sobre el coche:

$$\vec{F}_N = F_N \cos \theta \hat{z} - F_N \sin \theta \hat{r} .$$

Por supuesto que

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{F}_N ,$$

o sea,

$$-\frac{mv_0^2}{R} \hat{r} = -mg \hat{z} + F_N \cos \theta \hat{z} - F_N \sin \theta \hat{r} .$$

Igualando las componentes se deduce que

$$F_N \cos \theta = mg$$

y

$$F_N \sin \theta = \frac{mv_0^2}{R} .$$

Tomando el cociente entre estas ecuaciones se encuentra una expresión que nos permite encontrar el ángulo del peralte de la carretera θ :

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{Rg} .$$

Sea v_1 la máxima velocidad que el automóvil puede tener sin que se deslice lateralmente por la carretera. Si el automóvil avanza con rapidez v_1 , entonces además

de la fuerza de gravedad y la fuerza normal, actuará también una fuerza de roce estática \vec{F}_r :

$$\vec{F}_r = -F_r \cos \theta \hat{r} - F_r \sin \theta \hat{z} .$$

Cuando el automóvil avanza con velocidad máxima v_1 , el valor de la fuerza de roce tomará el valor máximo posible $F_r = \mu_e F_N$. (Observe que el coeficiente de roce que debe usarse es el estático y no el cinemático). Se tiene

$$\vec{F}_c = -\frac{mv_1^2}{R} \hat{r} = -mg\hat{z} + F_N \cos \theta \hat{z} - F_N \sin \theta \hat{r} - F_r \cos \theta \hat{r} - F_r \sin \theta \hat{z} ,$$

o sea

$$-\frac{mv_1^2}{R} = -F_N \sin \theta - F_r \cos \theta$$

y

$$0 = -mg + F_N \cos \theta - F_r \sin \theta .$$

Con $F_r = \mu_e F_N$ se encuentra

$$\frac{mv_1^2}{R} = F_N (\sin \theta + \mu_e \cos \theta)$$

y

$$mg = F_N (\cos \theta - \mu_e \sin \theta) .$$

Eliminando F_N y despejando v_1 de las dos últimas ecuaciones se obtiene finalmente

$$v_1^2 = Rg \left(\frac{v_0^2 + Rg\mu_e}{Rg - \mu_e v_0^2} \right) .$$

Este resultado es válido mientras $Rg > \mu_e v_0^2$. Cuando $Rg < \mu_e v_0^2$, el coche nunca se deslizará lateralmente hacia afuera y la velocidad máxima a la que se puede transitar por la carretera, en ese caso, es infinita.

Sea v_2 la mínima velocidad con que se puede transitar sobre la carretera sin deslizarse lateralmente hacia el interior. El análisis en este caso es análogo al anterior, excepto que la fuerza de roce estática ahora actúa en la dirección opuesta. Para v_2 se encuentra

$$v_2^2 = Rg \left(\frac{v_0^2 - Rg\mu_e}{Rg + \mu_e v_0^2} \right) .$$

Este resultado es válido mientras $Rg\mu_e < v_0^2$. Cuando $Rg\mu_e > v_0^2$, el coche nunca se deslizará lateralmente hacia el interior, pudiendo permanecer incluso en reposo (siendo, en ese caso, $v_2 = 0$).

Para los valores numéricos del enunciado las velocidades máxima y mínima con que se puede transitar por la carretera son $v_1 = 123$ km/h y $v_2 = 59$ km/h.

Solución al problema 39

Sea v_* la velocidad terminal que un cuerpo adquiere al caer en la atmósfera. Al caer con la velocidad terminal el cuerpo se moverá con velocidad constante. O sea, la aceleración y la fuerza neta sobre el cuerpo deben ser nulas. Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la fuerza de gravedad $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ y la fuerza de roce $\vec{F}_{roce} = -kv_*\vec{v}_* = kv_*^2\hat{z}$. Se tiene

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{roce} = -mg\hat{z} + kv_*^2\hat{z} = 0 ,$$

o sea,

$$v_* = \sqrt{\frac{mg}{k}} .$$

Solución al problema 41

Denotemos por $\vec{a} = -a\hat{z}$ la aceleración del bloque m . Las fuerzas verticales sobre el bloque m nos dan la ecuación de movimiento

$$-mg + 2F_N \cos \theta + 2F_r \sin \theta = -ma .$$

Como los bloques están en movimiento relativo, la fuerza de roce es de origen cinemático y se tiene que

$$F_r = \mu F_N .$$

La fuerza que el bloque m ejerce sobre la cuña viene dada por $-\vec{F}_N - \vec{F}_r$. La componente horizontal de esta fuerza nos entrega la ecuación de movimiento

$$-F_r \cos \theta + F_N \sin \theta = Mb$$

donde b es la magnitud de la aceleración de las cuñas. Las dos aceleraciones no son independientes sino que están relacionadas por

$$\frac{a}{b} = \tan \theta .$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Despejando la aceleración a obtenemos

$$a = g \left(1 + 2 \frac{M}{m} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \right)^{-1} .$$

Para $\mu = \tan \theta$, la aceleración es nula.

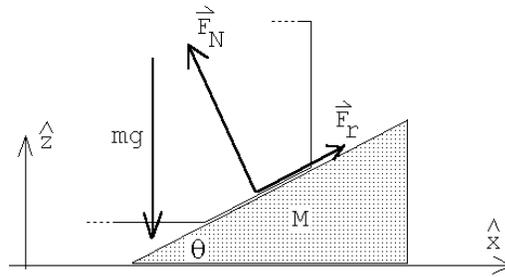


Figura 4.46

Solución al problema 42

Durante el primer tramo de largo D la partícula acelera uniformemente y después *desacelera* uniformemente quedando en reposo después de recorrer otro tramo de largo D . Es evidente que la aceleración durante el segundo tramo debe tener la misma magnitud que en el primero, siendo el signo el opuesto. En otras palabras, la fuerza neta F_1 que actúa sobre la masa en el tramo 1 debe ser la opuesta de la fuerza neta en el tramo 2, F_2 .

En el primer tramo la única fuerza a lo largo del plano inclinado es la componente en esa dirección del peso, esto es, $F_1 = mg \sin \theta$.

En el segundo tramo aparece adicionalmente la fuerza de roce f_r . Esta, para dar una fuerza neta $F_2 = -F_1$ debe ser

$$f_r = -2 F_1 = -2mg \sin \theta .$$

Por otra parte, la fuerza de roce (cinemática) es

$$f_r = -\mu_c mg \cos \theta .$$

Igualando las dos expresiones para f_r y despejando μ_c se obtiene, finalmente,

$$\mu = 2 \tan \theta .$$

Capítulo 5

Trabajo y energía

versión 19 agosto 2010

Podemos considerar los capítulos anteriores como un progresivo camino de simplificación en la descripción del movimiento. Primero, observamos que, para describir el movimiento de una partícula, requerimos conocer su posición, velocidad y aceleración. En una dimensión éstas son tres funciones del tiempo; en tres dimensiones, nueve. Eventualmente, introduciendo Matemática adicional (derivadas e integrales), aprendemos que no necesitamos tantas funciones, sino sólo tres (digamos, las posiciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ para todo tiempo). E introduciendo el concepto adicional de vectores, podemos reducir esto a una sola función, el vector posición para todo tiempo. A continuación aprendimos que, en realidad, no necesitamos conocer la posición, o la aceleración, para todo tiempo, sino la fuerza. También es un vector, y por lo tanto también son tres funciones, como la posición, pero la fuerza no necesariamente depende del tiempo, y es por tanto un punto de partida mucho más sencillo para describir el movimiento.

En este capítulo aprenderemos que es posible hacer una simplificación adicional: en realidad tampoco necesitamos la fuerza, que equivale a tres funciones escalares, sino que basta con una única función escalar: la energía. Esto permitirá una gran simplificación en la descripción del movimiento, una simplificación que dará pie, eventualmente, a una formulación mucho más elegante de la Mecánica. Y no sólo más elegante, sino también más poderosa y generalizable a otros ámbitos de la Física. En este curso, sin embargo, nos limitaremos a explorar las consecuencias más básicas de la simplificación y elegancia que mencionamos. El resto, será tema de cursos más avanzados.

5.1. Trabajo y energía para movimientos en una dimensión

Consideremos una partícula de masa m , restringida a moverse a lo largo del eje \hat{z} , siendo $z(t)$ y $v(t)$ la posición y velocidad de la partícula a medida que transcurre el tiempo. En particular, sean z_i y v_i la posición y velocidad de la partícula en el instante t_i , y z_f y v_f la las mismas magnitudes en el instante t_f . Supongamos además que, a medida que la partícula se traslada, ejercemos sobre ella una fuerza $F(z)$, fuerza que podría depender de la posición z .

Analicemos varios casos:

- a) Si la partícula, excepto por la fuerza que le estamos aplicando, es libre, entonces acelerará. Si la fuerza $F(z) = F_0$ es constante (es decir, no depende de la posición), entonces la aceleración también lo será, teniéndose $F_0 = ma_0$. De acuerdo a la cinemática de un objeto uniformemente acelerado, en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, la posición y velocidad de la partícula en el instante $t + \Delta t$ serán

$$\begin{aligned} z(t + \Delta t) &= z(t) + v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2, \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + a_0 \Delta t. \end{aligned}$$

Las variaciones de la posición y la velocidad son, entonces,

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) = v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2$$

y

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = a_0 \Delta t.$$

Multipliquemos ahora la primera ecuación por F_0 . Nunca hemos necesitado hasta ahora la cantidad $F_0 \Delta z$, pero ya veremos la utilidad de hacerlo. Usemos, además, consecutivamente, la segunda ley de Newton y la expresión para Δv . De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} F_0 \Delta z &= F_0 v(t) \Delta t + \frac{1}{2} F_0 a_0 (\Delta t)^2 \\ &= m a_0 v(t) \Delta t + \frac{1}{2} m (a_0 \Delta t)^2 \\ &= m v(t) [v(t + \Delta t) - v(t)] + \frac{1}{2} m [v(t + \Delta t) - v(t)]^2 \\ F_0 \Delta z &= \frac{1}{2} m v^2(t + \Delta t) - \frac{1}{2} m v^2(t). \end{aligned}$$

Como la fuerza es constante, las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier Δt , en particular para $t = t_i$ y $t + \Delta t = t_f$, en cuyo caso

$$F_0 \cdot (z_f - z_i) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2.$$

Observemos con cuidado este resultado: sólo conocemos la posición inicial, la posición final, y la fuerza, que es constante. Sabemos que el movimiento entre z_i y z_f es complicado (la velocidad aumenta linealmente con el tiempo, la posición aumenta cuadráticamente), pero nada de eso es relevante ahora. Podemos afirmar, sólo con esta información, que si escogemos dos puntos arbitrarios de la trayectoria, z_i y z_f , la cantidad $F_0(z_f - z_i)$ será igual a la diferencia de una función, *la misma función* ($mv^2/2$), evaluada en dichos puntos. Esto es, en cierto modo, extraordinario. En la búsqueda de una descripción adecuada del movimiento habíamos concluido que tomar dos puntos arbitrarios de una trayectoria es insuficiente, viéndonos en la necesidad de definir velocidad y aceleración instantáneas, y en definitiva, introducir los elementos de toda un área de la Matemática, el Cálculo Infinitesimal. Ahora, sin embargo, estamos diciendo exactamente lo opuesto: a usted le basta tomar el principio y el final de la trayectoria, eventos que pueden estar arbitrariamente separados en el tiempo. Se podría objetar que este resultado es restringido, pues no estamos describiendo el movimiento completo, sino sólo calculando algo muy particular, $F_0(z_f - z_i)$, y además para un caso en que la fuerza es constante. Veremos, sin embargo, que ambas objeciones se pueden responder satisfactoriamente, y por tanto, el resultado que acabamos de obtener es el punto de partida de la formulación más elegante de la Mecánica que hemos sugerido.

Como dijimos, la cantidad $F_0(z_f - z_i)$ resulta ser igual a la diferencia de cierta función, evaluada en ambos extremos de la trayectoria. A dicha función la llamamos *energía*. Específicamente, como en este caso dicha energía depende de la velocidad, la denominaremos *energía cinética*, denotándose habitualmente con las letras K o T . Por otra parte, a la cantidad $F_0(z_f - z_i)$, que es el producto entre la fuerza y el desplazamiento, se le denomina *trabajo*, y se le denota usualmente con la letra W . Es decir, el resultado para una partícula sometida a una fuerza constante se puede reescribir

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = K_f - K_i .$$

En el lenguaje del capítulo anterior, habríamos dicho que ejercer una fuerza sobre una partícula se traduce en un cambio de velocidad de la misma. Ahora, decimos que ejercer un trabajo sobre una partícula se traduce en un cambio de su energía cinética. El trabajo realizado es, de hecho, exactamente igual al cambio de su energía cinética. Independiente de cuánto tiempo le tome.

En Física, trabajo y energía es esencialmente lo mismo. Son conceptos distintos, pero al menos tienen las mismas unidades: en el sistema internacional de unidades SI, $mv^2/2$ y F_0z tienen unidades de newton · metro, que definimos como *joule* (J):

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \cdot \text{metro} ,$$

o sea,

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} .$$

- b) Si la fuerza no es constante, entonces subdividamos la trayectoria de la partícula en N intervalos de tamaño Δz . Denotemos las distintas posiciones por $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, z_{N+1}$, siendo $z_i = z_1$ y $z_f = z_{N+1}$. Si en cada intervalo j la fuerza se mantiene relativamente constante, podemos usar el resultado de la parte a), o sea,

$$W_{z_j \rightarrow z_{j+1}} = F(z_j) \cdot (z_{j+1} - z_j) = F(z_j) \cdot \Delta z = K_{j+1} - K_j ,$$

siendo natural definir el trabajo total como la suma de los trabajos ejercidos sobre la partícula en cada intervalo de tiempo.

Sumando la contribución de todos los intervalos se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N F(z_j) \cdot \Delta z &= (K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) + (K_4 - K_3) + \dots + (K_{N+1} - K_N) \\ &= K_{N+1} - K_1 , \end{aligned}$$

o sea,

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = \sum_{j=1}^N F(z_j) \cdot \Delta z = K_f - K_i .$$

La expresión anterior es exacta en el límite $N \rightarrow \infty$, de modo que el tamaño de los intervalos Δz se torna infinitesimalmente pequeño. En este caso, Δz es un dz , y la sumatoria es una integral, teniéndose

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = \int_i^f F(z) \cdot dz = K_f - K_i .$$

Observamos que hemos obtenido exactamente el mismo resultado que para una fuerza constante, y por lo tanto lo que dijimos en el ítem anterior sigue siendo cierto: independiente del tiempo que transcurra entre dos mediciones, independiente incluso de cómo varíe la fuerza entre dichas dos mediciones (y por lo tanto el detalle de posiciones, velocidades y aceleraciones intermedias), cuando calculamos el *trabajo* ejercido por la fuerza a lo largo de la trayectoria, dicho trabajo resulta ser igual simplemente a la diferencia de una cierta función (la energía cinética), evaluada en el punto final y en el punto inicial.

- c) Supongamos ahora que la partícula no es libre, sino que está inmersa en un campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{z}$. Levantemos la partícula desde z_i hasta z_f , partiendo desde el reposo y volviendo a dejarla en reposo. Elevamos la

partícula aplicando una fuerza de manera que ésta suba con una velocidad constante. Mientras la partícula va subiendo, su aceleración es nula, luego también la fuerza neta que actúa sobre ella. De lo anterior se desprende que la fuerza que debemos ejercer para elevar la partícula es $F(z) = +mg$. El trabajo que nosotros realizamos es la integral de esta fuerza a lo largo de la trayectoria, es decir,

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = +mg \cdot (z_f - z_i) .$$

Observamos que, nuevamente, el trabajo ejercido es igual a la diferencia de una cierta función (mgz) evaluada en los puntos inicial y final de la trayectoria. Siguiendo la analogía con el caso anterior, entonces, diremos que esta función es también una energía (tiene las unidades adecuadas, por supuesto). Ésta, sin embargo, es una energía de carácter distinto. El trabajo no se ha traducido en un cambio de energía cinética, porque como la fuerza neta es cero, la velocidad es la misma en ambos extremos de la trayectoria. Sin embargo, es claro que algo ha cambiado en la partícula, porque después de aplicada la fuerza la partícula se encuentra más arriba. Diremos que lo que ha ocurrido es un cambio de *energía potencial*, porque cambia la “potencialidad” de la partícula para realizar trabajo o de adquirir energía cinética.

En efecto, al dejar caer la partícula sin restricciones desde z_f hasta z_i , adquirirá una velocidad que, de acuerdo a las ecuaciones de la cinemática de la caída libre, es $v_f = \sqrt{2g(z_f - z_i)}$. Para esta velocidad, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2g(z_f - z_i) = mgz_f - mgz_i .$$

Pero éste es exactamente igual al cambio de energía de la partícula al elevarse. Entonces podemos decir que, al ejercer trabajo sobre ella hasta elevarla una altura $z_f - z_i$, aunque no cambió su energía cinética, sí cambió algo en ella, porque ahora, si la dejamos libre, es capaz de llegar al punto inicial con una velocidad mayor. Por ello decimos que la energía que cambia al elevarla es potencial, que no se manifiesta directamente.

Otra forma en que puede manifestarse esta “potencialidad” de la partícula consiste en hacer que ella realice trabajo. Por ejemplo, podemos atarla a una cuerda de modo que, por medio de un sistema de poleas, eleve otra masa.

Observemos, incidentalmente, que la manera en que describimos un sistema es completamente distinta ahora que hemos introducido el concepto de energía: ejercemos un trabajo sobre la partícula, que se traduce en un cambio de su energía potencial. Y al dejarla caer, esa energía potencial se traduce en energía cinética al volver al suelo. En definitiva, el trabajo ejercido por nosotros se convirtió en energía cinética, a través de sucesivas transformaciones.

De acuerdo a lo desarrollado más arriba, también en este ejemplo podemos expresar el trabajo $W_{z_i \rightarrow z_f}$ como una diferencia de cierta magnitud evaluada en el punto final menos la misma magnitud evaluada en el punto de partida:

$$W_{z_i \rightarrow z_f} = U(z_f) - U(z_i) ,$$

donde $U(z)$ es la *energía potencial*. (Se designa usualmente con las letras U o V .) Para una partícula de masa m en el campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{z}$, que viene dada por

$$U(z) = U_0 + mgz ,$$

con U_0 cierta constante arbitraria, que depende de en qué punto diremos que la energía potencial es nula. Veremos en breve que, cuando la partícula está sometida a otros campos de fuerza, también puede definirse una energía potencial respectiva. Por ello, podemos también especificar que la anterior corresponde a la *energía potencial gravitatoria*.

Hemos introducido una constante U_0 , ya que el trabajo sólo depende de la diferencia de la energía potencial entre dos puntos, y esta constante es, en ese sentido irrelevante. U_0 corresponde simplemente a la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra en $z = 0$. Cuando definimos energía cinética, ya que también el trabajo depende sólo de su diferencia, podríamos haber introducido una constante aditiva K_0 . No lo hicimos, ya que tiene mucho sentido decir que la partícula, cuando está en reposo, tiene energía cinética cero. En el caso de la energía potencial gravitatoria, en cambio, no existe ninguna razón de peso para pensar que debe ser cero cuando $z = 0$. Por ejemplo, si la energía potencial indica la “capacidad” de ejercer trabajo, o de adquirir energía cinética al llegar al suelo luego de una caída libre, podríamos pensar en la siguiente situación: digamos que $z = 0$ corresponde no al suelo, sino a la superficie de una mesa que está a cierta altura h respecto al suelo. Si una manzana se encuentra sobre la mesa, es cierto que si la hacemos rodar hasta el borde de la mesa, y cae, adquirirá una energía cinética. Eso significa que tenía una energía potencial en primer lugar. Por lo tanto, no sería “correcto” decir que su energía potencial es cero sobre la mesa. Vemos, entonces, que la altura $z = 0$ no tiene por qué coincidir con la altura z para la cual $U(z) = 0$, y por ende $U_0 \neq 0$ en general. Pero nada impide insistir en poner $U(z = 0) = 0$. En el ejemplo de la manzana sobre la mesa, lo único que sucede es que su energía potencial en el suelo sería negativa, la diferencia de potencial será negativa, $U(z_f) - U(z_i) = -mgh$, y por tanto la diferencia de energía cinética será positiva, $K(z_f) - K(z_i) = U(z_i) - U(z_f) = mgh$, y la velocidad final de caída será lo esperado. O sea, nada extraño. Lo importante es tener presente que el cero de las alturas no tiene por qué corresponder al cero de la energía potencial. Pero, para todos los efectos prácticos, lo único relevante en Mecánica Clásica son las

diferencias de energía potencial, de modo que, si simplifica las ecuaciones o es conveniente por otras razones, no hay problema en poner $U_0 = 0$.

Notemos finalmente otro aspecto importante: en el análisis anterior, supusimos que la partícula subía con velocidad constante desde z_i a z_f , es decir, la fuerza ejercida por nosotros es constante. Sin embargo, usando el mismo argumento del caso b), si la fuerza no es constante basta dividir la trayectoria en intervalos más pequeños, donde la fuerza sí sea constante. La conclusión será la misma de b): el trabajo total será simplemente la diferencia de las energías potenciales en el punto final e inicial. No es importante que la partícula suba con velocidad constante, entonces: si parte del reposo, la elevamos, y la dejamos en reposo en su posición final, el trabajo realizado es el mismo.

Más aún: en el proceso anterior lo único importante es que el campo de fuerzas tenga asociada una energía potencial, para poder decir que, en cada intervalo, $F(z)\Delta z = U(z_f) - U(z_i)$. Por lo tanto, para *cualquier campo de fuerzas*, podemos calcular el trabajo para llevar la partícula de un punto a otro, para el caso de fuerza aplicada constante, y los resultados seguirán siendo válidos si la fuerza no es constante.

- d) Consideremos un resorte de constante de restitución k , acostado sobre una superficie horizontal sin roce y con un extremo empotrado en una pared (ver figura 5.1). Supongamos además que el sistema inicialmente se encuentra en reposo, con el resorte teniendo su largo natural.

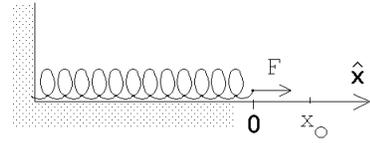


Figura 5.1

Evaluemos el trabajo que debemos realizar para alargar (lentamente) el resorte en una magnitud x_0 . La fuerza que debemos aplicar para lograr nuestro objetivo ahora no es constante, sino que aumenta a medida que el resorte se estira:

$$\vec{F}(x) = kx \hat{x} .$$

(Esta fuerza es la opuesta a la que el resorte ejerce sobre la masa, que, de acuerdo a la *Ley de Hooke*, es $-kx\hat{x}$.) El trabajo que debemos realizar para alargar el resorte, desde $x = 0$ hasta $x = x_0$, viene dado por

$$W_{0 \rightarrow x_0} = \int_{x=0}^{x=x_0} F(x) \cdot dx = \int_0^{x_0} kx dx = k \int_0^{x_0} x dx .$$

Ya sabemos que la integral $\int f(x) dx$ no es otra cosa que el área bajo la curva del gráfico de la función $f(x)$. Para el presente caso, la función corresponde a una recta que pasa por el origen (ver figura 5.2), siendo el área bajo la curva $\frac{1}{2}x_0^2$.

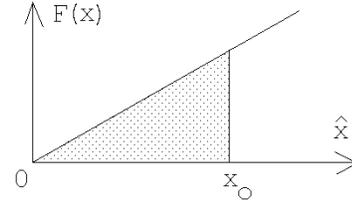


Figura 5.2

Luego, el trabajo que debe realizarse para expandir el resorte hasta x_0 es

$$W_{0 \rightarrow x_0} = \frac{1}{2} k x_0^2 .$$

(Se obtiene el mismo resultado si, en lugar de alargarlo, el resorte se comprime en una magnitud x_0 .)

Si hubiéramos desplazado el resorte desde una posición arbitraria x_i a otra x_f , es claro que el trabajo realizado sería

$$W_{x_i \rightarrow x_f} = \frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2) .$$

Una vez más, el trabajo realizado es igual a la diferencia de una función, evaluada en los puntos extremos de la trayectoria.

Además, también en este ejemplo, el trabajo realizado por nosotros sobre la partícula no se manifiesta en un cambio de su energía cinética, sino lo que cambia es el estado del sistema. En el nuevo estado, el sistema tiene la “potencialidad” (al permitir que el resorte vuelva a su largo natural) de realizar trabajo, o de entregarle a la partícula adosada al resorte una energía cinética. Decimos entonces que el trabajo realizado se traduce en un cambio de energía potencial. Como en este caso el campo de fuerzas corresponde a un resorte, decimos que es una *energía potencial elástica*.

Si la energía potencial de un resorte la definimos por

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2} k x^2 ,$$

donde $x = 0$ corresponde a la posición de equilibrio del resorte y x es la magnitud en que éste se comprime o se alarga, entonces nuevamente

$$W_{0 \rightarrow z_0} = U(z_0) - U(0) .$$

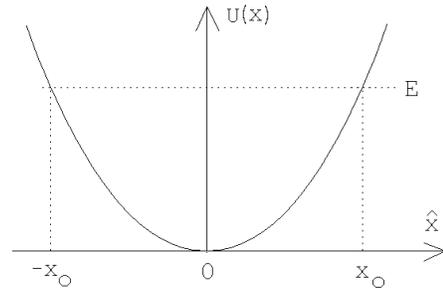


Figura 5.3

(La constante aditiva U_0 en la expresión para la energía potencial nuevamente no aparece en el resultado final; la podríamos haber elegido igual a cero. De hecho así lo haremos en lo sucesivo, respetando la intuición de que la energía potencial de un resorte en su largo natural debería ser nula.) La figura 5.3 muestra el gráfico $U(x)$ para la energía potencial de un resorte, correspondiendo a una parábola.

- e) Consideremos ahora una partícula que se mueve a lo largo de una recta (el eje \hat{x}) sobre una mesa y supongamos que, además de la fuerza que nosotros ejercemos sobre ella, la única otra fuerza se debe al roce (cinético). La fuerza de roce es $f_r = mg\mu_c$ (pero note que ésta aparece sólo cuando la partícula se está moviendo y observe además que la dirección en que apunta siempre es contraria a la dirección de movimiento). El trabajo que debemos realizar para empujar la partícula, con velocidad constante, desde x_i hasta x_f es

$$W = f_r \cdot (x_f - x_i) = (mg\mu_c) \cdot (x_f - x_i) .$$

En este caso, sin embargo, el trabajo que realizamos no se manifiesta en un cambio de algo que podríamos denominar energía potencial. (A pesar de que el trabajo resultó, como en ocasiones anteriores, igual a la diferencia de una función evaluada en los extremos de la trayectoria.)

Podemos comprobar la afirmación anterior con un ejemplo sencillo: si la partícula tiene inicialmente una velocidad v_0 , al dejarla “libre” en x_i se detendrá, por efecto del roce, al cabo de una distancia $d = v_0^2/(2\mu g)$. Si, en cambio, la empujamos con velocidad constante hasta x_f , y la soltamos en este segundo punto, la partícula se detendrá al cabo de *la misma* distancia d . Es decir, aún cuando efectuamos trabajo sobre la partícula, el estado del sistema no cambia: al dejar de aplicar la fuerza, el sistema hace lo mismo. No como en el caso gravitatorio o elástico, en que liberar al sistema desde dos posiciones distintas significa que la partícula efectivamente adquiere mayor velocidad, ya sea al llegar al suelo o al pasar por la posición de equilibrio del resorte, respectivamente.

Vemos, entonces, que no es posible definir un concepto análogo a la energía potencial cuando se trata del roce.

De hecho, podemos distinguir dos problemas adicionales, aunque íntimamente relacionados con el anterior, que aparecen cuando hay roce y que hace que la situación sea distinta que en los dos últimos casos:

- i) En primer lugar, el trabajo que debe hacerse para llevar la partícula desde x_i hasta x_f , cuando hay roce, depende del “camino” que uno elija para ello. Esto es profundo, y está directamente relacionado con el hecho de que el trabajo no se pueda escribir, como vimos, como una magnitud que sólo dependa del punto inicial y final. En efecto, supongamos que x_f está a la

derecha de x_i . Ya vimos que, al llevar la partícula directamente desde x_i a x_f , el trabajo que debemos realizar es $W = mg\mu_c \cdot (x_f - x_i)$. Pero si antes la empujamos hacia la izquierda en una distancia L , y recién desde ahí la empujamos al punto final x_f , el trabajo sería $W = mg\mu_c \cdot (2L + x_f - x_i)$. O sea, el trabajo no sólo depende del punto inicial y final sino que también del camino.

- ii) Otra característica del trabajo que se hace contra el roce es que éste no es recuperable como energía mecánica. Ya observamos que la masa tardará el mismo tiempo en detenerse, independiente de cuánto tiempo apliquemos una fuerza, de modo que el trabajo que hemos hecho, en realidad, no se ha convertido en nada útil desde el punto de vista mecánico. Esto también está relacionado con el hecho de que no hay ninguna “energía potencial” que haya cambiado en el intertanto. ¿Entonces el trabajo que efectuamos simplemente desapareció? En realidad no, sino que se disipa como calor, calentando las superficies en contacto. (En rigor sí es posible, utilizando una máquina térmica, recuperar la energía disipada, pero de todos modos las leyes de la Termodinámica implican que la recuperación del trabajo, aunque se hiciera, sería sólo parcial. Una vez que hay roce presente, siempre parte del trabajo realizado se va a disipar irremediabilmente en forma de calor no aprovechable mecánicamente.)

Los ejemplos unidimensionales anteriores sugieren lo siguiente:

Definición: El *trabajo* realizado por una fuerza $F(z)$ que actúa sobre alguna partícula es

$$W = \sum_j F(z_j) \cdot (z_{j+1} - z_j) = \int F(z) dz \quad ,$$

donde la suma (o integral) se realiza a lo largo de la trayectoria que recorre la partícula.

El trabajo W que se entrega a un sistema, cuando no hay roce, se manifiesta en un cambio de la energía del sistema. Hasta el momento hemos identificado las siguientes formas de energía:

- a) Energía cinética de una partícula de masa m . Ésta viene dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad ,$$

y se manifiesta en el movimiento de la partícula. Cuando la partícula está en reposo, su energía cinética es cero.

- b) Energía potencial. Ésta es una energía que se debe a la existencia de un *campo de fuerzas* al cual la partícula está sometida. En los ejemplos

posición de la partícula. La energía potencial depende de la posición, y sólo aparece cuando la partícula no es libre, sino que está sometida a un *campo de fuerzas*. La expresión para la energía potencial depende del campo de fuerzas específico de que se trate. Hasta el momento hemos analizado dos casos:

- i) Campo gravitacional uniforme, $\vec{F}(z) = m\vec{g} = -mg\hat{z}$, en cuyo caso la energía potencial es

$$U(z) = mg \cdot (z - z_0) ,$$

donde z_0 es un lugar que arbitrariamente hemos fijado como el cero de la energía potencial.

- ii) Campo de fuerzas de un resorte, $\vec{F}(x) = -kx\hat{x}$, en cuyo caso la energía potencial es

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 .$$

Cuando hay roce, parte (o toda) la energía entregada al sistema (por medio del trabajo), puede disiparse. Esta energía se manifiesta en un aumento de la temperatura de las superficies que rozan entre sí. En este caso, el trabajo W se transforma en calor Q .

Las observaciones anteriores se pueden resumir en el siguiente Principio de Conservación:

Conservación de la energía:

Al entregarle a una partícula un trabajo W , entonces

$$W = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) + Q , \quad (5.1)$$

o sea, el cambio de la energía cinética, más el cambio de la energía potencial, más la energía disipada como calor es igual al trabajo (energía) aplicado al sistema.

La ecuación de conservación de la energía hay que manejarla con precaución, pues no se puede estar seguro de que uno hayan identificado todas las posibles formas de energía. De hecho, a medida que avancemos en el estudio de la física, en varias oportunidades nos veremos forzados a reinterpretar esa ecuación o agregarle términos adicionales.

Lo importante es tener presente que la expresión anterior dice algo extraordinariamente importante: que aplicar trabajo sobre un sistema físico significa alterar “algo” en el mismo, un “algo” que llamamos energía, y que el cambio de energía es exactamente igual al trabajo realizado. A menos que haya roce, en cuyo caso el calor disipado es exactamente igual a la diferencia entre el trabajo efectuado y el cambio de energía.

Este *Principio de conservación de la energía* es una afirmación muy general acerca de los sistemas físicos, mecánicos o no. Insistimos en la importancia de notar que este principio de conservación no dice, tal como está formulado, que la energía no cambia, sino algo más general: la energía de un sistema sólo puede cambiar si se efectúa trabajo sobre él.

Podemos, sin embargo, dejar el principio anterior en una forma más familiar, reescribiendo la ecuación (5.1) también se de la siguiente manera:

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W - Q .$$

A ambos lados aparece la suma $K + U$, evaluada al inicio o al final de la trayectoria. Definimos entonces la *energía mecánica*,

$$E = K + U .$$

Más aún, podemos notar lo siguiente: para un sistema cerrado (es decir, un sistema sobre el cual no hay fuerzas externas) sin roce,

$$E_f = E_i , \tag{5.2}$$

es decir, *la energía mecánica se conserva*.

Es importante distinguir que lo anterior se cumple sólo para sistemas cerrados. Ojo: esto no significa que no haya fuerzas presentes. De hecho, la energía potencial contiene información sobre fuerzas presentes en el sistema. Pero un sistema cerrado es aquél sobre el cual no hay fuerzas *externas* actuando. Por ejemplo, consideremos una pelota cayendo al suelo. La pelota no es un sistema cerrado, porque hay una fuerza sobre ella, el peso, que la acelera. El peso efectúa trabajo sobre la pelota, y naturalmente se produce un cambio de su energía (cinética en este caso). Si miramos sólo la pelota, concluimos que su energía no se conserva. Pero si consideramos ahora el sistema compuesto por la pelota y la Tierra, el peso de la pelota es una fuerza interna, descrita en la energía potencial gravitatoria, y la energía mecánica se conserva. (Naturalmente, todo esto depende de qué pregunta estemos interesados en responder, y qué aproximaciones sean relevantes, ya que en rigor sí hay fuerzas externas sobre el sistema Tierra-pelota, por ejemplo la atracción gravitatoria del Sol, y si no podemos despreciarla, entonces ya no será un sistema cerrado.)

Pero volvamos a la ecuación (5.2). El lado izquierdo depende sólo del estado final del sistema, y el lado derecho depende sólo del estado inicial del sistema. Vemos aquí, explícitamente, lo que notamos en el primer ejemplo unidimensional que tratamos: independiente del tiempo que medie entre dos eventos, independiente de los detalles de la trayectoria, de aceleraciones y desaceleraciones, de avances y retrocesos durante la misma, el concepto de energía nos permite ver el sistema de modo global, y afirmar que, por encima de todos los detalles intermedios, hay algo en la evolución del sistema que no cambia, algo invariante, y eso es precisamente la energía del sistema. Ya que

el instante inicial y el final de la trayectoria son arbitrarios, la energía mecánica es la misma *en todo* instante.

En Física, como veremos a lo largo de este curso y muchos otros en el futuro, las leyes de conservación son extremadamente importantes. Podemos intuir por qué, ya que si, en medio de toda la complejidad y variabilidad de un sistema físico, que naturalmente evoluciona constantemente, somos capaces de encontrar algo que se mantiene invariante, ello nos acerca a una gran simpleza conceptual en la descripción del sistema.

Podemos apreciar lo anterior considerando una partícula de masa m , en reposo a una altura h del suelo. Deseamos calcular la velocidad v con la que llega al suelo. Este problema lo hemos resuelto muchas veces, pero utilicemos el lenguaje que hemos adquirido en este capítulo. Tomemos como estado inicial el instante en que la partícula justo comienza a caer desde el reposo, y el estado final el instante en que llega al suelo. Entonces sus energías mecánicas inicial y final son

$$E_i = mgh ,$$
$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 ,$$

donde hemos supuesto que el cero de la energía potencial coincide con el nivel del suelo. El principio de conservación de la energía nos dice que, siendo el sistema cerrado y no habiendo roce, $E_i = E_f$, de lo que se sigue que $v = \sqrt{2gh}$, el resultado esperado.

Por supuesto que debía ser el mismo resultado de siempre. Pero notemos que, en el lenguaje de fuerzas (Cap. 4), la manera de enfrentar este problema es escribir la segunda ley de Newton con la fuerza correspondiente (el peso); luego integrar una vez para obtener la velocidad; luego integrar de nuevo para obtener la posición; imponer las condiciones iniciales de posición y velocidad; calcular, de la ecuación de itinerario para la posición, el tiempo que tarda la partícula en llegar al suelo; reemplazar dicho tiempo en la ecuación de itinerario para la velocidad, para obtener finalmente la velocidad de caída.

Es claro que la descripción en términos de energía es *enormemente* más sencilla. Esto no es magia ni casualidad, sino que se debe precisamente al poder contenido en haber encontrado una cantidad conservada (la energía) en el sistema.

Problema resuelto en clases: 5.4

En los ejemplos anteriores hemos resuelto las velocidades finales de un cuerpo en caída libre o en una máquina de Atwood (problema 5.4), usando la conservación de energía entre un determinado estado inicial y otro final, donde la separación temporal entre ellos es arbitraria. Esto ha sido una gran ventaja, y nos da una manera muy sencilla de resolver problemas. Podríamos pensar, sin embargo, que hemos perdido información, precisamente porque ya no hay información sobre el tiempo y la evolución detallada del sistema para llegar desde dicho estado inicial al final.

No es así. La clave es notar que, precisamente porque la energía es constante, podemos usar ese hecho tanto para dos eventos arbitrariamente alejados en el tiempo, como para dos eventos arbitrariamente cercanos. Tenemos un modo de decir eso en lenguaje matemático: que la energía sea constante, significa que su derivada temporal es cero, es decir

$$\frac{dE}{dt} = 0 . \quad (5.3)$$

Consideremos, por ejemplo, la partícula anterior en caída libre. Para un instante de tiempo arbitrario, su energía mecánica será la suma de sus energía cinética y potencial:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 + mgz(t) .$$

Entonces, (5.3) da

$$\dot{z}(m\ddot{z} + mg) = 0 .$$

Puesto que en general $\dot{z} \neq 0$, la ecuación anterior equivale a

$$m\ddot{z} = -mg \quad \dots$$

¡que es precisamente la segunda ley de Newton para esta partícula!

Es decir, la conservación de la energía no sólo permite resolver problemas con gran elegancia, gracias a que podemos comparar instantes arbitrariamente separados en el tiempo sin preocuparnos de los detalles intermedios. Además, la conservación de la energía *es* equivalente a la segunda ley de Newton, y por lo tanto tiene *toda* la información que necesitamos para describir el movimiento en todo instante si lo requerimos.

Por cierto, hemos mostrado lo anterior sólo para un caso particular, la caída libre. Es fácil convencerse de que (5.3) también da las ecuaciones de movimiento correctas para cada masa en la máquina de Atwood, y en muchos otros sistemas. Podremos mostrar que efectivamente es así para un sistema arbitrario (bajo ciertas restricciones) un poco más adelante en este Capítulo, pero antes necesitamos generalizar los resultados obtenidos anteriores al caso de tres dimensiones.

5.2. Trabajo para un movimiento en tres dimensiones

Consideremos ahora una partícula libre de masa m que se mueve en el espacio tridimensional y cuya posición y velocidad en el instante t son \vec{r} y \vec{v} , respectivamente. Apliquemos sobre esa partícula, durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt , una fuerza \vec{F} .

De acuerdo a la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

Durante el intervalo de tiempo infinitesimal dt , la partícula se desplaza una distancia

$$d\vec{r} = \vec{v} dt .$$

Puesto que ahora la fuerza y el desplazamiento son vectores, es natural pensar que la cantidad equivalente a $F(z)dz$ en el caso unidimensional está dada por el producto punto entre ellos.

Haciendo pues el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento, se obtiene

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot \vec{a} dt . \quad (5.4)$$

Para evaluar el producto punto $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$. La aceleración, por su parte, hace que la velocidad en un tiempo posterior sea distinta, $\vec{v}(t + dt)$. Inspirados por los resultados unidimensionales, que representan el trabajo con la energía cinética, consideremos la velocidad al cuadrado en el instante $t + dt$. Se tiene

$$\begin{aligned} v^2(t + dt) &= \vec{v}(t + dt) \cdot \vec{v}(t + dt) \\ &= (\vec{v}(t) + \vec{a}(t) dt) \cdot (\vec{v}(t) + \vec{a}(t) dt) \\ &= \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) dt + \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t) (dt)^2 \\ &= v^2(t) + 2\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) dt + (\text{términos del orden de } (dt)^2) , \end{aligned}$$

o sea,

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) dt = \frac{1}{2}v^2(t + dt) - \frac{1}{2}v^2(t) .$$

Con este resultado y la expresión (5.4) obtenemos que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2(t + dt) - \frac{1}{2}mv^2(t) .$$

La última ecuación nos indica que el cambio de energía cinética de una partícula sobre la cual actúa una fuerza durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ (pero por lo demás es libre), es igual al producto punto de esa fuerza y el desplazamiento realizado por la partícula en ese mismo intervalo. Lo anterior sugiere definir el *trabajo*, en el caso tridimensional, como el producto punto del vector fuerza y el vector desplazamiento.

Si el movimiento no ocurre durante un intervalo de tiempo infinitesimal, sino entre dos instantes t_i y t_f , podemos usar la ecuación anterior siempre que el intervalo se divida en muchos intervalos pequeños y luego se sumen los trabajos y los cambios en la energía cinética de cada uno de los intervalos. De esta manera se obtiene

$$W = \int_i^f \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2(t_f) - \frac{1}{2}mv^2(t_i) .$$

Este resultado es el análogo tridimensional de la situación considerada en la sección anterior, en las partes a) y b), para el movimiento unidimensional.

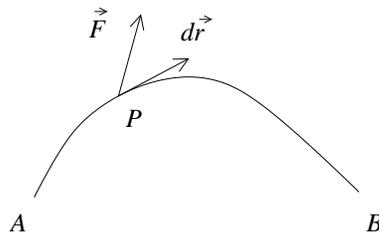
Hacemos notar que el hecho de que lo único que interesa para la energía son los estados inicial y final es robusto, y sigue siendo cierto cuando el problema ocurre en más de una dimensión.

Definición: El *trabajo* realizado por una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ que actúa sobre alguna partícula viene dado por

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} , \tag{5.5}$$

donde la integral se evalúa a lo largo del camino recorrido por la partícula.

Técnicamente, la integral anterior, en que el integrando es un vector a lo largo de una trayectoria, se denomina *integral de línea*. Los aspectos formales relacionados con este tipo de integrales corresponderá verlos en cursos superiores de Cálculo, pero para efectos de nuestro curso corresponde a un concepto muy sencillo. Consideremos una partícula desplazándose sobre una trayectoria arbitraria, en la dirección indicada por el vector $d\vec{r}$, como sugiere la figura:



En el punto P , siente una cierta fuerza \vec{F} . En general, el módulo y la dirección de \vec{F} será distinto en cada punto de la trayectoria. Para calcular el trabajo efectuado al llevar la partícula de A a B basta con hacer, en cada punto de la trayectoria, el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento $d\vec{r}$, que es un vector tangente a la trayectoria en dicho punto P . Dicho producto punto es un número real, y lo que queda es simplemente sumar esos números reales a lo largo de la trayectoria. (El siguiente ejemplo mostrará cómo proceder en un caso concreto.)

Volvamos a analizar el concepto *energía potencial* para una partícula inmersa en un campo gravitatorio uniforme. Consideremos un objeto de masa m , en un campo gravitatorio constante $\vec{g} = -g\hat{z}$ (el eje \hat{z} apuntando hacia arriba), y evaluemos el trabajo que debemos realizar para trasladarlo (por fijar ideas, con velocidad constante) desde el origen hasta el punto P , (x_0, z_0) (ver figura 5.4).

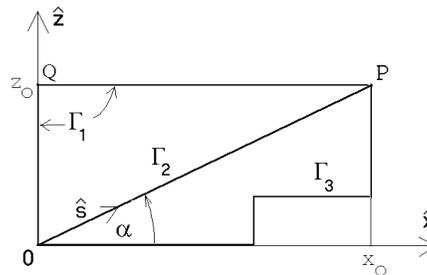


Figura 5.4

El primer problema que enfrentamos al hacer este problema en más de una dimensión es que podemos ir desde el origen a P por distintos caminos. En rigor, esto siempre fue cierto también en una dimensión: para unir dos puntos A y B podemos ir en línea recta, pero si a mitad de camino nos devolvemos y luego retomamos el curso original, eso ya es otro camino. Con los argumentos dados en la sección anterior podríamos convencernos de que el trabajo es invariante antes cambios de dirección dentro de la misma recta, pero ahora, en dos y tres dimensiones, ya no es tan evidente y necesitamos considerar explícitamente la posibilidad de tomar diferentes caminos para llegar de un punto a otro.

Supongamos, para comenzar, que usamos el camino Γ_1 , o sea, primero elevamos el objeto desde $z = 0$ hasta $z = z_0$ y luego lo trasladamos hacia el lado, hasta llegar al punto P . Durante el primer tramo la fuerza que debemos realizar para elevar el objeto (con velocidad uniforme) es $\vec{F} = mg\hat{z}$, siendo el desplazamiento también a lo largo del eje \hat{z} , es decir, $d\vec{r} = dz \hat{z}$. Luego, para este primer tramo, el trabajo que debemos realizar es

$$W_{0 \rightarrow Q} = \int_{z=0}^{z=z_0} mg \, dz = mg \int_{z=0}^{z=z_0} dz = mg z_0 \quad .$$

Para el segundo tramo la fuerza sigue siendo $\vec{F} = mg\hat{z}$; el desplazamiento, sin embargo, ahora es a lo largo del eje \hat{x} , es decir, $d\vec{r} = dx \hat{x}$. El producto punto entre la fuerza y el desplazamiento es cero (por ser uno ortogonal al otro). Luego, para trasladar el objeto desde Q a P no se requiere realizar ningún trabajo. Concluimos que el trabajo total, a lo largo del camino Γ_1 , es

$$W_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = mgz_0 \quad .$$

Evaluemos ahora el trabajo que debemos realizar para llevar el mismo objeto desde el origen al punto P a lo largo del camino Γ_2 . La fuerza que debemos aplicar sigue siendo $\vec{F} = mg\hat{z}$; el desplazamiento, sin embargo, es a lo largo de la dirección del vector unitario \hat{s} , o sea, $d\vec{r} = ds \hat{s}$. Luego se tiene que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (mg \hat{z}) \cdot (ds \hat{s}) = mg \sin \alpha \, ds \quad .$$

Concluimos que el trabajo total, a lo largo del camino Γ_2 , viene dado por

$$W_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = mg(\sin \alpha) \int_{\Gamma_2} ds = mgL \sin \alpha \quad ,$$

donde L es el largo del camino. Pero $L \sin \alpha = z_0$, luego los trabajos a lo largo de los caminos Γ_1 y Γ_2 son iguales.

No es difícil demostrar que también el trabajo que se debe realizar para llevar el objeto desde el origen al punto P a lo largo del camino Γ_3 es igual a mgz_0 . En efecto, para trasladar el objeto a lo largo de tramos horizontales no se requiere hacer

trabajo, mientras que para los tramos verticales el trabajo siempre es mgh , donde h es la diferencia de altura del tramo vertical.

De hecho, el mismo argumento nos sirve para convencernos de que *para cualquier trayectoria* que una el origen con P , el trabajo será siempre $W = mgz_0$. Para una trayectoria arbitraria, siempre se podrá escribir el vector desplazamiento $d\vec{r}$ en todo punto como una componente vertical y otra horizontal. La componente horizontal siempre dará un trabajo nulo, por ser ortogonal a la fuerza, y la vertical dará simplemente la integral unidimensional entre 0 y z_0 , o sea mgz_0 .

Por lo tanto, nos damos cuenta de que, igual que en el caso unidimensional, el trabajo ejercido en presencia de este campo de fuerzas se puede escribir simplemente como la diferencia de una cierta función evaluada en los extremos de la trayectoria. A dicha función la podemos llamar energía potencial, y para una partícula en la posición $\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$ es

$$U(x, z) = mgz + U_0 \quad ,$$

con U_0 una constante que depende de dónde se ha escogido el cero de la energía potencial (usualmente $z = 0$). La energía potencial es, entonces, independiente del valor x .

El hecho de que el trabajo realizado sea independiente de la trayectoria escogida es extremadamente no trivial e importante. De hecho que la razón misma por la cual podemos definir *una* energía potencial es que no importa la trayectoria. En efecto, si vemos una partícula a una altura h respecto a cierto nivel de referencia, no tendría ni siquiera sentido decir que su energía potencial es mgh , porque si la energía potencial tiene que ver con el trabajo realizado, ¿cómo sabemos cuánta energía tiene si no sabemos por dónde se fue? La única respuesta posible es que sólo tiene sentido definir energía potencial cuando el trabajo es independiente de la trayectoria.

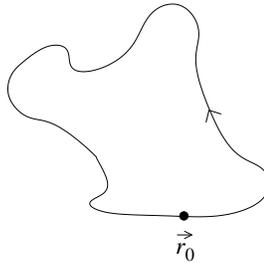
Cuando un *campo de fuerza* tiene la propiedad de que el trabajo realizado para llevar una partícula entre dos puntos cualesquiera, es independiente del camino usado para unir tales puntos, entonces se dice que el campo de fuerzas es *conservativo*. En el ejemplo anterior hemos mostrado que el campo gravitacional es un ejemplo de un campo conservativo.

La fuerza de roce es un ejemplo de una fuerza no conservativa. Al empujar un cajón de masa M por el suelo de una habitación de un lugar a otro, el trabajo realizado será proporcional al largo L del camino que para ello se elige, siendo $W = \mu_c MgL$. Al no ser el roce una fuerza conservativa, no se puede introducir una energía potencial para esta fuerza (ya que no existe una función que sólo dependa de los puntos final e inicial, y cuya diferencia sea igual al trabajo). El trabajo que se realiza contra la fuerza de roce se transforma en calor. La reconversión de energía calórica a energía mecánica puede hacerse sólo recurriendo a alguna máquina y, aun así, no en forma completa.

Otro modo de ver lo anterior es notar que si una partícula parte de una posición inicial \vec{r}_0 , sigue una cierta trayectoria, y vuelve a \vec{r}_0 , el trabajo necesario en un campo

conservativo es cero. Es decir, para cualquier trayectoria cerrada,

$$W_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_0} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 .$$



En efecto, siendo conservativo, el trabajo no depende de la trayectoria, y por tanto salir de \vec{r}_0 y volver a \vec{r}_0 es equivalente a la trayectoria consistente en no salir nunca de \vec{r}_0 , para lo cual evidentemente no hay que hacer ningún trabajo.

Por ejemplo, en un campo gravitatorio, elevar una masa una altura h significa ejercer un trabajo mgh , y devolverse al nivel inicial implica un trabajo $-mgh$, de modo que el trabajo total es cero. Pero al arrastrar un bloque sobre una superficie horizontal con roce una distancia L , el trabajo a realizar es $-\mu_c mgL$, y al volver a la posición original es nuevamente $-\mu_c mgL$, ya que tanto la fuerza como el desplazamiento cambian de signo, de modo que el trabajo total no es nulo, y por tanto el campo de roce no es conservativo.

5.3. Potencia

Al *trabajo por unidad de tiempo* se denomina *potencia*. En el sistema SI, la unidad de la potencia se denomina *watt* [W] y corresponde a 1 Joule por segundo, es decir,

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} .$$

Ejemplo: Considere un motor eléctrico de 0.4 KW (esto corresponde a aproximadamente al motor de una juguera). ¿Cuánto tiempo tardaría tal motor, mediante un sistema de poleas, en levantar un automóvil de 600 kg en un metro?

Solución: El trabajo requerido para levantar el automóvil es

$$W = m g h = 600 \cdot 9.81 \cdot 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \sim 6000 \text{ J} .$$

El motor es capaz de entregar 400 J por segundo (estamos suponiendo una eficiencia de un 100%), luego, para realizar un trabajo de 6000 J tardará $6000/400 = 15$ s.

5.4. Ejemplos

A continuación ilustremos los conceptos anteriores aplicándolos en algunos problemas concretos.

Ejemplo 1

Considere un bloque de masa M que incide con velocidad v_0 sobre un resorte (ver figura 5.5) y lo comprime. ¿Cuál será la máxima compresión que en algún instante llega a tener el resorte?

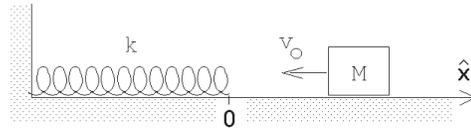


Figura 5.5

El bloque, al comprimir el resorte, realiza trabajo. Este trabajo, que se transforma en energía potencial del resorte, lo hace a costa de su energía cinética. La máxima compresión se logra cuando el bloque llega a estar en reposo. En ese caso, toda la energía cinética se habrá transformado en energía potencial, o sea,

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 .$$

En la ecuación anterior, x_0 es la máxima compresión que llega a tener el resorte. Despejando x_0 se encuentra que

$$x_0 = \sqrt{\frac{M}{k}} v_0 .$$

(Insistimos en notar la gran elegancia con la cual podemos resolver este tipo de problemas al usar la conservación de la energía. De otro modo, hubiéramos tenido que escribir la fuerza sobre la masa debida al resorte, integrar una vez la ecuación de fuerza para obtener la velocidad, poner la condición inicial, encontrar el tiempo T que tarda el bloque en llegar al reposo, integrar nuevamente para encontrar la posición en función del tiempo, poner la condición inicial correspondiente, y evaluar en el tiempo T para encontrar finalmente la compresión del resorte...)

Ejemplo 2

Un bloque de masa m resbala por un plano inclinado, partiendo del reposo desde una altura h . Sea α el ángulo de elevación y μ el coeficiente de roce cinemático entre el bloque y el plano. ¿Con qué velocidad llegará el bloque al pie del plano inclinado?

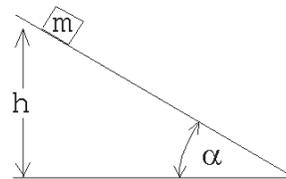


Figura 5.6

Inicialmente el bloque tiene sólo una energía potencial $U = mgh$ (el cero de la energía potencial lo hemos elegido en la base del plano inclinado). Al llegar el bloque abajo, éste tiene sólo energía cinética $K = mv_f^2/2$. Usando el principio de conservación de la energía se tiene que la energía cinética final debe ser igual a la energía potencial inicial menos la energía disipada por el roce. Esta última es $Q = \mu mg(\cos \alpha)L = \mu mgh/\tan \alpha$. Se tiene

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - \mu mgh/\tan \alpha ,$$

o sea,

$$v_f^2 = 2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha} \right) .$$

La ecuación anterior es válida si $\mu \leq \mu_e \leq \tan \alpha$. Si la condición anterior no se cumple la partícula no resbala. Observe cómo, en el límite $\alpha = 90^\circ$, la velocidad v_f tiende al resultado de la caída libre.

Observemos también que, en ausencia de roce, el resultado es simplemente $v_f = \sqrt{2gh}$, *el mismo* resultado que en caída libre. Da lo mismo si el bloque cae verticalmente o por un plano inclinado, la velocidad final de caída es, en módulo, la misma. Esto puede parecer sorprendente, pero no es sino una consecuencia de que el campo sea conservativo, de modo que el trabajo ejercido por el campo gravitatorio no depende de la trayectoria, sino sólo de la diferencia de elevaciones.

Problema resuelto en clases: 5.5

5.5. Resultados útiles para sistemas conservativos

En esta sección obtendremos un par de resultados extremadamente útiles, generales y poderosos relacionados con sistemas conservativos. Escencialmente, observaremos que, para tales sistemas, basta con conocer su energía potencial, y que ella es suficiente para conocer mucha información sobre la dinámica de un sistema conservativo, aún cuando no podamos resolver sus ecuaciones de movimiento explícitamente.

Supongamos que tenemos un sistema del que sólo sabemos la energía potencial. Por supuesto, esto implica de inmediato que el sistema es conservativo, pues de otro modo ni siquiera podríamos definir una energía potencial.

Por fijar ideas, digamos que la energía potencial de una partícula de masa m en este sistema viene dada por la expresión

$$U(z) = a \left[\frac{1}{3}z^3 - b^2 z \right] , \quad (5.6)$$

donde a y b son ciertas constantes positivas. Encuentre el campo de fuerza $F(z)$ que da origen a tal energía potencial.

Sea $F(z)$ la fuerza que el campo ejerce sobre la partícula. Para llevar la partícula desde el origen al punto z deberemos ejercer sobre la partícula una fuerza de igual magnitud pero sentido opuesto. Por consiguiente, el trabajo que debemos realizar es

$$W(z) = - \int_0^z F(z) dz .$$

Este trabajo es igual a la diferencia de la energía potencial entre el origen y el lugar z , o sea, $U(z) - U(0)$. Como $U(0) = 0$, podemos igualar $W(z)$ con $U(z)$, obteniéndose

$$U(z) = - \int_0^z F(z) dz = a \left[\frac{1}{3} z^3 - b^2 z \right] .$$

Como el proceso de integración es el “inverso” del proceso de derivación (ver figura 5.7), se tiene que la fuerza debe ser *menos la derivada de la energía potencial*, o sea,

$$F(z) = - \frac{dU(z)}{dz} . \quad (5.7)$$

Usando esta relación se encuentra que, para el presente problema, el campo de fuerzas es

$$F(z) = a [b^2 - z^2] . \quad (5.8)$$

La relación (5.7) es muy importante. Como mencionamos en la introducción a este capítulo, la relación (5.7) corresponde a la culminación de un largo proceso, que comenzamos al comienzo de este curso, por simplificar progresivamente la descripción del movimiento, pasando por las ecuaciones de itinerario, el cálculo diferencial, el álgebra vectorial, las leyes de Newton y luego la conservación de la energía. Ahora vamos un paso más allá. Ya sabíamos que la energía mecánica contiene *toda* la información sobre el sistema, pues $dE/dt = 0$ equivale precisamente a las leyes de Newton. Ahora nos damos cuenta de que, en realidad, no es necesaria ni siquiera toda la energía mecánica, sino sólo una parte de ella, la energía potencial. Lo cual es evidente, pues la energía cinética siempre tiene la misma forma, $mv^2/2$, independiente del campo de fuerzas. De modo que lo que hace realmente diferente a un sistema de otro es su energía potencial. Y la ecuación (5.7) dice lo mismo, matemáticamente: basta la energía potencial para conocer la fuerza, y una vez conocida la fuerza podemos aplicar toda la maquinaria matemática que ya conocemos para estudiar la evolución de un sistema físico.

Pero el concepto de energía potencial es extremadamente útil no sólo por lo anterior. Grafiquemos la energía potencial (5.6).

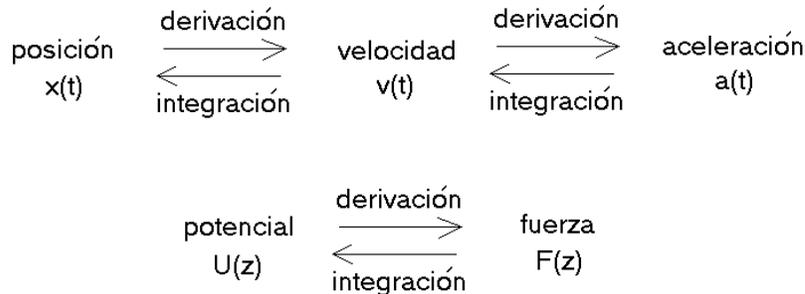


Figura 5.7

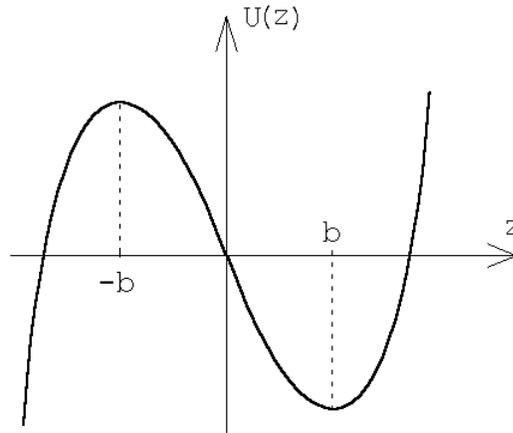


Figura 5.8

Una partícula en un campo de fuerzas se dice que se encuentra *en equilibrio* si la fuerza sobre ella es nula. Para una partícula en el campo de fuerzas anterior, la fuerza $F(z)$ es nula cuando $z = \pm b$ [ver Ec. (5.8)]. En la figura 5.8 se han indicado dichos puntos. Note que esos puntos coinciden con un máximo y un mínimo de la energía potencial. Esto *tenía* que ser así, por (5.7): *siempre* los puntos de equilibrio corresponderán a extremos de la curva de energía potencial. De modo que, aunque el equilibrio se define en términos de la fuerza, ni siquiera es necesario calcular ésta. Basta simplemente con mirar la curva de energía potencial, y todos los máximos y mínimos corresponden a puntos de equilibrio.

Se dice que un sistema en equilibrio es *estable* si al alejarlo levemente del punto de equilibrio la fuerza que aparece lo acelera nuevamente hacia dicho punto. De lo contrario, el equilibrio es *inestable*. En otras palabras, el equilibrio es estable si, en la vecindad del punto de equilibrio, la fuerza tiene signo opuesto al desplazamiento, y es inestable si la fuerza tiene el mismo signo que el desplazamiento. Pero, nuevamente,

esto es *evidente* simplemente observando la Fig. 5.8. En efecto, consideremos un punto ligeramente a la derecha de $z = b$. En ese punto, la derivada de la energía potencial es positiva, por lo tanto la fuerza es negativa [Eq. (5.7)], es decir, apunta hacia la izquierda. Así que efectivamente, la fuerza se opone al desplazamiento, evitando que el sistema se aleje del punto de equilibrio. Lo mismo sucede si consideramos un punto ligeramente a la izquierda de $z = b$. Para $z = -b$, en cambio, sucede lo opuesto. Si estamos ligeramente a la derecha, la derivada de la energía potencial es negativa, luego la fuerza es positiva, apuntando por tanto hacia la derecha. De modo que la fuerza tiene el mismo signo que el desplazamiento, y hace que el sistema se aleje aún más del punto de equilibrio.

Concluimos, así, que no sólo la información sobre puntos de equilibrio, sino toda la información sobre estabilidad e inestabilidad del equilibrio, se encuentra simplemente observando la curva de la energía potencial.

Más aún, notemos que, para todos los efectos prácticos, la energía potencial representada en la Fig. 5.8 podría ser perfectamente un riel sobre el cual se desliza una bolita sometida a un campo gravitatorio constante. Si el riel tiene exactamente la forma de la figura, entonces la energía potencial de la bolita mientras circula por el riel será exactamente igual a (5.6), y por tanto la fuerza sobre la bolita será precisamente (5.8). Esto es extraordinario, porque en realidad no sabemos a qué corresponde la fuerza (5.8). Podría ser cualquier cosa: la fuerza entre dos moléculas, una fuerza entre cargas eléctricas distribuidas de alguna manera adecuada, una fuerza gravitacional resultante por la presencia de cierta distribución de masas. . . Pero no importa, sea cual fuere el sistema físico específico, todos se comportan en algún sentido de la misma manera, porque tienen la misma energía potencial. Y ahora dicho comportamiento es completamente evidente, intuitivo, porque es claro de inmediato que si ponemos una bolita en el riel de la Fig. 5.8, en los puntos $z = \pm b$, la bolita se va a quedar quieta (equilibrio). Y también es evidente que si la bolita se desplaza ligeramente respecto a $z = b$, ésta volverá a su posición original (equilibrio estable), así como también es evidente que si la bolita se desplaza ligeramente respecto a $z = -b$ no lo hará (equilibrio inestable).

Hemos entonces ganado una intuición poderosísima. De ahora en adelante, seremos capaces de decir muchas cosas sobre un sistema simplemente observando la curva de energía potencial. Y ni siquiera sabemos de qué sistema físico real se trata. En la práctica, es lo mismo que si fuera una bolita sobre un riel en un campo gravitatorio constante.

El ejemplo anterior corresponde a una situación sencilla, donde el sistema evoluciona sólo en una dimensión. En más dimensiones es lo mismo. La energía potencial ya no será una curva, sino una superficie, una sábana con cimas y valles, y en cada uno de esos máximos y mínimos sabremos que el sistema quedará en equilibrio, y que las cimas serán puntos de equilibrio inestable, y los valles puntos de equilibrio estable. Sin haber escrito ninguna ecuación, e independiente del sistema físico específico de que se trate.

Supongamos ahora que la partícula de masa m se encuentra en el punto de equilibrio estable y que en cierto instante la sacamos levemente de su punto de equilibrio, para dejar que luego se mueva en el campo de fuerza. Encontramos explícitamente la fuerza que el campo ejerce sobre la partícula.

Si alejamos la partícula una distancia $+\Delta$ desde el punto de equilibrio estable $z = b$, (con $\Delta \ll b$), entonces la fuerza que aparece es

$$F(b + \Delta) = a [b^2 - (b + \Delta)^2] = -a(2b\Delta + \Delta^2) \simeq -2ab\Delta .$$

Así, la fuerza en la vecindad del mínimo tiene sentido contrario al desplazamiento, y además es *proporcional* al desplazamiento, con una constante de proporcionalidad $k = 2ab$. Pero este tipo de fuerzas, $F(\Delta) = -k\Delta$, ya las hemos encontrado antes: es la ley de Hooke, la misma fuerza de un resorte. Por lo tanto, este sistema físico desconocido, que quizás corresponde a moléculas interactuando, quizás corresponde a estrellas en una galaxia, quizás corresponde a electrones en un campo eléctrico, del cual lo único que conocemos es su energía potencial, este sistema físico arbitrario se comporta, en la vecindad de su punto de equilibrio estable, exactamente igual a un resorte.

Una observación tremendamente importante, porque de nuevo significa que, sin tener que resolver ninguna ecuación, sin ni siquiera saber qué tipo de sistema físico estamos estudiando, podemos al menos decir algo: cerca del punto de equilibrio estable, el sistema es equivalente a un *oscilador armónico*. . . ¡el cual ya resolvimos! O sea, podemos asegurar que el sistema oscilará en torno al punto de equilibrio estable, que dicha oscilación será independiente de la amplitud inicial, y que tendrá un período igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2ab}} .$$

Insistimos en que éste es un resultado independiente del sistema físico de que se trate. De hecho z podría ser cualquier cosa: una posición real, un ángulo, un flujo, una corriente eléctrica, etc. No importa, sea lo que sea, eso oscilará armónicamente con período T .

Es más, podemos mostrar que lo anterior es cierto para un sistema completamente arbitrario. En efecto, en la vecindad de un punto x_0 , una función $f(x)$ cualquiera, pero razonablemente bien comportada en dicha región (continua, todas sus derivadas existen, etc.), tendrá un *desarrollo de Taylor* de la forma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (5.9)$$

Ahora bien, si $f(x)$ corresponde ahora a una energía potencial $U(x)$, y x_0 a un punto de equilibrio estable, la expresión anterior queda, en la vecindad de x_0 , es decir, para $x = x_0 + \Delta$, con $\Delta/x_0 \ll 1$,

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \Delta^2 , \quad (5.10)$$

despreciando términos de orden superior.

En (5.10), $U(x_0)$ es simplemente una constante; $dU/dx \equiv -F(x)$ es la fuerza sobre la partícula, que, siendo x_0 un punto de equilibrio, se anula en dicho punto, y por lo tanto el segundo término es cero. Y $d^2U/dx^2|_{x=x_0}$ es alguna constante, que de hecho es la curvatura de la energía potencial en x_0 . Pero si x_0 es un mínimo, entonces la curvatura en x_0 es positiva, de modo que podemos definir

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \equiv k > 0.$$

De este modo, (5.10) se puede reescribir simplemente como

$$U(\Delta) = U(x_0) + \frac{1}{2}k\Delta^2, \quad (5.11)$$

que no es sino la energía potencial de un resorte de constante de restitución k .

Lo anterior, matemáticamente, no significa otra cosa que, cerca de un mínimo, cualquier curva diferenciable se puede escribir como una parábola. Pero físicamente, significa que un sistema completamente arbitrario *siempre*, en la vecindad de un punto de equilibrio estable, oscilará armónicamente. Ésta es la razón por la cual el oscilador armónico, siendo un problema en principio sencillo, es extraordinariamente importante en toda la Física: porque estudiando el oscilador armónico, el cual se puede resolver *analíticamente*, se gana intuición y se obtienen resultados válidos para cualquier otro sistema físico, incluyendo sistemas (la abrumadora mayoría) que no se pueden resolver exactamente, bastando para ello que tengan *algún* punto de equilibrio estable. Y es la razón también por la cual, más adelante en este curso, dedicaremos un capítulo completo a estudiar solamente el oscilador armónico.

Problema resuelto en clases: 5.16

Problema resuelto en clases: 5.26

Hemos hecho hincapié en que el concepto de energía potencial tiene toda la información necesaria para describir la dinámica de un sistema conservativo. Sin embargo, hay un detalle que no hemos abordado: las ecuaciones de Newton son vectoriales, y la conservación de energía es una ecuación escalar. En otras palabras, la energía potencial es una función escalar, pero la fuerza es un vector, y por tanto no es evidente que la energía potencial tenga realmente toda la información necesaria. Si el problema es unidimensional, es claro que (5.7) es suficiente, y así ha sido en los ejemplos que hemos estudiado en este capítulo, pero ¿qué sucede en dos o tres dimensiones? ¿Cómo es posible que una función escalar reemplace completamente a una función vectorial?

Lo que hay que tener claro es que la expresión (5.7) viene en realidad de (5.5), la cual relaciona una cantidad vectorial (la fuerza) con una escalar (el trabajo). (5.7) corresponde a la inversión de la ecuación (5.5); uno esperaría, entonces, que sea posible modificar (5.7) para recuperar una expresión vectorial. Para hacerlo necesitamos matemática que aún no hemos visto en este curso, pero podemos contar que, en más de una dimensión, la derivada en (5.7) debe ser reemplazada por el *gradiente*, que es una especie de “derivada vectorial”:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) , \tag{5.12}$$

donde, dada una función $g(\vec{r})$,

$$\vec{\nabla}g(\vec{r}) = \frac{\partial g}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{z} . \tag{5.13}$$

El operador diferencial $\partial g/\partial x$ se denomina *derivada parcial* de g respecto a la coordenada x , y significa simplemente lo siguiente: g es una función del vector \vec{r} , es decir, de las tres coordenadas x , y y z . $\partial g/\partial x$ significa derivar g respecto a x como si fuera la única variable, considerando y y z constantes. Análogamente para los otros dos operadores, $\partial g/\partial y$ y $\partial g/\partial z$. Lo importante es tener presente que, aún en tres dimensiones, es cierto que una única función *escalar* (la energía potencial) contiene *toda* la información necesaria, a través de (5.12) en el caso general, o (5.7) en el caso unidimensional. Por lo tanto, el concepto de energía potencial efectivamente nos permite describir un sistema físico de un modo muchísimo más sencillo.

5.6. Problemas

- Una masa de 2 kg se lleva desde un punto A al punto B . Los vectores de posición de los puntos A y B son:

$$\vec{x}_A = (\hat{x} + 3\hat{z}) \text{ m}$$

$$\vec{x}_B = 5\hat{x} \text{ m}$$

Todo el sistema está inmerso en un campo gravitatorio constante $-g\hat{z}$. Encuentre el trabajo realizado por la gravedad a lo largo de cada uno de los tres caminos indicados en la figura adjunta.

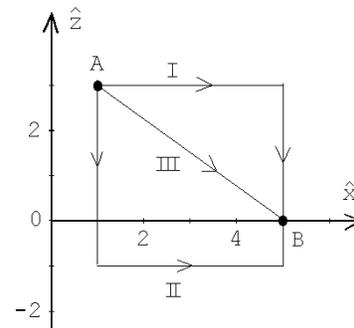


Figura 5.9

2. Una bomba de agua debe elevar 200 litros de agua por minuto desde un pozo, cuyo nivel de agua está a 6 m de profundidad, para luego lanzarla con una velocidad de 9 m/s. Suponiendo que no hay pérdidas de energía de ningún tipo, ¿qué trabajo por minuto debe realizar el motor que acciona la bomba? ¿Cuál es la potencia del motor?

(Una máquina que realiza un trabajo de 1 Joule = 1 kg m²/s² por segundo, tiene una potencia de 1 Watt = 1 [W].)

3. Sobre una partícula de masa $m = 0.25$ kg, que se mueve a lo largo del eje \hat{x} , actúa una fuerza $\vec{F} = F(x) \hat{x}$, donde la magnitud $F(x)$ depende de la posición x del modo indicado en la figura 5.10.
- Determine el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula si ella se traslada desde $x = 0$ a $x = 3$ m.
 - Si la partícula en el instante $t = 0$ se encuentra en reposo en $x = 2$ m, ¿qué velocidad tendrá al llegar a $x = 6$ m?

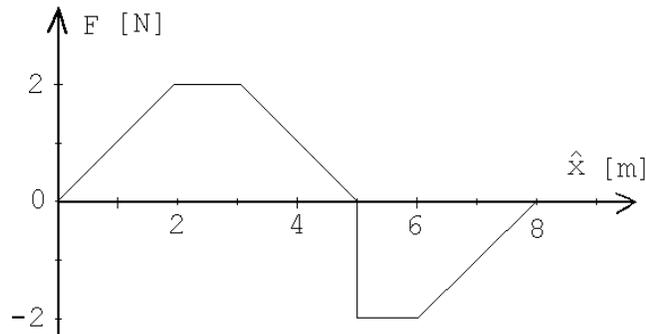


Figura 5.10

Respuestas: a) 4 J; b) $v=4$ m/s.

4. El sistema mostrado en la figura adjunta se “abandona”, partiendo del reposo, cuando el bloque de masa m_1 está a una distancia d por encima del suelo. Desprecie el roce.

- a) Encuentre la aceleración de la masa mayor. ($m_1 > m_2$.)
- b) Usando el resultado de la parte (a), encuentre la velocidad con que la masa mayor llega al suelo.
- c) Suponiendo que todo el trabajo realizado sobre el sistema se transforma en energía cinética, calcule la velocidad de la masa mayor justo antes de que choque contra el suelo.

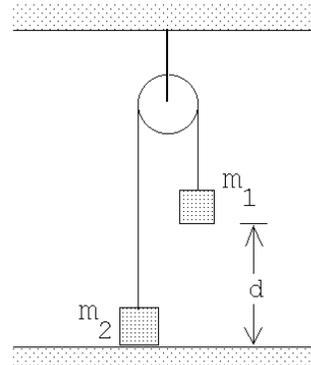


Figura 5.11

5. Considere un cuerpo compuesto de N masas m_j , situados en los lugares \vec{r}_j , con $j = 1, 2, 3, \dots, N$. Demuestre que la energía potencial de tal cuerpo, en un campo gravitacional constante, se puede evaluar suponiendo que toda su masa $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ está concentrada en su *centro de masas*, dado por

$$\vec{r}_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N) .$$

6. Un bloque cuya masa es $m = 6$ kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado rugoso, partiendo del reposo. El ángulo de elevación del plano es $\alpha = 60^\circ$ y los coeficientes de roce estático y cinámico son 0.2 y 0.18, respectivamente.
 - a) Describa todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y determine el trabajo realizado por cada una de ellas, si el bloque se desliza 2 m (a lo largo del plano).
 - b) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque?
 - c) ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer una distancia de 2 m?

Resuelva el problema dos veces: la primera suponga que el *sistema* consiste sólo del bloque y, por lo tanto, las fuerzas de roce son parte de las fuerzas externas; la segunda vez suponga que el sistema consiste del bloque y el plano inclinado, en cuyo caso la disipación de energía por las fuerzas de roce deben considerarse como calor.

7. Se desea levantar lentamente una masa M hasta una altura h , usando el sistema de poleas mostrado en la figura adjunta.

- ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse?
- ¿Qué trabajo se realiza?
- ¿Cuál es el cambio en energía potencial de la masa?

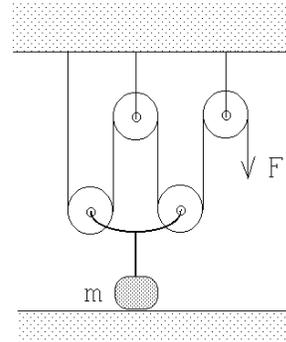


Figura 5.12

8. Un bloque de $m = 5 \text{ kg}$ se sujeta contra un resorte de constante $k = 1000 \text{ N/m}$, comprimiéndolo en $d_0 = 8 \text{ cm}$. Al dejar el bloque en libertad, el resorte al expandirse empuja el bloque a lo largo de una superficie horizontal rugosa con coeficiente de roce cinemático $\mu = 0.2$.

- ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque mientras el resorte se extiende desde la posición comprimida hasta la posición de equilibrio?
- ¿Cuál es el trabajo realizado por el roce sobre el bloque cuando éste recorre los 8 cm hasta la posición de equilibrio?
- ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando el resorte pasa por su posición de equilibrio?
- Si al pasar por la posición de equilibrio el bloque se despega del resorte, ¿qué distancia alcanzará a recorrer antes de detenerse?
- Si el bloque se mantiene sujeto al resorte, ¿cuál es la extensión máxima que llegará a tener el resorte?

9. Un péndulo de masa m colgado de un hilo de largo ℓ , se eleva hasta formar un ángulo $\theta_0 = 90^\circ$ con la normal y luego se deja en libertad.
- Encuentre la energía cinética de la masa pendular cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio.
 - Demuestre que la tensión de la cuerda, para $\theta = 0^\circ$, es 3 veces el peso de la masa pendular.

10. Considere el campo de fuerza dado por

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \hat{x} + F_0 \frac{x}{a} \hat{y} .$$

Evalúe el trabajo que debe realizarse para llevar una partícula de masa m desde el origen hasta el punto A a lo largo de los dos caminos indicados en la figura adjunta. El campo de fuerzas ¿es conservativo?

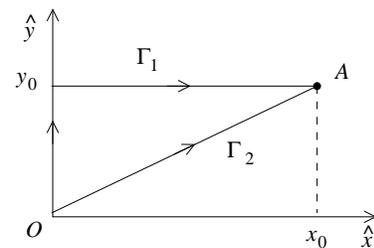


Figura 5.13

11. Una caja, de masa 10 Kg, descansa sobre la cubierta horizontal de una mesa. El coeficiente de fricción entre la caja y la superficie de la mesa es 0.4. En cierto instante se aplica sobre ella una fuerza $\vec{F} = F_0 \hat{x}$, adquiriendo la caja una aceleración constante $\vec{a} = 2 \hat{x} \text{ [m/s}^2\text{]}$.
- Determine F_0 .
 - Determine el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} cuando la caja se ha trasladado una distancia de 5 m.
 - Evalúe la diferencia entre el trabajo realizado sobre la partícula y el calor Q disipado por el roce. Demuestre que esta diferencia coincide con la energía cinética final de la caja.

12. Una masa m resbala, sin roce y debido a la gravedad, por la superficie de una semiesfera de radio R . La masa parte desde la cúspide sin velocidad inicial. Sea P el punto en el cual la masa se separa de la semiesfera. Encuentre el ángulo de elevación θ_0 del punto P .

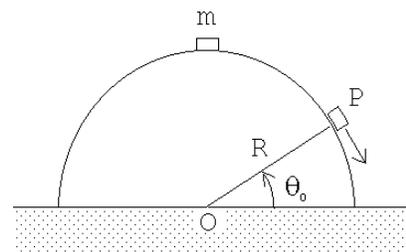


Figura 5.14

Respuesta: $\sin \theta_0 = 2/3$.

13. Sobre una cinta transportadora caen 5 kg de material por segundo ($\Lambda = dm/dt = 5 \text{ kg/s}$). Suponiendo que no hay pérdidas de energía de ningún tipo en todo el sistema que impulsa la cinta transportadora, encuentre la fuerza F que debe aplicarse para mantener la cinta trasladándose con una velocidad constante $v_0 = 3 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la mínima potencia que debe tener el motor para hacer avanzar la cinta transportadora?

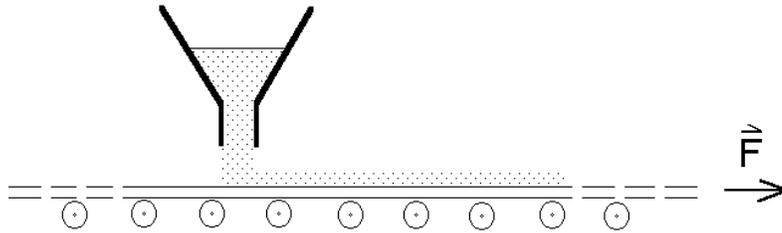


Figura 5.15

Respuesta:
$$P = \frac{dW}{dt} = \Lambda v_0^2 = 45 \text{ W} .$$

14. Considere dos masas m unidas por una varilla de largo L que no tiene peso. Inicialmente el sistema está apoyado en una pared, formando un ángulo θ_0 con la normal (vea figura 5.16). El sistema comienza a resbalar sin roce debido a la gravedad. ¿A qué altura la masa # 1 se separa de la pared vertical?

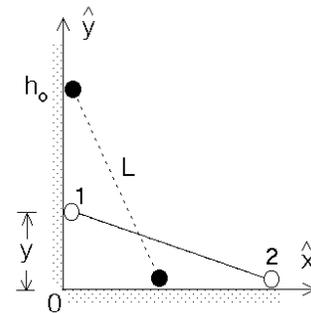


Figura 5.16

Respuesta: $h = 2h_0/3$, donde $h_0 = L \sin \theta_0$ es la altura inicial.

15. Una moneda se desliza sobre un tramo horizontal pulido. Luego entra en un tramo cilíndrico convexo de radio $R=1 \text{ m}$. La moneda pierde contacto con la superficie cilíndrica a un ángulo de 30° con respecto a la vertical medido desde el vértice del cilindro. Calcule la rapidez con que se desplazaba la moneda en el tramo horizontal.

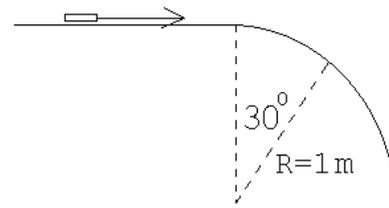


Figura 5.17

16. La fuerza electrostática que ejerce una carga eléctrica Q sobre otra carga q viene dada por la así llamada *Ley de Coulomb*:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \ ,$$

donde $\vec{r} = r \hat{r}$ es el vector de posición de q respecto a Q . Notemos que si las dos cargas tienen el mismo signo la fuerza entre las cargas es repulsiva.

Considere una carga Q fija en el origen y una carga q , que inicialmente se encuentra en el lugar \vec{r}_0 .

- Encuentre el trabajo que debe realizarse para trasladarla desde \vec{r}_0 hasta \vec{r}_1 .
- Repita la parte a) para varios caminos simples y demuestre que siempre obtiene el mismo resultado (en otras palabras, el campo de fuerzas es conservativo).
- Demuestre que la energía potencial (electrostática) de la carga q viene dada por

$$U(r) = +\frac{qQ}{r} \ .$$

¿En qué lugar se ha elegido el cero para la energía potencial?

17. Considere una carga Q fija en el origen y otra carga q , del mismo signo, que se acerca a Q a lo largo de la recta que las une. Si q tiene una energía cinética K cuando la separación entre las cargas es muy grande (infinita), encuentre la mínima distancia a la que q se acercará a Q .

Para resolver este problema use el resultado para la energía potencial obtenido en el problema anterior.

18. Considere la configuración de cargas mostrada en la figura 5.18. Las cargas $+Q$ están fijas en los lugares $x = \pm a$, $y = z = 0$ mientras que la carga $+q$ puede deslizarse sólo a lo largo del eje \hat{x} .

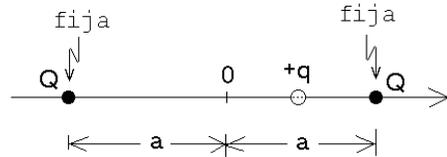


Figura 5.18

- Encuentre una expresión para la fuerza $F(x)$ que actúa sobre la carga $+q$.
- Encuentre la energía potencial $U(x)$ y gráfiquela. (Especifique claramente dónde eligió el cero para la energía potencial.)

- c) ¿Se comportará este sistema como un oscilador armónico para pequeños desplazamientos de q en torno al origen? (Un sistema se comporta como un oscilador armónico si, al desplazar el sistema de su posición de equilibrio, aparece una fuerza proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario —ejemplo, ley de Hooke.)

19. Considere una partícula de masa m y carga $-q$ restringida a moverse a lo largo del eje \hat{x} . Además, dos cargas $+Q$ se ubican fijamente sobre el eje \hat{y} a una distancia a del origen, tal como lo muestra la figura 5.19.

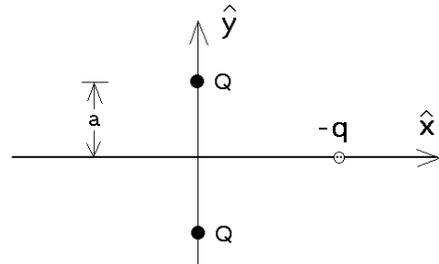


Figura 5.19

- a) Encuentre la energía potencial $U(x)$ del sistema de cargas en función de x .
- b) Encuentre la fuerza electrostática $F(x)$ que actúa sobre la carga $-q$.
- c) Evalúe la derivada $-dU(x)/dx$ y demuestre que ésta coincide con $F(x)$.
- d) ¿Con qué velocidad pasará la partícula por el origen si parte desde el infinito con velocidad cero?
- e) ¿Se comportará este sistema como un oscilador armónico para pequeños desplazamientos de q en torno al origen? Si su respuesta es afirmativa, encuentre el período del movimiento periódico.

Respuestas:

$$a) \quad U(x) = \frac{-2Qq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad ; \quad b) \quad \vec{F}(x) = -\frac{2Qqx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x} \quad ; \quad d) \quad v = \sqrt{\frac{4Qq}{ma}} .$$

20. Un bloque de 2 Kg, situado a una altura de 1 m, se desliza por una rampa curva y lisa, partiendo del reposo. Al terminarse la rampa, el bloque resbala 6 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo.

- a) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte inferior de la rampa?
- b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de roce sobre el bloque?
- c) ¿Cuánto vale el coeficiente de roce cinemático entre el bloque y la superficie horizontal?

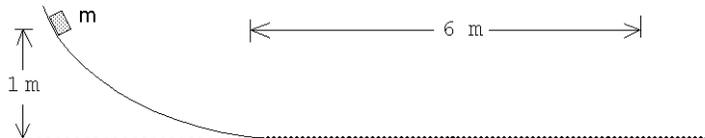


Figura 5.20

21. En un parque de entreteniciones un carro de masa $m = 100$ kg se desliza (sin roce) por una rampa desde una altura h , ingresando a un *loop* de radio $R = 3$ m. La altura h es la mínima que se requiere para que el carro no se salga de la vía. Emergiendo del *loop* el carro ingresa a la región de frenado, donde en un trayecto de largo L , el coeficiente de roce cinemático es $\mu_c = 0,2$. Sin embargo, el carro no alcanza a detenerse durante la primera pasada, sino que pasa de largo y después de colisionar con un resorte de constante $k = 500$ N/m, vuelve a ingresar a la región de frenado quedando en reposo al centro de ella (o sea, en el punto C, ver figura 5.21).

- Encuentre la velocidad del carro en el punto B.
- Encuentre h .
- Encuentre L .
- Encuentre la máxima compresión que alcanza a tener el resorte.

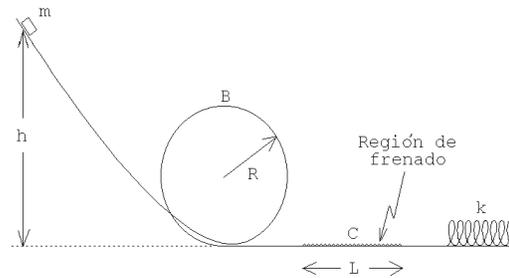


Figura 5.21

22. Una partícula de masa m se mueve sobre una mesa rugosa a lo largo de un círculo de radio R . La partícula está amarrada a un extremo de un hilo de largo R , cuyo otro extremo está fijo al centro del círculo. La velocidad de la partícula inicialmente es v_0 . Debido al roce con la mesa, la partícula se irá frenando. Después de completar una vuelta, su velocidad es $v_0/2$.
- Encuentre el trabajo realizado por la fricción durante una vuelta. Exprese el resultado en función de m , v_0 y R .
 - Encuentre el valor del coeficiente de roce cinemático.
 - ¿Cuántas vueltas dará la partícula antes de detenerse?

23. Una masa m se cuelga de dos resortes *en serie*, de constantes de restitución k_1 y k_2 , tal como se muestra en la figura 5.22a. Encuentre la frecuencia de oscilación para pequeñas vibraciones (verticales) de la masa m . Repita el cálculo para el caso en que los dos resortes están *en paralelo* (ver figura 5.22b).

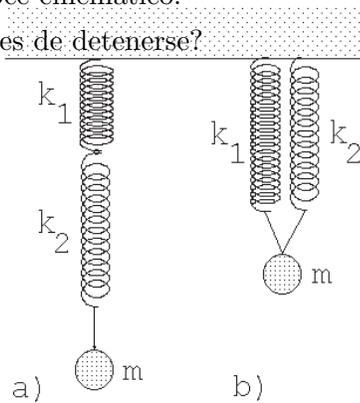


Figura 5.22

24. Supongamos que la función energía potencial $U(x)$ en función de x , para una partícula que sólo se puede mover a lo largo del eje \hat{x} , viene dada por el gráfico mostrado en la figura 5.23

- a) Identifique los puntos de equilibrio e indique si son estables o inestables.
- b) ¿Para qué valor de x la fuerza tiene su valor (módulo) máximo?
- c) Describa en palabras el movimiento, a medida que transcurre el tiempo, de una partícula de energía total E_1 . (Especifique claramente las condiciones iniciales que está suponiendo.)

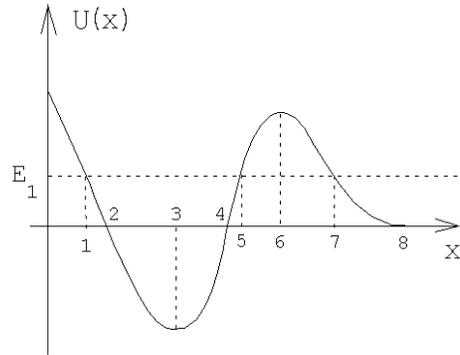


Figura 5.23

25. Suponga que la energía potencial entre dos átomos de una molécula diatómica viene aproximadamente dada por la expresión

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r}\right)^6 \right] ,$$

donde r es la separación entre los átomos y a y U_0 son constantes.

- a) Grafique la energía potencial.
 - b) ¿Para qué separación r los átomos estarán en equilibrio? ¿El equilibrio es estable o inestable?
 - c) Suponga que los átomos tienen la misma masa m_0 . ¿Con qué frecuencia vibrará la molécula al alejar el sistema levemente de su posición de equilibrio?
 - d) Si la molécula está en su estado de equilibrio, ¿cuál es la mínima energía que habría que entregarle a la molécula para disociarla, es decir, separarla en sus dos átomos constituyentes?
26. La fuerza gravitatoria entre dos masas m_1 y m_2 viene dada por

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r} ,$$

donde G es la así llamada constante gravitatoria y $\vec{r} = r\hat{r}$ es el vector que une los centros de masa de ambas masas. El valor experimental de G es

$$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg} .$$

- a) Demuestre que el trabajo que debe hacerse para alejar las dos masas desde una separación r_1 a una separación r_2 ($r_2 > r_1$), viene dado por

$$W = Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

- b) A partir del resultado anterior, demuestre que si el cero de la energía potencial se elige en $r = \infty$, entonces la energía potencial en función de la distancia entre las dos masas viene dada por

$$U(r) = -\frac{Gm_2m_1}{r} .$$

- c) Suponga ahora que $m_1 = M_T$ es la masa de la Tierra y $m_2 = m$ es la masa de un objeto pequeño. Si tal objeto se encuentra sobre la superficie terrestre y se eleva una pequeña distancia h , demuestre que la energía potencial cambia en $\Delta U = mgh$. Note que de esta manera usted ha encontrado una expresión para la aceleración de gravedad g en términos del radio de la Tierra R_T , la masa M_T y la constante de gravitación G .
- d) Encuentre la masa de la Tierra suponiendo que el radio de la Tierra es aproximadamente 6380 km. (Ignore la rotación de la Tierra.)
- e) Encuentre la velocidad de escape, es decir, la velocidad mínima que debe impartirse a una masa m (inicialmente en reposo sobre la superficie terrestre) para que ella pueda alejarse del campo gravitatorio de la Tierra. (Ignore la rotación de la Tierra.)
- f) ¿Hasta qué distancia máxima se podrá alejar el pequeño objeto si su velocidad inicial es la mitad de la velocidad de escape?
27. Un bloque de masa M se apoya sobre un platillo de masa m sujeto a un resorte vertical de constante k y largo natural ℓ_0 . Al colocar el platillo con la masa M sobre el resorte este se comprime teniendo, en equilibrio, un largo $\bar{\ell}$.

Comprimamos ahora el resorte otro poco de manera que inicialmente se encuentra contraído a un largo $\ell < \bar{\ell}$. En cierto instante se suelta el resorte, permitiendo que éste se expanda.

- a) Evalúe $\bar{\ell}$.
- b) Demuestre que si el resorte en algún instante supera el largo natural ℓ_0 , entonces el bloque se separa del platillo.
- c) ¿Cuál es el mínimo valor de la contracción ($\ell_0 - \ell$) que debe tener el resorte antes de soltarlo para que el bloque alcance a separarse del platillo?
- d) Encuentre la altura máxima alcanzada por el bloque (en todos los casos, cuando se separa y cuando no se separa del platillo).

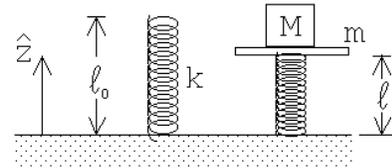


Figura 5.24

Respuesta: c) $(\ell_0 - \ell) = 2g(M + m)/k$.

28. En una feria de entretenimientos hay un juego que consiste en que los participantes abordan un carro en el punto P (ver figura 5.25), caen en caída libre una altura h hasta el punto A , luego recorren un cuarto de circunferencia (AB) de 2 m de radio y una recta (BC) de 5 m, todo esto sin roce. En el punto C se ingresa a una zona de 8 m de largo con coeficiente de roce $\mu_c = 0.5$. Como zona de seguridad, hay una distancia (DE) de 5 m sin roce, concluyendo la pista en un gran resorte cuya constante elástica es $k = 6 \times 10^4$ N/m. La masa del carro, con los pasajeros, es de 500 Kg.

- a) Calcule hasta cuántos metros por sobre el punto A se puede dejar caer el carro para que éste se detenga en la zona de desaceleración CD .

Suponga ahora que el operador del juego sube el carro hasta 8 m sobre A y lo deja caer desde allí.

- b) Encuentre el lugar en que el carro quedará sin velocidad (por primera vez).
- c) Encuentre el lugar en que el carro quedará finalmente en reposo.
- d) Calcule el trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte para detener el carro (por primera vez).
- e) Calcule la aceleración del carro en el instante en que el resorte lo detiene.

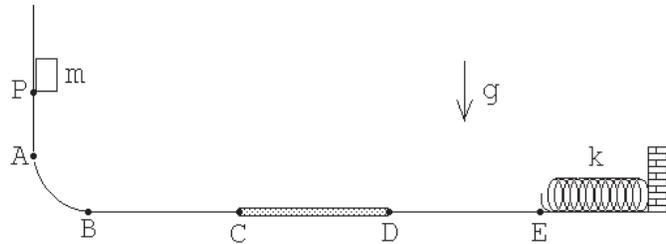


Figura 5.25

29. Considere el montaje mostrado en la figura adjunta. Suponga que las dos masas tienen el mismo valor y que ℓ_0 coincide con el largo natural del resorte cuya constante de restitución es $k = 5mg/\ell_0$. Suponga además que la masa desliza sin roce sobre la superficie y que en el instante mostrado en la figura el sistema se encuentra momentáneamente en reposo.

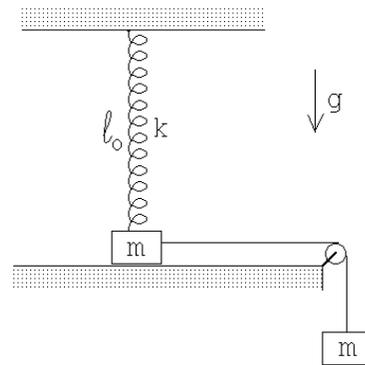


Figura 5.26

- a) Demuestre que cuando la masa que se desliza por la superficie se haya desplazado en una cantidad $x = 3\ell_0/4$ hacia la derecha, esta se levantará de la superficie.
- b) Demuestre que en el momento en que la masa se separa del plano la velocidad es $v = \sqrt{19g\ell_0/32}$.

30. Considere dos pequeñas masas iguales m unidos mediante cuerdas ideales de longitud $\ell = 1,5$ m, como se indica en la figura adjunta. El sistema rota con velocidad angular uniforme ω . El ángulo que la cuerda atada al brazo (de longitud $L = 4$ m) forma con la vertical es de 60° . Encuentre el ángulo ϕ que la otra cuerda hace con la vertical y encuentre la razón entre las tensiones de cada cuerda.

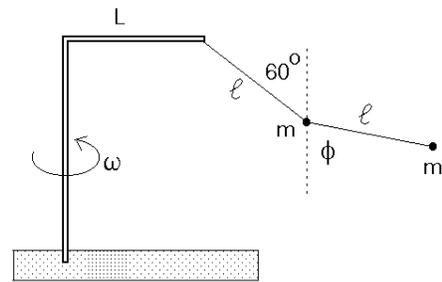


Figura 5.27

31. Dos cuerpos A y B , de masas m y $2m$, respectivamente, se unen mediante una cuerda ideal. El cuerpo A posa sobre una mesa de superficie áspera (coeficiente de roce μ_c) mientras que B se deja caer como se muestra en la figura 5.28. No hay roce entre la cuerda y el punto de contacto con el borde de la mesa. Calcule el ángulo θ formado por la cuerda que sostiene la masa B y la horizontal cuando el bloque A comienza a resbalar. El largo de la cuerda entre el borde de la mesa y el cuerpo B es L .

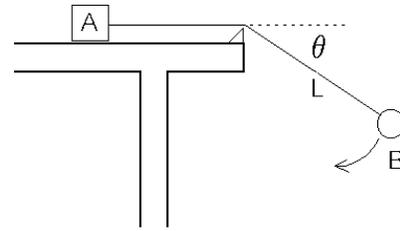


Figura 5.28

32. Dos monos, llamados *Patín* y *Logo*, de igual masa m están agarrados de una cuerda que pasa por encima de una polea (sin roce), frente al Museo del Louvre. Habiendo escuchado el rumor de que en el museo hay una famosa pintura de una supuesta congénere con una enigmática sonrisa, el mono Patín decide subir por la cuerda hasta una posición que le permita mirarla por la ventana. Para ello debe remontar una altura h .

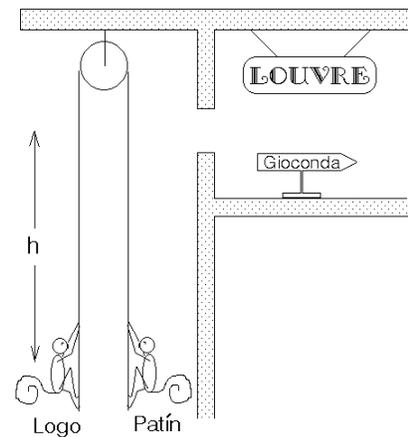


Figura 5.29

- a) Analice como el movimiento del mono Patín afecta la posición del mono Logo.
- b) Calcule el trabajo que debe realizar el mono Patín para llevar a cabo su propósito.

33. Considere dos masas m unidas por un hilo de largo $2L$, que caen con el hilo estirado en forma horizontal. Después de caer una distancia L el centro del hilo choca con un clavo, correspondiendo de ahí en adelante la trayectoria de las dos masas a un movimiento circular. Si el hilo se corta cuando la tensión llega a tener el valor $\tau_{max} = 7mg/2$, encuentre el ángulo ϕ que en ese instante forma el hilo con la horizontal (ver figura 5.30).

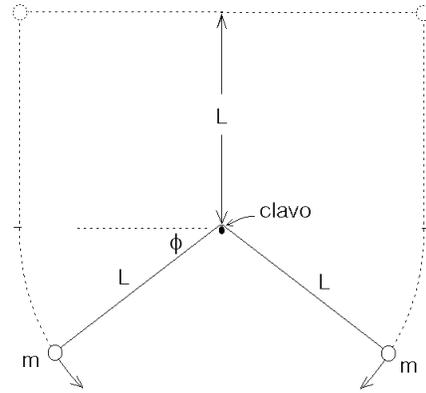
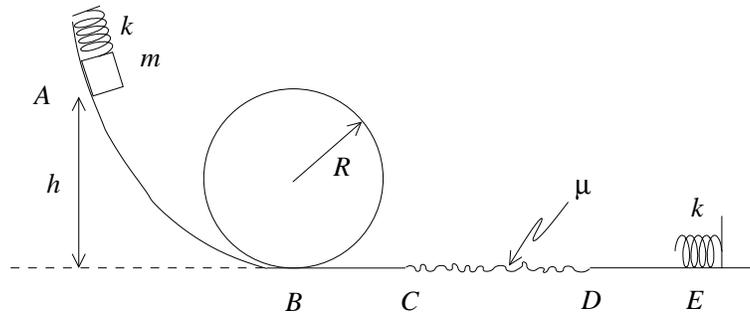


Figura 5.30

34. Un carro de masa m se desliza sobre el riel mostrado en la siguiente figura:



El carro parte en el punto A , a una altura h del suelo, y sujeto a un resorte de constante elástica k , el cual está comprimido una distancia x_0 respecto a la posición de equilibrio. En cierto instante, el resorte se descomprime, el carro se suelta de él, y comienza a deslizar por el riel, sin roce, hasta el punto B , donde comienza a describir una circunferencia de radio R . Luego llega al punto C , donde comienza el único sector rugoso del riel, hasta alcanzar el punto D . El coeficiente de roce cinético del riel en dicho sector es μ . Finalmente, el carro recorre un sector adicional liso hasta llegar al punto E , donde se encuentra con un segundo resorte de constante elástica k .

- Si la distancia h es fija, ¿cuál debe ser la compresión mínima x_m del primer resorte para que el carro no se salga de la vía? ¿Qué condición debe cumplir h para que x_m sea distinta de cero?
- Considere ahora que el primer resorte está comprimido en dicha distancia mínima x_m . Si al final del trayecto el segundo resorte alcanza una compresión máxima $x_1 = x_m/2$, ¿cuál es la longitud L del sector del riel con roce?
- Si $x_0 = x_m$ y L está dado por el valor calculado en la parte anterior, pero la altura inicial del carro es $2h$, ¿cuál es la compresión máxima x_1 del segundo resorte al final del trayecto?

5.7. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 12

Cuando la masa m haya resbalado hasta formar un ángulo θ con la horizontal, la energía potencial (gravitatoria) habrá cambiado en

$$\Delta U_{\text{pot}} = mg \Delta h = mg(R - R \sin \theta) .$$

Como no hay roce, este cambio de energía potencial debe coincidir con la energía cinética que adquiere la masa m , o sea, debe cumplirse la relación

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \sin \theta) .$$

Esto nos permite encontrar la velocidad v de la masa en función de θ :

$$v = \sqrt{2gR(1 - \sin \theta)} .$$

La masa m recorre un arco de círculo de radio R , luego la fuerza centrípeta (que apunta en la dirección $-\hat{r}$) es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{mv^2}{R}\hat{r} .$$

(También hay una fuerza tangencial que, sin embargo, aquí no es necesario evaluar.) Las únicas fuerzas reales que actúan sobre m son la normal $N\hat{r}$ y el peso $-mg\hat{z}$. (Nuevamente hemos elegido al eje \hat{z} apuntando hacia arriba.) La componente radial de la fuerza neta es $(N - mg\sin \theta)\hat{r}$. Esta debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$-\frac{mv^2}{R} = N - mg\sin \theta .$$

Despejando N se obtiene

$$\begin{aligned} N &= mg\sin \theta - \frac{mv^2}{R} = mg\sin \theta - \frac{1}{R}2mgR(1 - \sin \theta) \\ &= mg(3\sin \theta - 2) \end{aligned}$$

La masa m inicia su movimiento en el ápice, en cuyo caso $\theta = 90^\circ$, siendo la fuerza normal que ejerce la semiesfera sobre la masa $N = mg$. A medida que transcurre el tiempo, θ disminuye y luego también N . Cuando $\sin \theta = 2/3$, la fuerza normal se hace cero, siendo ese el lugar en que la masa m se separa de la semiesfera.

Solución al problema 14

Supongamos por un momento que la partícula 1 nunca se despegue de la pared. Cuando la partícula 1 haya bajado desde h_0 hasta una altura y , entonces, por conservación de energía

$$mg(h_0 - y) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 .$$

Sabemos que $x^2 + y^2 = L^2$. Derivando esta relación se deduce que $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$, o sea,

$$\dot{y} = -\dot{x}\frac{x}{y} .$$

Sustituyendo esto en la ecuación de conservación de la energía se encuentra la relación

$$mg(h_0 - y) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{L^2}{y^2} .$$

De esta última ecuación podemos despejar la velocidad de la partícula 2 en función de la altura a la que se encuentra la partícula 1:

$$\dot{x}^2 = \frac{2g}{L^2} (h_0 - y) y^2 .$$

La velocidad de la partícula 2 depende de y . Observemos que la rapidez con que se mueve la partícula 2 es nula cuando $y = h_0$ y también cuando $y = 0$, luego en algún lugar entremedio debe tener un máximo.

Encontremos el valor $y = h$ para el cual \dot{x} tiene su máximo. Para ello debemos encontrar el máximo de la función $f(y) = (h_0 - y)y^2$. Igualando la derivada de $f(y)$ a cero se encuentra

$$2h_0y - 3y^2 = 0 .$$

Despejando y se encuentra $y = h = 2h_0/3$. Es claro que cuando la partícula 1 llegue a esa altura, se desprenderá de la pared (si es que no hay un mecanismo que evite que eso ocurra). La razón es la siguiente: el único elemento que ejerce una fuerza horizontal sobre el sistema (las dos masas con la varilla) es la pared vertical. Mientras $y > h$ la partícula 2 acelera (la rapidez \dot{x} aumenta) en la dirección $+\hat{x}$, luego la pared debe ejercer sobre el sistema una fuerza en esa dirección. Cuando $y < h$ entonces la partícula 2 desacelera (\dot{x} vuelve a disminuir); eso implica que la pared ejerce una fuerza en la dirección $-\hat{x}$ sobre el sistema, lo que a su vez sólo es posible si existe algún mecanismo que *sujete* a la partícula 1 a la pared vertical. Si tal mecanismo no existe, entonces la partícula 1 se separa de la pared.

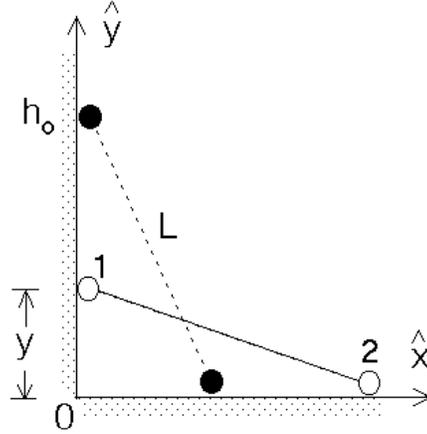


Figura 5.31

Solución al problema 18

De acuerdo a la ley de Coulomb, las cargas Q de la izquierda y de la derecha ejercen sobre q una fuerza

$$\vec{F}_1 = \frac{qQ}{(a+x)^2} \hat{x}$$

y

$$\vec{F}_2 = -\frac{qQ}{(a-x)^2} \hat{x},$$

respectivamente. La fuerza total $\vec{F}(x)$ que actúa sobre la carga q es la suma vectorial de las dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , por lo tanto,

$$\vec{F}(x) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = qQ \left[\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} \right] \hat{x}.$$

Para encontrar la energía potencial también podemos evaluar primero la energía potencial de q con cada una de las cargas Q separadamente, para luego hacer la suma (escalar) de ellas. La energía potencial de una carga q a una distancia r de otra carga Q viene dada por (ver problema 14) $U(r) = qQ/r$. Usando esta expresión se encuentra que la energía potencial de la carga q , cuando ésta se encuentra en el lugar x , es:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = \frac{qQ}{|a+x|} + \frac{qQ}{|a-x|}.$$

La energía p
la función U

in gráfico de

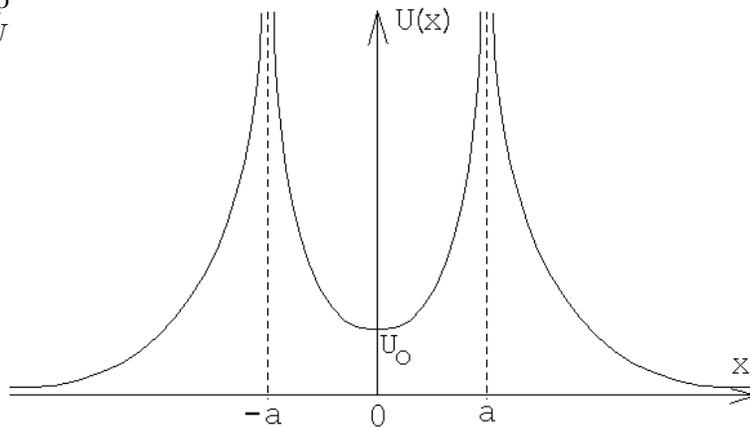


Figura 5.32

De la figura se deduce que $x = 0$ es un punto de equilibrio estable del sistema. Para

pequeños desplazamientos, o sea para $|x| \ll a$, se tiene

$$\begin{aligned} U(x) &= qQ \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{qQ}{a} \left[\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1} \right] \\ &\simeq \frac{qQ}{a} \left[\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) \right] \\ &= \frac{2qQ}{a} + \frac{2qQ}{a^3} x^2 = U_0 + \frac{2qQ}{a^3} x^2. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se deduce que, para pequeños desplazamientos de q desde el origen, la energía potencial es cuadrática (es decir, similar a la expresión que se tenía para una masa adosada a un resorte).

La fuerza que actúa sobre q al desplazarla levemente de su posición de equilibrio es

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{4qQ}{a^3} x.$$

Esta fuerza es análoga a la ley de Hooke: es proporcional y apunta en sentido contrario al desplazamiento. El papel de la constante de restitución k lo juega $4qQ/a^3$. Luego, al desplazar la carga q levemente de su punto de equilibrio, ésta oscilará *armónicamente* con un período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{4qQ}},$$

donde m es la masa de la carga q .

Solución al problema 25

La figura adjunta muestra el gráfico de la energía potencial. Para $r > a$ la pendiente es positiva, para $r = a$ es nula, mientras que para $r < a$ es negativa. La fuerza entre los dos átomos de la molécula es $-dU(r)/dr$. Cuando la derivada es nula (para $r = a$), la fuerza también es nula, luego la separación $r = a$ corresponde a un punto de equilibrio. Para $r > a$, $dU(r)/dr > 0$ y, por consiguiente, $F(r) < 0$. En palabras: si la separación de los dos átomos de la molécula es mayor que a , entonces la fuerza entre ellas será atractiva.

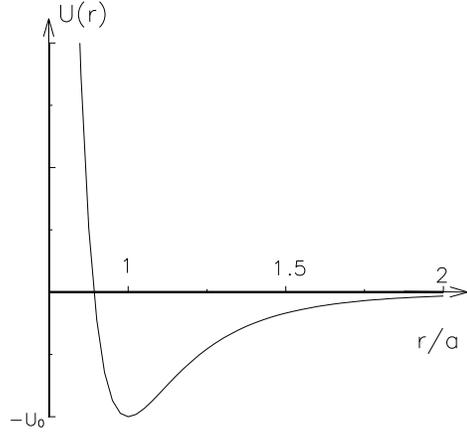


Figura 5.33

Lo contrario ocurre para $r < a$: en ese caso $dU(r)/dr < 0$ y por consiguiente $F(r) > 0$, o sea, la fuerza que aparece tratará de alejar a los dos átomos (aumentar r). Resumiendo, cada vez que el sistema se desplaza de su posición de equilibrio, aparece una fuerza que trata de llevar al sistema nuevamente a su posición de equilibrio. (Es precisamente esto último lo que caracteriza a un punto de equilibrio estable.)

Sea \vec{F}_{12} la fuerza que actúa sobre el átomo 1 debido al átomo 2 y \vec{F}_{21} la fuerza que actúa sobre el átomo 2 debido al átomo 1. Por supuesto que, de acuerdo al principio de acción y reacción (tercera ley de Newton) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Sea O un origen y \vec{r}_1 y \vec{r}_2 los vectores de posición de cada uno de los átomos (ver figura 5.34).

Las ecuaciones de movimiento, de acuerdo a la segunda ley de Newton, son:

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

y

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} .$$

Restando una de la otra se obtiene

$$m_0 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = \vec{F}_{21} - \vec{F}_{12} = 2\vec{F}_{21} . \tag{5.14}$$

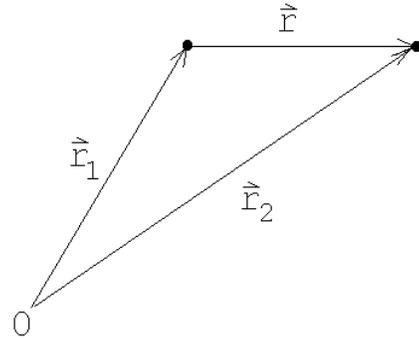


Figura 5.34

La fuerza que actúa sobre la partícula 2 debida a la partícula 1 es

$$\vec{F}_{21} = -\frac{dU(r)}{dr} \hat{r} ,$$

donde $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Como estamos suponiendo que la molécula no rota, se tiene que el vector unitario \hat{r} , que apunta a lo largo de la línea que une a ambos átomos, no variará a medida que transcurre el tiempo. Se tiene entonces que

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = r \hat{r}$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{r} \hat{r} .$$

Sustituyendo la última ecuación en (5.14) se obtiene

$$m_0 \ddot{r} \hat{r} = 2\vec{F}_{21} . \quad (5.15)$$

Evaluemos \vec{F}_{21} . Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -\frac{dU(r)}{dr} \hat{r} \\ &= 12 \frac{U_0}{a} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^6 - 1 \right] \left(\frac{a}{r} \right)^7 \hat{r} . \end{aligned}$$

Escribamos r de la forma $r = a + s$. De esta manera, $s = 0$ corresponderá a la molécula en su posición de equilibrio. Si los átomos se desplazan sólo levemente de su posición de equilibrio, entonces $|s| \ll a$. En este caso

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= 12 \frac{U_0}{a} \left[\left(\frac{a}{a+s} \right)^6 - 1 \right] \left(\frac{a}{a+s} \right)^7 \hat{r} \\ &= 12 \frac{U_0}{a} \left[\left(1 + \frac{s}{a} \right)^{-6} - 1 \right] \left(1 + \frac{s}{a} \right)^{-7} \hat{r} \\ &\simeq 12 \frac{U_0}{a} \left[1 - 6 \frac{s}{a} - 1 \right] \left(1 - 7 \frac{s}{a} \right) \hat{r} \\ &\simeq -72 \frac{U_0}{a^2} s \hat{r} + o(s^2) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sustituyendo este resultado en (5.15), se obtiene

$$m_0 \ddot{r} \hat{r} = -72 \frac{U_0}{a} s \hat{r} .$$

Cancelando a ambos lados \hat{r} y usando el hecho que $\ddot{r} = \ddot{s}$, se tiene

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 , \quad (5.17)$$

con

$$\omega_0^2 = 72 \frac{U_0}{a^2 m_0} .$$

La ecuación diferencial (5.17) corresponde a la de un oscilador armónico. Ya sabemos que en ese caso, la magnitud s (el alejamiento de un átomo de su posición de equilibrio) realizará oscilaciones armónicas, siendo el período de tales oscilaciones

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{a^2 m_0}{18 U_0}} .$$

De la figura 5.33 también se deduce que para disociar a la molécula, es decir, para separar los átomos a una distancia $r \rightarrow \infty$, se debe entregar al sistema una energía al menos igual a U_0 .

Solución al problema 28

a) Si la masa m parte de una altura h , entonces su energía (antes de entrar a la región de desaceleración) es

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = mgh .$$

Al atravesar toda la zona de desaceleración, la energía disipada en calor es $Q = \mu_c m g \overline{CD}$. Para que la masa m quede en reposo en D , toda su energía debe ser disipada como calor, o sea,

$$mgh = \mu_c m g \overline{CD} .$$

Despejamos h :

$$h = \mu_c \overline{CD} = 0,5 \cdot 8 \text{ [m]} = 4 \text{ [m]} .$$

c) Ahora $h = 8$ [m]. La mitad de la energía se disipará durante la primera pasada por la región de desaceleración y el resto se disipará en la segunda pasada. El carro m quedará finalmente en reposo en el punto C .

b) Después de emerger de la región de desaceleración por primera vez, la energía del carro será $E_1 = mgh/2$. Esta tendrá que ser la energía potencial del resorte cuando esté comprimido con el carro detenido:

$$\frac{mgh}{2} = \frac{1}{2} k x_0^2 ,$$

donde x_0 es la compresión máxima del resorte. El carro se detendrá por primera vez a una distancia x_0 a la derecha del punto E . Despejando x_0 se encuentra (con $g = 10$ [m/s²]),

$$x_0 = \sqrt{\frac{mgh}{k}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 10 \cdot 8}{6 \cdot 10^4}} \text{ [m]} = 0,816 \text{ [m]} .$$

d) El trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte para detener el carro es igual a la energía con que incidió sobre el resorte, $mgh/2 = 500 \cdot 10 \cdot 8/2$ [J] = 20000 [J].

También podemos encontrarla evaluando la integral

$$W = \int_0^{x_0} kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^{x_0} = \frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^4 \cdot (0,816)^2 \text{ [J]} .$$

e) La fuerza que ejerce el resorte cuando está comprimido es $-kx_0 \hat{x}$, donde \hat{x} apunta hacia la derecha. La aceleración del carro, por lo tanto, será

$$\vec{a} = -\frac{kx_0}{m} \hat{x} = -97,92 \text{ [m/s}^2\text{]} ,$$

aproximadamente 10 veces la aceleración de gravedad.

Solución al problema 33

Después de chocar el hilo con el clavo y al formar un ángulo ϕ con la horizontal, la energía potencial de cada masa habrá disminuído en $mgL(1 + \sin \phi)$. Esta será la energía cinética que tendrá cada masa, es decir,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 + \sin \phi) .$$

Esta relación nos permite encontrar la velocidad $v = v(\phi)$:

$$v^2 = 2gL(1 + \sin \phi) .$$

Como cada masa está recorriendo un círculo sabemos que la fuerza radial neta (la fuerza centrípeta) que se está ejerciendo sobre ella es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{mv^2}{L} \hat{r} = -2mg(1 + \sin \phi) \hat{r} .$$

Las únicas fuerzas “reales” que están siendo ejercidas sobre cada masa son la fuerza debido a la tensión del hilo y la fuerza de gravedad:

$$\vec{F}_{\text{real}} = -\tau \hat{r} - mg \hat{z} .$$

La componente radial de esta fuerza es $-\tau + mg \sin \phi$. Esta debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$-\tau + mg \sin \phi = -2mg(1 + \sin \phi) .$$

El hilo se corta si el ángulo ϕ es tal que $\tau = 7mg/2$. Llamando ϕ_0 a ese ángulo se tiene

$$-\frac{7}{2}mg + mg \sin \phi_0 = -2mg(1 + \sin \phi_0) .$$

A partir de esta relación se encuentra que $\sin \phi_0 = 0,5$, o sea, $\phi_0 = 30^\circ$.

Capítulo 6

Momento lineal y colisiones

versión 26 mayo 2011

6.1. Conservación del momento lineal

Consideremos N partículas, cuyas masas y vectores de posición vienen dados por $\{m_j\}_j$ y $\{\vec{r}_j\}_j$, con $j = 1, 2, \dots, N$. Supongamos que sobre cada partícula j algún agente externo ejerce una fuerza \vec{F}_j . Supongamos además que las partículas interactúan entre sí, siendo \vec{f}_{ji} la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula j . Por supuesto, debido al principio de acción y reacción, $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, o, en palabras, la fuerza que ejerce la partícula j sobre la i es la opuesta a la que la partícula i ejerce sobre la j .

Usando la segunda ley de Newton, podemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula j . Se tiene

$$\vec{F}_j + \sum_{i=1}^N \vec{f}_{ji} = m_j \ddot{\vec{r}}_j .$$

Al lado izquierdo se tiene la fuerza total que actúa sobre la partícula j , mientras que al lado derecho se tiene el producto de la masa por la aceleración de esa partícula. Sumando las ecuaciones de movimiento de todas las partículas (es decir, sumando sobre j), se obtiene

$$\sum_j \vec{F}_j + \sum_{i,j} \vec{f}_{ji} = \sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j . \quad (6.1)$$

Note que, debido al principio de acción y reacción, $\sum_{i,j} \vec{f}_{ji} = 0$, es decir, la suma de

todas las fuerzas internas es nula. Definamos la magnitud

$$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j, \quad (6.2)$$

donde $M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ es la masa total. Derivando la última ecuación dos veces respecto al tiempo, queda

$$M \ddot{\vec{r}}_{cm} = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j .$$

Sustituyendo esta expresión en (7.1), y usando la relación $\sum_{ij} \vec{f}_{ji} = 0$, se obtiene

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_j = M \ddot{\vec{r}}_{cm} .$$

La suma $\sum_j \vec{F}_j$ corresponde a la fuerza externa total que actúa sobre las partículas, magnitud que denotaremos por \vec{F}_{tot} . De esta manera, finalmente

$$\vec{F}_{\text{tot}} = M \ddot{\vec{r}}_{cm} . \quad (6.3)$$

Esta última ecuación no depende de las *fuerzas internas* que actúan entre las distintas partículas. Al vector \vec{r}_{cm} se le denomina *posición del centro de masas*. La ecuación (6.3) enseña que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas acelera al centro de masas como si toda la masa del sistema estuviese centrada allí. Ésta es la segunda vez que encontramos que el centro de masas es un punto privilegiado. Antes, pudimos mostrar que, para efectos de energía potencial gravitatoria, un cuerpo se puede considerar efectivamente como una partícula, con toda la masa ubicada en el centro de masas (Problema 5.5). Ahora hemos encontrado un resultado aún más general: cuando una fuerza externa cualquiera, no solamente gravitatoria, actúa sobre un sistema de partículas, se puede considerar que toda la masa está concentrada en el centro de masas, y el problema se reduce nuevamente a la evolución de una única partícula, dada por (6.3).

Si la fuerza (externa) total sobre el sistema de partículas es nula, o sea, si $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_j \vec{F}_j = 0$, entonces el centro de masas no acelera. En ese caso, la velocidad del centro de masas es constante (designemos por $\vec{v}_{cm}^{(0)}$ a tal velocidad). Por otra parte, la velocidad del centro de masas se puede obtener derivando la ecuación (6.2) respecto al tiempo:

$$\dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = \vec{v}_{cm}^{(0)} .$$

Introduciendo la definición de *momento lineal* $\vec{p}_j = m_j \dot{\vec{r}}_j$ de cada partícula, la última ecuación se puede reescribir de la forma

$$\vec{P}_{\text{tot}} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = M \vec{v}_{cm}^{(0)} . \quad (6.4)$$

Es decir, por una parte, es natural definir el *momento lineal total* del sistema, \vec{P}_{tot} , como la suma de los momentos lineales de cada partícula. Lo interesante es que dicho momento lineal total es igual al momento lineal de una única partícula de masa M (la masa total) moviéndose con la velocidad del centro de masas. Es decir, nuevamente, esta vez para efectos del momento lineal total del sistema, se puede considerar que toda la masa del cuerpo está concentrada en un único punto, el centro de masas.

De (6.3) y (6.4), entonces, se sigue que, en ausencia de fuerzas externas,

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = 0 , \quad (6.5)$$

o bien

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \text{constante} . \quad (6.6)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de *Principio de Conservación del Momento Lineal*. En palabras: cuando la fuerza externa total que actúa sobre un sistema de partículas es cero entonces la suma de los momentos lineales de las distintas partículas se mantiene constante en el tiempo.

Este principio de conservación es, como el de la energía, poderoso. Notemos que podemos tener un sistema arbitrario de partículas, donde todas están interactuando entre sí y con una fuerza externa. La fuerza individual sobre cada partícula no tiene por qué ser cero en general, y por lo tanto las partículas cambiarán su velocidad, y por tanto su momento lineal, constantemente. Sin embargo, a pesar de eso, si la fuerza externa *total* sobre el sistema es cero, entonces la *suma* de los momentos lineales de todas las partículas no varía en el tiempo. A pesar de la evolución complicada que puede tener el sistema internamente, hay algo, el momento lineal total que se conserva. Esto se suma entonces a la conservación de la energía, que también se satisface para sistemas cerrados.

Ilustremos los conceptos anteriores con un ejemplo.

Problema: Considere dos masas, $m = m_0$ y $M = 3m_0$, sobre las cuales no actúan fuerzas externas. Supongamos que en el instante $t = 0$, la partícula m se encuentra en el origen y en reposo, y que la partícula M se encuentra en $\vec{r}_M(0) = 2\hat{x}$ [m] moviéndose con una velocidad $\vec{v}_M(0) = 4\hat{y}$ [m/s]. Supongamos además que existe cierta interacción entre las partículas y, como consecuencia de ella, ambas aceleran. Si en el instante $t_0 = 5$ [s] la partícula m se encuentra en $\vec{r}_m(t_0) = (-2\hat{x} - 8\hat{y})$ [m], ¿en qué lugar se encontrará la otra masa?

Solución: Como no hay fuerzas externas, el centro de masas se mueve con velocidad constante. Encontremos primero la velocidad del centro de masas y la posición de éste en los instantes $t = 0$ y $t = 5$ [s]. En efecto

$$\vec{r}_{cm}(0) = \frac{m \cdot \vec{r}_m(0) + M \cdot \vec{r}_M(0)}{m + M} = \frac{3m_0 \cdot 2\hat{x}}{m_0 + 3m_0} = \frac{3}{2}\hat{x} \text{ [m]}$$

y

$$\vec{v}_{cm}(0) = \frac{m \cdot \vec{v}_m(0) + M \cdot \vec{v}_M(0)}{m + M} = \frac{3m_0 \cdot 4\hat{y}}{m_0 + 3m_0} = 3\hat{y} \text{ [m/s]} .$$

Como la velocidad del centro de masas es constante, en el instante $t_0 = 5$ [s] el centro de masas se encontrará en

$$\vec{r}_{cm}(t_0) = \vec{r}_{cm}(0) + \vec{v}_{cm}(0) \cdot t_0 = \left[\frac{3}{2}\hat{x} + 3 \cdot 5\hat{y} \right] \text{ [m]} .$$

Por otra parte, en el instante t_0 la posición del centro de masas viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm}(t_0) &= \frac{m\vec{r}_m(t_0) + M\vec{r}_M(t_0)}{m + M} \\ &= \frac{m_0(-2\hat{x} - 8\hat{y}) + 3m_0\vec{r}_M(t_0)}{m_0 + 3m_0} = \frac{1}{4}(-2\hat{x} - 8\hat{y} + 3\vec{r}_M(t_0)) \text{ [m]} . \end{aligned}$$

Igualando las dos ecuaciones para $\vec{r}_{cm}(t_0)$ podemos despejar $\vec{r}_M(t_0)$:

$$\frac{1}{4}(-2\hat{x} - 8\hat{y} + 3\vec{r}_M(t_0)) \text{ [m]} = \left[\frac{3}{2}\hat{x} + 3 \cdot 5\hat{y} \right] \text{ [m]} ,$$

de donde se deduce que

$$\vec{r}_M(t_0) = \frac{1}{3}(8\hat{x} + 68\hat{y}) \text{ [m]} .$$

¡Grafique en el plano (\hat{x}, \hat{y}) los vectores \vec{r}_m , \vec{r}_M y \vec{r}_{cm} en los instantes $t = 0$ y $t = 5$ s!

Notemos cómo hemos sido capaces de resolver este problema poseyendo escasa información. Sabemos que existe *alguna* interacción entre los cuerpos, pero no conocemos el detalle. No importa. En tanto no existan fuerzas externas, el momento lineal total se conservará, y eso es suficiente para determinar la posición de la segunda masa, conociendo la posición de la primera.

Problema resuelto en clases: 6.10

6.2. Colisiones

Analicemos primeramente colisiones en una dimensión. Considere dos partículas de masas m y M , restringidas a moverse (sin roce) a lo largo del eje \hat{x} y estudiemos algunos casos particulares.

- a) Supongamos que la partícula M incide desde la izquierda con velocidad $+v_0$ y se mueve hacia la partícula m , que inicialmente se encuentra en reposo. Suponga que las dos partículas colisionan, quedando una adosada a la otra, formando una única partícula de masa $(M + m)$. ¿Con qué velocidad \tilde{v} se moverá esta nueva partícula después de la colisión?

Para resolver este problema usamos el principio de conservación del momento lineal. Sobre el sistema no hay fuerzas externas actuando, luego el momento lineal se conserva. El momento lineal total antes de la colisión es

$$P_{\text{tot}}^{(i)} = Mv_0 + m \cdot 0 = Mv_0 \quad ,$$

mientras que después de la colisión es

$$P_{\text{tot}}^{(f)} = (M + m)\tilde{v} \quad .$$

Estas dos expresiones deben ser iguales, luego

$$\tilde{v} = \frac{M}{M + m} v_0 \quad .$$

En el límite $M \gg m$ (el caso de una locomotora chocando con una mosca) la velocidad después de la colisión es $\tilde{v} \simeq v_0$ (la velocidad de la locomotora). En el límite $M \ll m$ (el caso de una mosca chocando contra una locomotora en reposo) la velocidad después de la colisión es $\tilde{v} \simeq 0$.

La energía cinética antes y después de la colisión no es la misma, siendo la diferencia

$$\begin{aligned} Q \equiv K_f - K_i &= \frac{1}{2}(M + m)\tilde{v}^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 \\ &= -\frac{1}{2}Mv_0^2 \frac{m}{M + m} \quad . \end{aligned}$$

A esta diferencia se le suele llamar *el valor Q de la reacción*. Cuando, como en el presente ejemplo, $Q \neq 0$, la colisión se dice que es *inelástica*. Si $Q < 0$, la colisión es *endotérmica*—parte de la energía que el sistema tenía antes de la colisión se difunde a *grados de libertad internos* del sistema (por ejemplo, se “pierde” como calor, que en el fondo es entregar energía cinética a las moléculas). Si $Q > 0$ la colisión (o reacción) es *exotérmica*.

Notemos que es muy interesante el hecho de que en este ejemplo la energía *no* se conserva. Y no importa, porque la conservación de momentum tiene toda la información necesaria para resolver completamente el sistema.

- b) Consideremos ahora el caso de una colisión en que se conserva la energía cinética (o sea, una colisión con $Q = 0$) y además se conserva la identidad de las partículas (es decir, el número de ellas y sus masas). Tales colisiones se denominan *elásticas*. Nuevamente supongamos que la partícula M incide desde la izquierda, a lo largo del eje \hat{x} , con velocidad $+v_0$ y que choca con la partícula m , que inicialmente se encuentra en reposo. Encontramos la velocidad final \tilde{v}_m y \tilde{v}_M de cada una de las partículas.

Notamos que en este caso, a diferencia del anterior, son dos las incógnitas a encontrar. Si sólo se conservara el momentum, pero “mágicamente” en este caso se conserva también la energía, lo cual nos proporciona precisamente la ecuación adicional que necesitamos para resolver completamente el problema.

Invocamos, entonces, la conservación del momento lineal y de la energía (cinética). Se tiene

$$Mv_0 = m\tilde{v}_m + M\tilde{v}_M$$

y

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}m\tilde{v}_m^2 + \frac{1}{2}M\tilde{v}_M^2.$$

De estas dos ecuaciones podemos despejar las dos incógnitas \tilde{v}_m y \tilde{v}_M . Se obtiene

$$\tilde{v}_m = \frac{2M}{M+m}v_0$$

y

$$\tilde{v}_M = \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

Analicemos varios casos límites:

- i) $M \gg m$ (o sea, una locomotora con velocidad v_0 colisionando con una pelota de tenis en reposo). En este límite, $\tilde{v}_M = v_0$ y $\tilde{v}_m = 2v_0$ (es decir, la locomotora seguirá como si nada hubiese pasado mientras que la pelota de tenis sale disparada con una velocidad igual al doble de la velocidad de la locomotora).
- ii) $M \ll m$ (o sea, una pelota con velocidad v_0 colisionando con una locomotora en reposo). En este límite, $\tilde{v}_m \simeq 0$ y $\tilde{v}_M = -v_0$ (es decir, la locomotora prácticamente no se moverá y la pelota rebota con una rapidez igual a la incidente). Que la velocidad \tilde{v}_M en este caso sea negativa significa que la partícula se mueve en la dirección $-\hat{x}$.

- iii) $M = m$ (o sea, la colisión central de dos bolas de billar de igual masa).
 En ese caso $\tilde{v}_m = v_0$ y $\tilde{v}_M = 0$ (es decir, la partícula incidente queda en reposo mientras que la otra partícula sale disparada con velocidad v_0).

Si la colisión no ocurre a lo largo de una línea recta, sino que ocurre en un plano, los conceptos involucrados son los mismos y lo único que cambia es que la ley de conservación del momento lineal, siendo una ecuación vectorial, nos dará una relación para cada una de las componentes.

Observemos, sin embargo, que en el caso bidimensional las ecuaciones de conservación son tres (una para la energía, dos para el momentum —una en cada componente), pero las incógnitas son cuatro (dos componentes de velocidad para cada partícula). El problema, entonces, no tiene solución única. Esto significa, por ejemplo, que cuando dos bolas de billar colisionan, el ángulo en que ellas emergen no se puede determinar a partir de las ecuaciones de conservación. Lo cual es natural, porque para nosotros las bolas son partículas, sin estructura. El ángulo con que emergen depende en realidad del punto exacto en que la superficie de una bola colisiona con la otra. Resolver este problema es en realidad bastante más complicado, pero es posible (ver Sec. 6.6).

Otro modo de resolver el problema, manteniendo la descripción en términos de partículas puntuales, es dar algún tipo de información adicional, a fin de eliminar una incógnita. Demos un ejemplo de ello.

Problema: Considere una masa m_1 que choca elásticamente contra una masa m_2 originalmente en reposo. Suponga que después del choque la masa incidente m_1 emerge en una dirección perpendicular a su dirección original (ver figura 6.1). Encuentre:

- a) El ángulo θ con que emerge m_2 , en función de m_1 y m_2 .
- b) La velocidad v_1 con que emerge m_1 .
- c) La velocidad v_2 con que emerge m_2 .

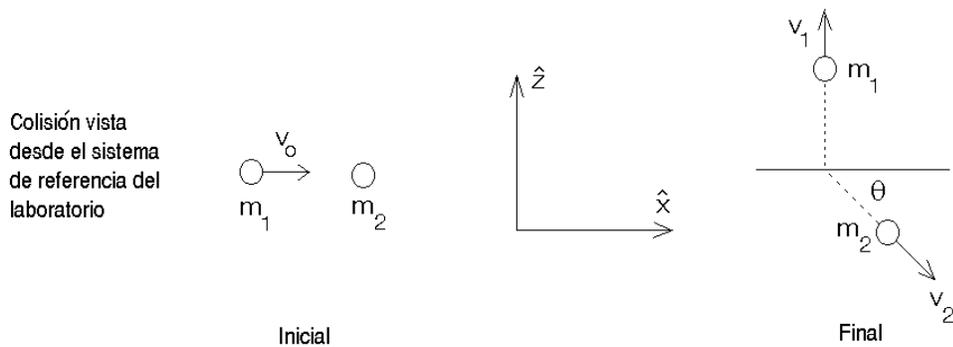


Figura 6.1

Solución: La energía y el momento lineal total, antes y después de la colisión son:

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_0^2,$$

$$\vec{p}_i = m_1v_0\hat{x},$$

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

$$\vec{p}_f = m_1v_1\hat{z} + m_2v_2\cos\theta\hat{x} - m_2v_2\sin\theta\hat{z}.$$

Debido a que el choque es elástico, se conserva la energía total y el momento lineal total; esto nos da las ecuaciones:

$$m_1v_0^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2,$$

$$m_1v_0 = m_2v_2\cos\theta$$

y

$$m_1v_1 - m_2v_2\sin\theta = 0.$$

Éstas son tres ecuaciones con tres incógnitas (v_1 , v_2 y θ). Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra:

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}},$$

$$v_2 = v_0\sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_2 + m_1)}}$$

y

$$\tan\theta = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}.$$

Note que el problema sólo tiene solución si $m_2 \geq m_1$.

En particular, notemos que si las masas son iguales, $\theta = 0$. Por lo tanto, el ángulo relativo entre ambas masas después de la colisión es $\pi/2$. Uno puede demostrar que esto es un hecho general (ver siguiente ejercicio).

Ejercicio: Demostrar que, después de una colisión elástica entre partículas de igual masa, sus trayectorias finales forman un ángulo recto.

Problema resuelto en clases: 6.11

6.3. Impulso

De acuerdo a la segunda ley de Newton $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Multiplicando por dt e “integrando” se obtiene

$$\int_i^f \vec{F} dt = \int_i^f d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i ,$$

o sea, el cambio de momento que sufre una partícula en cierto intervalo de tiempo es igual a la integral de $\vec{F} dt$ durante ese intervalo. A la integral $\int \vec{F} dt$ se le llama *impulso*.

Cuando ocurre una colisión entre dos objetos, el tiempos de colisión puede ser muy pequeño, el momento transferido sin embargo puede ser grande. Por ejemplo, cuando una bolita de acero, al caer desde una altura h , rebota (elásticamente) por una superficie dura. Al llegar a la superficie la bolita tendrá la velocidad $-\sqrt{2gh}\hat{z}$ y justo después del rebote $\sqrt{2gh}\hat{z}$. El cambio de momento es, por lo tanto,

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m \sqrt{2gh} \hat{z} .$$

Este cambio de momento debe ser igual al impulso transmitido por el suelo a la bolita, es decir,

$$\int_i^f \vec{F}(t) dt = 2m \sqrt{2gh} \hat{z} .$$

Podemos intuir que la interacción entre la partícula y el suelo será complicada, y que en cada instante el suelo ejerce una fuerza sobre la partícula que depende del tiempo. En efecto, seguro que dicha fuerza, cuando recién está empezando el contacto, y justo cuando está terminando, es cero; y por tanto debe tener algún máximo entremedio. Sería interesante poder calcular ese máximo. Sin embargo, el hacer rebotar una bolita en el suelo sólo nos da información sobre la integral de dicha fuerza en el tiempo. A pesar de ello, veremos a continuación que sólo con algunas suposiciones razonables podemos obtener bastante información acerca de este problema.

Primero, notemos que, de acuerdo a lo que hemos dicho, durante la colisión, típicamente la fuerza que ejerce un cuerpo sobre tiene el comportamiento como el mostrado en la figura 6.2. Antes de la colisión la fuerza es nula. En el instante $t_0 - \epsilon_1$ los cuerpos entran en contacto, la fuerza aumenta rápidamente llegando a un máximo en cierto instante t_0 para luego decrecer nuevamente a cero (instante $t_0 + \epsilon_2$). Los cuerpos están en contacto durante un intervalo de tiempo $\epsilon_1 + \epsilon_2$.

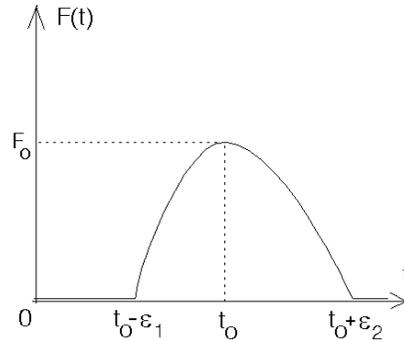


Figura 6.2

El área bajo la curva $F(t)$ es el impulso (momento) transmitido de un cuerpo al otro.

Observando la curva anterior, notamos que un modelo razonable para la fuerza es una parábola invertida, centrada en torno a un cierto tiempo t_0 , que es cuando se tiene la fuerza máxima. Como es una curva simétrica, la fuerza será distinta de cero en un cierto intervalo de ancho 2ϵ en torno a t_0 . Lo único que falta para determinar completamente la parábola es su valor máximo, que definimos como F_0 . La única curva que cumple con las condiciones anteriores es la siguiente:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon^2} (t - t_0)^2\right] & \text{para } t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon \\ 0 & \text{para } t < t_0 - \epsilon \text{ y } t > t_0 + \epsilon \end{cases} .$$

En este caso, entonces, los cuerpos se mantienen en contacto durante un tiempo 2ϵ , siendo en el instante $t = t_0$ la fuerza máxima (F_0) entre los cuerpos. Ahora que tenemos un modelo razonable para la evolución temporal de la fuerza, podemos continuar. El impulso transmitido es

$$\Delta p = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} F_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon^2} (t - t_0)^2\right] dt = \frac{4}{3} F_0 \epsilon .$$

Con este modelo para $F(t)$, en el caso de la bolita obtenemos

$$2m\sqrt{2gh} = \frac{4}{3} F_0 \epsilon .$$

De esta relación se deduce que la fuerza máxima entre la bolita y la superficie de la cual rebota depende del tiempo durante el cual los dos cuerpos se mantienen en contacto. Tanto menor es este intervalo de tiempo, tanto mayor resulta ser F_0 . Veamos un ejemplo numérico. Supongamos que una bolita de 50 g se hace caer desde una altura de 1 m. Supongamos además que el intervalo de tiempo durante el cual los dos cuerpos se mantienen en contacto es aproximadamente 10 ms, o sea, $2\epsilon = 10^{-2}$ s. Con $g = 10 \text{ m/s}^2$ se tiene:

$$F_0 = \frac{3}{10^{-2}} 0.05 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} \text{ [N]} \simeq 67 \text{ [N]} ,$$

fuerza que es más de cien veces mayor que el peso de la bolita. Si la bolita en lugar de acero es de goma, el tiempo de colisión aumenta considerablemente (en un orden de magnitud y más), siendo la fuerza F_0 , por lo tanto, menor en ese mismo factor. Esto explica por qué es posible que si se lanza una bolita de acero y una bolita de goma de iguales masas y con la misma velocidad contra un vidrio, la bolita de acero rompe el vidrio, mientras que la de goma rebota sin provocar daño. Toda la diferencia tiene que ver con que el mismo cambio de momentum ocurre en un tiempo menor, y a su vez el tiempo está determinado por la rigidez de la bolita.

6.4. Problemas

1. Un muchacho de $m_1 = 40$ kg se encuentra sobre una plataforma móvil de $m_2 = 10$ kg junto a dos ladrillos de $m = 5$ kg. La plataforma puede desplazarse, sin roce, sobre un terreno horizontal. En cierto instante el muchacho lanza horizontalmente uno y después el otro ladrillo hacia atrás de la plataforma, con una velocidad $v_0 = 2$ m/s respecto a él mismo. ¿Qué velocidad v adquirirá la plataforma?

Respuesta:
$$v = v_0 \frac{m(2M + 3m)}{(M + m)(M + 2m)} = 0,348 \text{ m/s},$$
 con $M \equiv m_1 + m_2$.

2. Se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 20 m/s formando un ángulo de 30° respecto a la horizontal. En el transcurso de su vuelo, el proyectil explota rompiéndose en dos partes, una de las cuales tiene el doble de masa que la otra. Los dos fragmentos aterrizan simultáneamente. El fragmento más ligero aterriza a 20 m del punto de lanzamiento y en la dirección y sentido en que se disparó el proyectil. ¿Dónde aterrizará el otro fragmento?

3. Una partícula de masa m y velocidad v_0 choca contra otra idéntica en reposo. La partícula en reposo tiene un resorte de constante de restitución k , al cual queda adosada la partícula incidente (ver figura adjunta). Describa el movimiento del sistema después de la colisión lo más detalladamente posible.



Figura 6.3

4. Un bloque de madera de 1 kg se sujeta a un resorte de constante de restitución $k = 200$ N/m. El conjunto descansa sobre una superficie lisa, como se ve en la figura. Se dispara contra el bloque un proyectil de 20 g, quedando adosado al bloque. El resorte alcanza una compresión máxima de 13.3 cm.

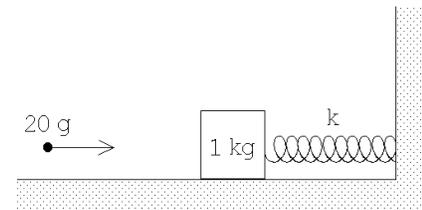


Figura 6.4

- a) Encuentre la velocidad del proyectil antes del choque.
- b) ¿Qué fracción de la energía mecánica inicial se pierde en el choque?

5. Una granada, que se encuentra en reposo, explota partiéndose en dos fragmentos. Sean m_1 y m_2 las masas de los dos fragmentos. Demuestre que las energías cinéticas de los fragmentos vienen dadas por

$$T_1 = \frac{m_2 Q}{m_1 + m_2}$$

y

$$T_2 = \frac{m_1 Q}{m_1 + m_2},$$

donde Q es la diferencia entre la energía cinética total del sistema después y antes de la explosión. (Q es la energía liberada por la explosión de la granada.)

6. Un núcleo de ^{236}U (masa=236 amu), inicialmente en reposo, se divide en dos fragmentos de masas 146 y 90 amu. El valor Q de la reacción es de 190 MeV. Encuentre la velocidad y energía (en MeV) de cada uno de los fragmentos. (1 amu=1.7 10^{-27} Kg, 1 MeV=1.6 $\cdot 10^{-13}$ J.)
7. Un ascensor sube en un pozo a razón de 2 m/s. En el instante en que el ascensor está 18 m del extremo superior del pozo, se deja caer una pelota desde la parte superior del pozo. La pelota rebota elásticamente sobre el techo del ascensor. ¿Hasta qué altura subirá la pelota en relación a la parte superior del pozo? Resuelva el mismo problema suponiendo que el elevador se mueve hacia abajo a 2 m/s.
8. Una partícula A que inicialmente tiene una velocidad v_0 choca contra otra que se encuentra en reposo, desviándose (la partícula incidente) en un ángulo ϕ . La velocidad de A después del choque es v . Por otra parte, la segunda partícula se desvía en un ángulo θ respecto a la dirección inicial de la primera partícula. Demuestre que

$$\tan \theta = \frac{v \sin \phi}{v_0 - v \cos \phi} .$$

9. Considere una plataforma de ferrocarril de peso W que puede rodar sin fricción sobre una vía recta y horizontal (ver figura adjunta). Inicialmente la plataforma se mueve a la derecha con velocidad v_0 . Sobre la plataforma se encuentra de pie un hombre de peso W .



Figura 6.5

¿Cuál es el cambio de velocidad de la plataforma si el hombre corre a la izquierda, de modo que su velocidad con relación a la plataforma es u cuando está a punto de saltar del extremo izquierdo?

10. Un objeto de masa $m = 5$ kg, resbala por una rampa de masa $M = 10$ kg, partiendo desde una altura $h = 2$ m. La rampa puede deslizarse, sin roce, sobre el suelo. Una vez que la masa llega abajo, ¿con qué velocidad se mueve la rampa?

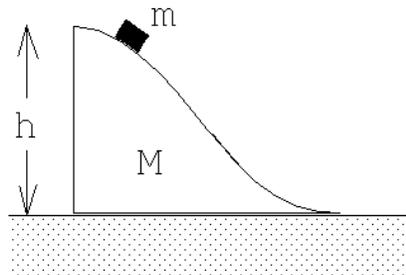


Figura 6.6

11. Un satélite, que se mueve en línea recta con una rapidez v respecto a algún sistema de referencia, recoge partículas (polvo) cósmicas (que, supondremos, se encuentran en reposo en el sistema de referencia en cuestión) a una tasa $dM/dt = kv$, donde k es una constante. Si en el instante $t = 0$ la velocidad del satélite es v_0 y su masa es M_0 , encuentre $v(t)$.
12. Sobre una superficie horizontal sin fricción se encuentran en reposo N bloques de igual masa m colocados uno al lado del otro en línea recta separados por una pequeña distancia. (Los bloques están enumerados de izquierda a derecha como $N, N - 1, N - 2, \dots, 2, 1$.) Desde la izquierda incide sobre ellos un bloque de masa $M > m$, con velocidad v_0 . Suponga que todos los choques son perfectamente elásticos.

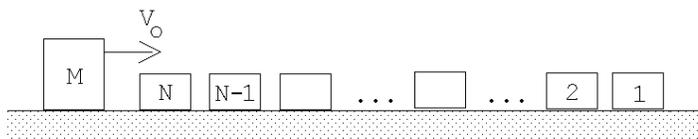


Figura 6.7

- a) Calcule la velocidad final de cada bloque después que han ocurrido todos los choques.
- b) Muestre explícitamente (realizando los cálculos antes y después de todos los choques) que se conserva el momento lineal y la energía cinética del sistema.
13. Aldo y su hermano Pablo han ido a patinar a una laguna helada. Al mediodía Aldo se detiene para abrir el paquete del almuerzo, cuando observa que Pablo se aproxima directamente hacia él con una rapidez v . Antes del impacto Aldo le lanza a su hermano el paquete en dirección horizontal, el cual es atrapado en el aire por Pablo. Si ambos hermanos tienen la misma masa M , y la masa del paquete es m , calcule el valor mínimo de la rapidez con la cual Aldo debe lanzar el paquete para que su hermano no choque con él.

14. Considere un péndulo consistente de una masa m colgada de un hilo de largo L . Suponga que el péndulo inicialmente parte con el hilo en posición horizontal. Al llegar la masa al punto inferior (punto O de la figura 6.8), choca elásticamente con una masa $M = 2m$ que se mueve con velocidad $-v_0\hat{x}$. El péndulo rebota (hacia atrás) llegando tener como amplitud máxima nuevamente la horizontal.

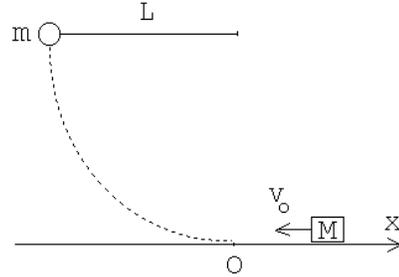


Figura 6.8

- a) Encuentre la rapidez inicial v_0 en función de m , M , L y g .
 b) ¿Cuál es la velocidad de M después del choque?

15. Considere la configuración mostrada en la figura adjunta. Suponga que en el instante $t = 0$ todas las masas están en reposo. La masa #1, después de avanzar una distancia $h/2$, colisiona inelásticamente con la masa m quedando adosada a ella. ¿Cuál es la velocidad de la masa #1 justo antes de la colisión? ¿Cuál es la velocidad de la masa #2 justo después de la colisión? ¿Con qué velocidad llega la masa #2 al suelo?

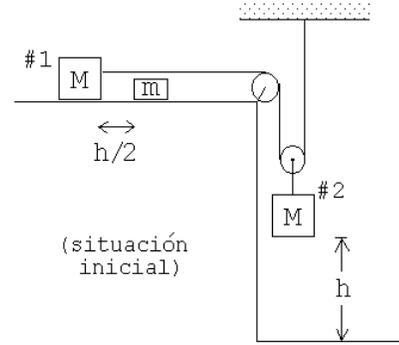


Figura 6.9

16. Un proyectil de masa $m = 20$ g, que se desplaza con velocidad v , choca contra un bloque de masa $M = 0,48$ kg que se encuentra en reposo sobre una superficie lisa. El proyectil queda incrustado en el bloque.

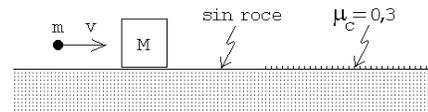


Figura 6.10

A continuación, el sistema proyectil bloque resbala sobre una zona donde el coeficiente de roce cinético con el bloque es $\mu_c = 0,3$. El sistema se detiene después de haber resbalado 10 m sobre esa zona rugosa. Encuentre la velocidad inicial del proyectil.

17. Sobre una plataforma horizontal lisa (sin roce) se colocan en línea recta 99 bloques de igual volumen y masas $2m$, $3m$, $4m$, \dots , $99m$ y $100m$, separadas entre sí por una distancia a (ver figura 6.11). Desde la izquierda incide una

partícula de masa m con velocidad v_0 . Todos los choques son perfectamente elásticos.

- Calcule la velocidad de la partícula de masa $2m$ inmediatamente después de la primera colisión.
- Calcule la velocidad de la partícula de masa $2m$ inmediatamente después que experimenta el segundo choque.
- Después de un tiempo suficientemente largo se observa que ningún bloque permanece sobre la plataforma. ¿Cuántos bloques cayeron al lado izquierdo y cuántos al lado derecho?

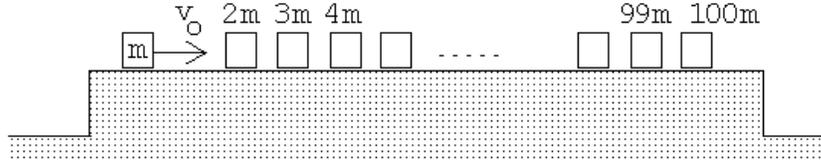


Figura 6.11

- Sobre un plano liso se encuentran tres discos iguales (de radio R y masa M). Al disco A , que incide con velocidad v_0 choca simultánea y elásticamente con los discos B y C , tal como se muestra en la figura 6.12. Los discos B y C inicialmente se encuentran en reposo con los centros separados en una distancia $2R+2a$. Suponga que no hay roce entre los bordes de los discos cuando están en contacto. Encuentre la velocidad del disco A después de la colisión.

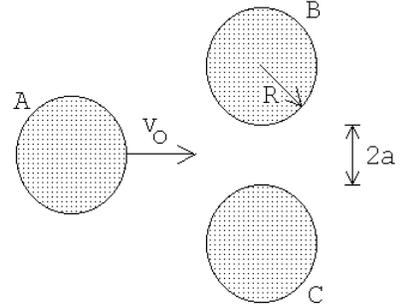


Figura 6.12

Respuesta:
$$v_f = v_0 \frac{\eta^2 - 2}{6 - \eta^2}, \quad \text{con } \eta = \frac{R + a}{R}.$$

- Un objeto de masa m resbala sobre la superficie lisa de una "cuña" M . La cuña reposa sobre una superficie también lisa (ver figura). Originalmente el objeto se encuentra en reposo a una altura h medida desde el tramo horizontal.

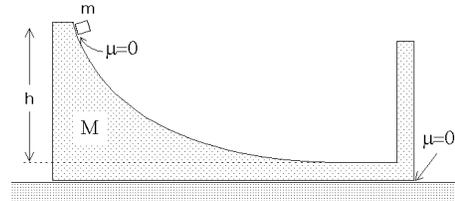


Figura 6.13

- a) Calcule las velocidades de la cuña y de la masa m una vez que m ha llegado al tramo horizontal de la cuña y se desplaza hacia la derecha.
- b) Posteriormente, la masa m choca elásticamente con la parte posterior de la cuña. Calcule la rapidez de m y M después del choque.

20. Una bola de goma se deja caer sobre una cúpula semiesférica de radio R . La bola se suelta a una altura H desde el suelo y a una distancia b con respecto a la vertical que pasa por el centro de la cúpula. La bola choca elásticamente con la cúpula. Calcule la altura h de rebote de la bola con respecto al suelo. Determine el valor máximo de b para que la respuesta tenga sentido.

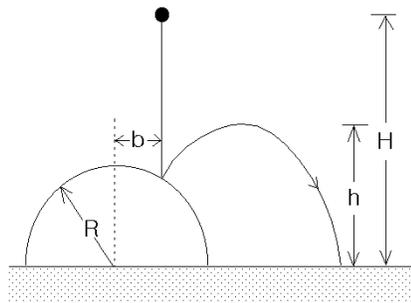


Figura 6.14

21. En la figura se muestran las direcciones incidente y de rebote de un cuerpo que choca contra una pared sin roce. El cuerpo incide con rapidez v_0 y con una dirección que forma un ángulo θ con la normal de la pared. El cuerpo emerge con rapidez λv_0 (con $\lambda < 1$). Determine la dirección (ϕ en la figura) con que emerge el cuerpo y el vector impulso que la pared imprime al cuerpo.

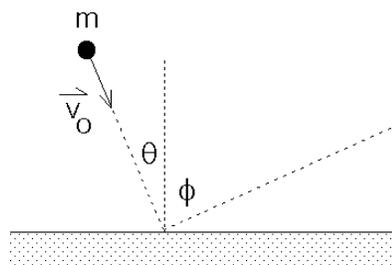


Figura 6.15

22. Una bala de masa 5 gramos atraviesa un saco de virutas de 1 kg de masa. El saco cuelga de un cordel de 2 m de largo. A consecuencia del impacto el saco entra en movimiento y se detiene cuando el cordel forma un ángulo de 12° con la vertical. Calcule la rapidez de la bala una vez que ha emergido del saco si su velocidad antes de la colisión es $v_0 = 1000$ m/s.

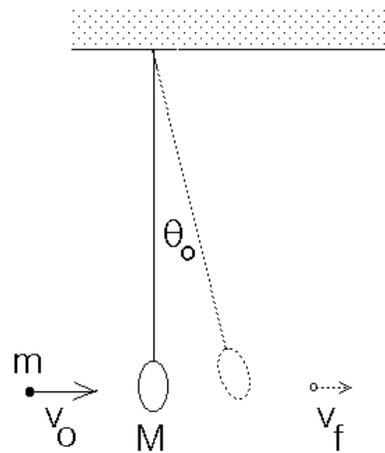


Figura 6.16

23. A y B son dos esferitas de igual masa m engarzadas en el eje horizontal. B está unida a un resorte ideal de largo natural l_0 y rigidez (constante de resitución) k . Inicialmente B está en reposo, el resorte en dirección vertical y sin deformación. A se desliza con velocidad v desconocida, choca con B y ambas permanecen unidas tras la colisión. Calcular v , si en el instante en que el conjunto se detiene el ángulo θ tiene un valor de 60° . Suponga que el roce es despreciable.

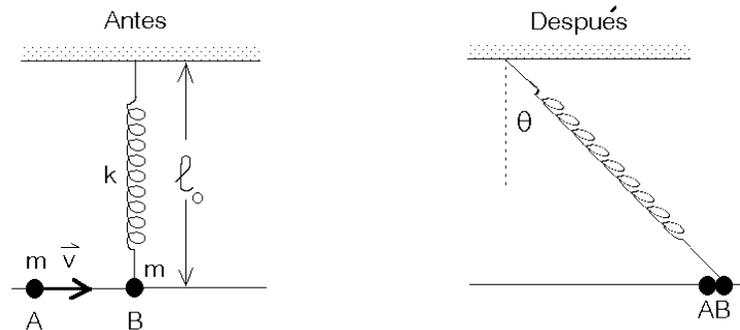


Figura 6.17

24. Dos carros B y C , de masas m y $2m$ respectivamente, se encuentran inicialmente en reposo sobre una vía horizontal recta, separados por una distancia L . Un tercer carro A , de masa $2m$, que se desplaza con velocidad v_0 hacia la derecha embiste al carro B desde la izquierda (ver figura). Suponga que todos los choques que ocurren son elásticos. En estas condiciones,

- Demuestre que el carro B choca dos veces con el carro A .
- Calcule el tiempo que media entre estos dos choques.

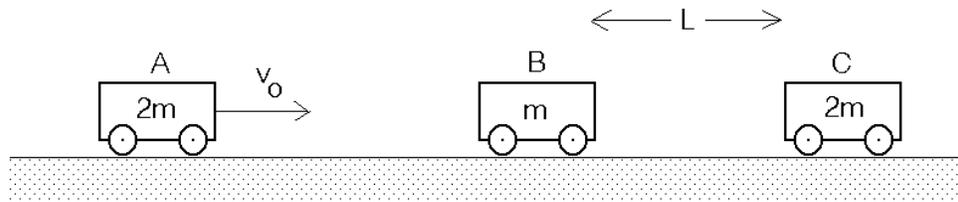


Figura 6.18

25. Una cuerda (flexible), de masa M y largo L se deja caer sobre una pesa. Inicialmente el extremo inferior de la cuerda justo toca la pesa y la cuerda se encuentra en reposo. Demuestre que la lectura de la pesa justo antes de que caiga sobre ella el último segmento de la cuerda, será $W = 3Mg$.

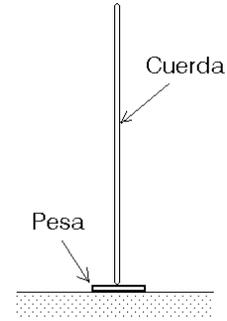
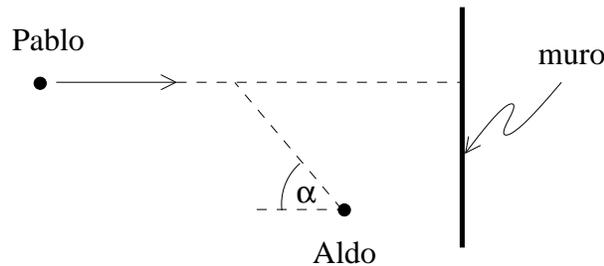


Figura 6.19

26. Considere nuevamente a los hermanos del Prob. 13 sobre una pista de hielo. Los hermanos tienen masa M , y el paquete del almuerzo, masa m . Aldo está en reposo con el paquete del almuerzo, y Pablo se mueve con velocidad constante \vec{v}_P , pero no directamente hacia él (ver figura). En cierto instante, Aldo lanza el almuerzo a Pablo, con un ángulo α respecto a la dirección en que Pablo viaja. El almuerzo, luego de avanzar con velocidad constante, llega justo a Pablo.



- Encuentre las velocidades de Aldo y Pablo luego de que Pablo ha atrapado el paquete del almuerzo.
- Si Pablo sigue avanzando en su dirección original, llegará al final de la pista tarde o temprano, donde un muro de contención lo espera (ver figura). ¿Con qué rapidez, respecto a la pista de hielo, debe lanzar el almuerzo Aldo para que su hermano no choque con el muro de contención?
- Calcule el valor Q de la colisión.

6.5. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 6

Las energías cinéticas totales antes y después del proceso de fisión son

$$K_i = 0$$

y

$$K_f = K_f^{(1)} + K_f^{(2)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 .$$

La reacción es exotérmica, es decir, la energía final es superior a la energía inicial en $Q = 190$ MeV. Se tiene entonces que

$$K_f - K_i = K_f = K_f^{(1)} + K_f^{(2)} = Q .$$

La conservación del momento lineal nos da la relación

$$m_1v_1 = m_2v_2 .$$

Usando esta relación se deduce que

$$\frac{K_f^{(1)}}{K_f^{(2)}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{m_2}{m_1} .$$

De las relaciones

$$K_f^{(1)} + K_f^{(2)} = Q$$

y

$$\frac{K_f^{(1)}}{K_f^{(2)}} = \frac{m_2}{m_1}$$

se deduce que

$$K_f^{(1)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}Q = 117,5 \text{ MeV}$$

y

$$K_f^{(2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}Q = 72,5 \text{ MeV} .$$

De la relación

$$K_f^{(1)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}Q$$

se deduce que

$$v_1^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{2Q}{m_1 + m_2} = \frac{146}{90} \frac{2 \cdot 190 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{236 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}} \simeq 2,46 \cdot 10^{14} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 ,$$

o sea,

$$v_1 = 1,57 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Para la velocidad del fragmento mas pesado se obtiene

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 = 0,97 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Solución al problema 11

Sea $v(t)$ la velocidad y $M(t)$ la masa del cohete (incluyendo la del polvo recolectado). La conservación del momento lineal nos da la relación

$$M(t)v(t) = M(t + dt)v(t + dt) .$$

Para un intervalo de tiempo dt infinitesimal se tiene que

$$M(t + dt) = M(t) + \frac{dM}{dt} dt$$

y

$$v(t + dt) = v(t) + \frac{dv}{dt} dt .$$

Usando estas relaciones se obtiene

$$\begin{aligned} M(t)v(t) &= M(t + dt)v(t + dt) \\ &= \left(M(t) + \frac{dM}{dt} dt \right) \cdot \left(v(t) + \frac{dv}{dt} dt \right) \\ &= M(t)v(t) + M(t)\frac{dv}{dt} dt + v(t)\frac{dM}{dt} dt + \frac{dM}{dt} \frac{dv}{dt} (dt)^2 \end{aligned}$$

Despreciando el término de orden $(dt)^2$, se obtiene

$$M(t) dv = -\frac{dM}{dt} v(t) dt .$$

Pero $dM/dt = kv$, luego

$$M(t) dv = -kv^2 dt .$$

Multiplicando esta relación por $v = v(t)$ se obtiene

$$M(t)v(t) dv = -kv^3 dt .$$

Pero como el momento lineal se conserva, se tiene que $M(t)v(t) = M_0v_0$, donde M_0 y v_0 son la masa y velocidad del satélite en el instante $t = 0$. Usando esto, la última ecuación queda

$$\frac{dv}{v^3} = -\left(\frac{k}{M_0v_0} \right) dt .$$

Integrando la última ecuación desde el instante $t = 0$ (en que la velocidad es v_0) hasta el instante t (en que la velocidad es $v(t)$) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{1}{v^3} dv &= -\left(\frac{k}{M_0v_0} \right) \int_0^t dt \\ -\frac{1}{2v^2} \Big|_{v_0}^v &= -\left(\frac{k}{M_0v_0} \right) t \Big|_0^t \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) &= \frac{k}{M_0v_0} t \end{aligned}$$

Despejando $v(t)$ se obtiene finalmente

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{2kv_0t}{M_0}}} .$$

Solución al problema 14

Para que el péndulo vuelva a su posición inicial, el choque elástico en la parte inferior debe ocurrir con momentum total nulo. Luego, después de la colisión la masa M tendrá una velocidad $v_0\hat{x}$.

La velocidad v_1 con que la masa m llega abajo, se obtiene de la relación (conservación de energía):

$$mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 ,$$

de donde

$$v_1 = \sqrt{2gL} .$$

Para que la colisión ocurra con momento lineal cero la rapidez de la masa M debe satisfacer la relación

$$mv_1 = Mv_0 ,$$

de donde se obtiene para v_0 el resultado

$$v_0 = \frac{m}{M}v_1 = \frac{m}{M}\sqrt{2gL} .$$

Solución al problema 15

En todo instante la partícula #2 se mueva con la mitad de la velocidad de #1. Justo antes del choque la velocidad v_i de la masa #1 viene dada por (conservación de la energía):

$$Mg\frac{h}{4} = \frac{1}{2}(M)v_i^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{v_i}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}Mv_i^2 ,$$

o sea,

$$v_i^2 = \frac{2gh}{5} .$$

Mientras ocurre el choque (o sea, durante un brevísimo intervalo de tiempo $[0, \epsilon]$) la cuerda ejerce una gran fuerza sobre la masa #1 y #2 transmitiendo un cambio de momento lineal Δp :

$$\Delta p = \int_0^\epsilon \tau(t) dt ,$$

donde $\tau(t)$ es la tensión de la cuerda en función del tiempo. Este *impulso* aumenta el momento lineal de la masa #1 en la magnitud Δp y disminuye el momento lineal de la masa #2 en el doble de esa misma magnitud. Si v_f es la velocidad de la masa #1 justo después de la colisión, entonces la ecuación de conservación del momento lineal para la partícula #1 (junto con la masa m) da la relación

$$Mv_i = (M + m)v_f + \Delta p .$$

Para la

$$M\frac{v_i}{2} = M\frac{v_f}{2} - 2\Delta p$$

Despejando v_2 se obtiene

$$v_2 = v_1 \frac{5M}{5M + 4m} .$$

Para encontrar la velocidad \tilde{v} con que la masa #2 llega al suelo usamos nuevamente el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}(M + m)v_f^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{v_f}{2}\right)^2 + Mg\frac{3h}{4} = \frac{1}{2}(M + m)(2\tilde{v})^2 + \frac{1}{2}M\tilde{v}^2 .$$

Despejando \tilde{v} y usando las expresiones para v_2 y v_1 se obtiene

$$\tilde{v}^2 = gh \frac{2M(5M + 3m)}{(5M + 4m)^2} .$$

Ejercicio: Verifique que tanto para $m = 0$ como para $m \rightarrow \infty$, la última ecuación entrega el valor correcto para \tilde{v} .

Solución al problema 19

El momento lineal inicial es cero, y como no hay fuerza externa actuando sobre el sistema, será nulo siempre. Cuando m llega abajo (a la parte horizontal), sean v_m y v_M las velocidades de la masa m y de la cuña, respectivamente. La conservación del momento lineal y de la energía nos da las relaciones

$$mv_m + Mv_M = 0$$

y

$$mgh = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 .$$

Despejando v_m de estas dos ecuaciones (con las incógnitas v_m y v_M) se obtiene

$$v_m = \pm \sqrt{2gh \frac{M}{M + m}} .$$

El signo + corresponde a la solución del problema antes de la colisión de m con la pared mientras que la con el signo - es la velocidad de m después del rebote. La velocidad de la cuña es

$$v_M = -\frac{m}{M}v_m = \mp \sqrt{2gh \frac{m^2}{M(M+m)}}.$$

Solución al problema 23

La colisión entre las dos esferitas es un proceso no elástico, por consiguiente, para el proceso de colisión sólo podemos usar la ley de conservación del momento lineal. Sea v_1 la velocidad de las dos masas unidas justo después de la colisión. La conservación del momento lineal nos da la relación

$$mv = (2m)v_1,$$

o sea, $v_1 = v/2$. Luego las dos masas permanecen unidas, el resorte se estira y el sistema queda en reposo cuando el resorte forma un ángulo θ con la normal (ver figura 6.17).

Una vez ocurrida la colisión, la energía se conserva. Aplicando la ley de conservación de energía al sistema que consiste de las dos esferitas y el resorte se obtiene

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2,$$

donde ΔL es el alargamiento que sufre el resorte. Este viene dado por

$$\Delta L = \sqrt{\ell_0^2 + (\ell_0 \tan \theta)^2} - \ell_0 = \ell_0 \left[\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right].$$

Despejamos v_1 de las dos últimas ecuaciones:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \ell_0 \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right).$$

Con $\cos \theta = \cos 60^\circ = 1/2$ se obtiene para v

$$v = 2v_1 = \ell_0 \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Solución al problema 24

Usando las relaciones que se encontraron en la sección 6.2 para el choque elástico se deduce inmediatamente que, después de la primera colisión, el carro A (de masa $2m$) tendrá la velocidad

$$v_A = \frac{2m - m}{2m + m}v_0 = \frac{v_0}{3}$$

mientras que la velocidad de B será

$$v_B = \frac{2(2m)}{2m + m}v_0 = \frac{4v_0}{3}.$$

El carro B tardará un tiempo

$$t_1 = \frac{L}{v_B} = \frac{3L}{4v_0}.$$

para colisionar con el carro C . Esta colisión también es elástica. Después de esta segunda colisión la velocidad de B será

$$\tilde{v}_B = \frac{m - 2m}{m + 2m}v_B = -\frac{v_B}{3} = -\frac{4v_0}{9}.$$

El signo negativo indica que B ahora se mueve hacia la izquierda, y por consiguiente, necesariamente debe colisionar denuevo con el carro A (que siguió moviéndose hacia la derecha con velocidad v_A).

Cuando B colisiona con C , la separación entre A y B es $L' = L - v_A t_1 = L - L/4 = 3L/4$. De ahí en adelante B se mueve hacia la izquierda con velocidad $\tilde{v}_B = -4v_0/9$, mientras que A sigue moviéndose hacia la derecha con velocidad $v_A = v_0/3$. La rapidez relativa con que se acercan es $v_r = v_0(4/9 + 1/3) = 7v_0/9$. La distancia L' será cubierta en un tiempo

$$t_2 = \frac{L'}{v_r} = \frac{3L}{4} \cdot \frac{9}{7v_0} = \frac{27L}{28v_0}.$$

El tiempo total que transcurre entre las dos colisiones de A con B es $t_1 + t_2$, es decir,

$$t_{\text{tot}} = t_1 + t_2 = \frac{12L}{7v_0}.$$

6.6. Colisión de dos discos

Un disco de radio R y masa m , que incide con velocidad v_0 , colisiona elásticamente con un disco de masa M y radio R , que inicialmente se encuentra en reposo. La colisión ocurre con un parámetro de impacto b (ver figura 6.20). Encuentre el ángulo

de dispersión θ del disco incidente. Suponga que no hay fricción entre los discos y la superficie sobre la que se deslizan, y que tampoco hay roce entre los bordes de los discos mientras estos colisionan. En el lado izquierdo de la figura 6.20 se muestra la situación (vista por un observador para el cual inicialmente la partícula M está en reposo) antes de la colisión y al lado derecho la situación que se tiene después de la colisión.

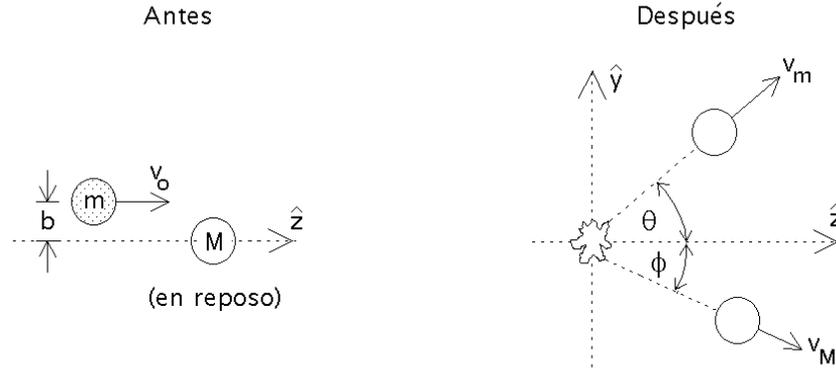


Figura 6.20

Solución analítica:

Al no haber roce entre los bordes de los dos discos mientras colisionan, la fuerza de interacción entre los discos necesariamente será perpendicular al perímetro, o sea, en la dirección radial. Sea \hat{z} la dirección definida por la velocidad del disco incidente. De la figura 6.21 se desprende que el disco M , que inicialmente está en reposo, después de la colisión se moverá formando un ángulo ϕ con respecto a \hat{z} , donde ϕ viene dado por

$$\sin \phi = \frac{b}{2R} . \quad (6.7)$$

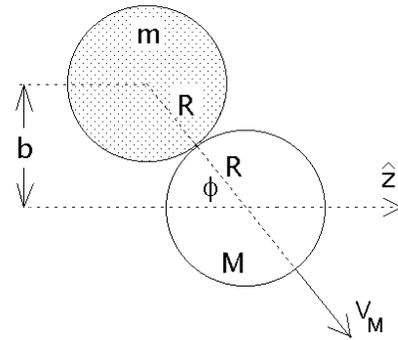


Figura 6.21

Sean v_m y v_M las rapidezces de los dos discos después de la colisión. La conservación del momento lineal tanto en la dirección \hat{y} como en la dirección \hat{z} nos da las ecuaciones

$$M v_M \sin \phi = m v_m \sin \theta \quad (6.8)$$

y

$$m v_0 = M v_M \cos \phi + m v_m \cos \theta . \quad (6.9)$$

El principio de la conservación de la energía (recordemos que el choque es elástico) nos entrega la relación

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 . \quad (6.10)$$

En las ecuaciones (11.2), (11.3) y (11.4), las incógnitas son v_m , v_M y θ .

Despejemos v_M de la ecuación (11.2) y sustituyámosla en las ecuaciones (11.3) y (11.4). De esta manera se obtienen las relaciones

$$m v_0 = m v_m \cos \theta + \left(m v_m \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right) \cos \phi , \quad (6.11)$$

y

$$M m v_0^2 = M m v_m^2 + \left(m v_m \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right)^2 , \quad (6.12)$$

respectivamente. Reordenando las dos últimas ecuaciones, éstas pueden escribirse de la forma

$$v_0 = v_m \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right) , \quad (6.13)$$

y

$$v_0^2 = v_m^2 \left(1 + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} \right) . \quad (6.14)$$

Elevando al cuadrado la penúltima ecuación y luego dividiéndola por la ecuación (11.7), se obtiene

$$\left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right)^2 = 1 + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} . \quad (6.15)$$

A partir de esta ecuación, usando relaciones trigonométricas elementales se obtiene

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} + \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} &= 1 + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} , \end{aligned}$$

$$2 \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} + \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} = \sin^2 \theta + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} .$$

Multiplicando por $\sin^2 \phi$ y dividiendo por $\sin^2 \theta$ queda

$$2 \cos \phi \sin \phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \cos^2 \phi = \sin^2 \phi + \frac{m}{M} ,$$

$$\frac{\sin(2\phi)}{\tan \theta} = -\cos(2\phi) + \frac{m}{M} ,$$

de donde finalmente

$$\tan \theta = \frac{\sin(2\phi)}{\frac{m}{M} - \cos(2\phi)} . \quad (6.16)$$

La última ecuación da el ángulo de dispersión de la partícula incidente en función de ϕ , ángulo que a su vez está determinado si se conoce el parámetro de impacto b (ver ecuación (11.1)).

Analicemos brevemente dos casos límites:

i) Límite $M \rightarrow \infty$.

Cuando la masa del “blanco” es extremadamente grande comparada con la masa del disco incidente, entonces el disco M no se moverá y la colisión será *especular*. Cuando la dispersión es especular, el ángulo de rebote del disco m respecto a la normal es igual al ángulo incidente. De la figura 6.21 se observa de inmediato que en ese caso la relación entre el ángulo de dispersión y el ángulo ϕ es

$$\theta = \pi - 2\phi . \quad (6.17)$$

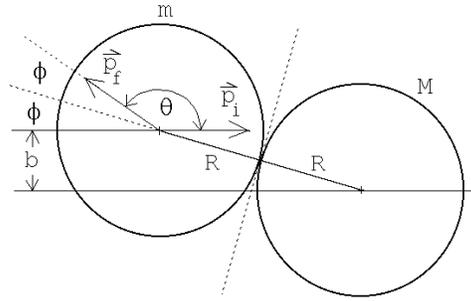


Figura 6.22

Demostremos que se obtiene el mismo resultado a partir de la ecuación (6.16). Para $M \rightarrow \infty$ ésta queda

$$\tan \theta = -\tan(2\phi) . \quad (6.18)$$

Pero

$$-\tan(2\phi) = \tan(\pi - 2\phi) ,$$

luego

$$\tan \theta = \tan(\pi - 2\phi) . \quad (6.19)$$

De la última ecuación se desprende inmediatamente el resultado (6.17).

ii) Límite $M = m$.

Cuando $M = m$ entonces la ecuación (6.16) queda

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin(2\phi)}{1 - \cos(2\phi)} \\ &= \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{1 - \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \\ &= \cot \phi \end{aligned} \quad (6.20)$$

De esta última relación se desprende que

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2} . \tag{6.21}$$

Este es un resultado general: siempre que colisiona un objeto elásticamente con otro de igual masa que inicialmente está en reposo, la suma de los ángulos de dispersión de ambos objetos será de 90° .

Solución gráfica

Demostremos ahora el resultado dado por la ecuación (6.16) usando un método gráfico.

La figura 6.23 muestra los discos antes y después de la colisión vistos desde dos sistemas de referencia distintos: el sistema del laboratorio (en que M inicialmente está en reposo) y el sistema de coordenadas fijo al *centro de masas*. A pesar de que el concepto de *centro de masas* se estudiará recién en el siguiente capítulo, para resolver el presente problema basta con saber que el sistema de referencia del centro de masas corresponde al referencial de un observador que se mueve con velocidad uniforme respecto al laboratorio y para el cual el momento lineal total antes de la colisión es nulo. Tal sistema de referencia es igual al del laboratorio, un sistema de referencia inercial, es decir, en él también se cumplen las leyes de Newton.

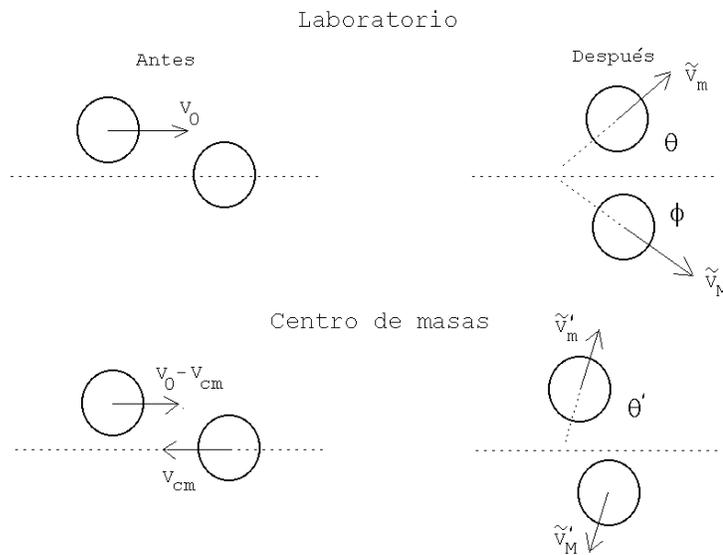


Figura 6.23

Notación: Para hacer más transparente lo que sigue, a las magnitudes físicas, cuando éstas estén medidas (observadas) desde el sistema de referencia del centro de masas, le agregaremos una prima. A las magnitudes después de la colisión les agregaremos adicionalmente una tilde.

El momento lineal se conserva para ambos observadores. En particular, para el observador en el sistema de referencia del centro de masas, el momento total de las partículas siempre es nulo (en efecto, ésta será, como veremos en el siguiente capítulo, la definición del *sistema de referencia del centro de masas*).

Resolvamos primero el problema para el observador del centro de masas. Tal como se mencionó en el párrafo anterior, los momentos lineales de los discos, en todo instante, en particular antes y después de la colisión, deben ser de igual magnitud pero apuntar en sentidos contrarios. Si la colisión es elástica entonces, además, las magnitudes del momento lineal, antes y después de la colisión, deben ser iguales. O sea, medidos desde el CM, los momentos lineales de los dos discos, antes y después de la colisión, tienen todos la misma magnitud. Si los cuatro vectores tienen la misma magnitud, las puntas de estos vectores deben estar ubicados todos sobre un círculo (ver figura 6.24).

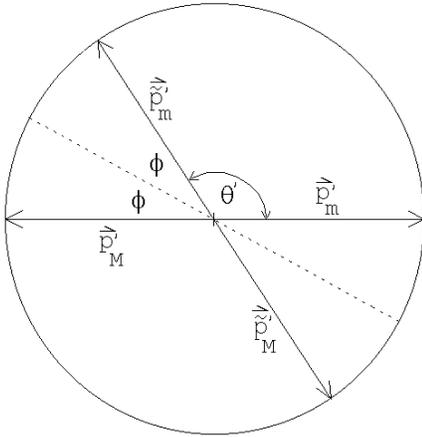


Figura 6.24

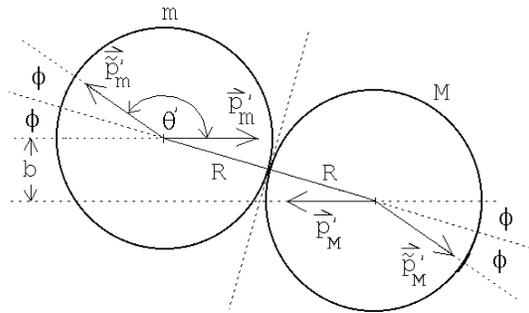


Figura 6.25

En el sistema de referencia del centro de masas es fácil determinar los ángulos de dispersión de los dos discos. Cuando no hay roce, la fuerza, y por consiguiente, el cambio de momento lineal de cada disco, debe ser perpendicular a la superficie de contacto. De la afirmación anterior es fácil deducir que la colisión (vista desde el CM) será especular (ver figura 6.25). De las figuras 6.24 y 6.25 se deduce que el ángulo de

dispersión de m viene dado por

$$\theta' = \pi - 2\phi \quad , \quad (6.22)$$

donde $\sin \phi = b/(2R)$.

Volvamos al sistema de referencia del laboratorio. Para pasar del sistema de referencia del centro de masas al del laboratorio, debemos sumar a todas las velocidades la velocidad del movimiento relativo entre los dos observadores (esto es, la velocidad del centro de masas). Para realizar esto gráficamente debemos primero transformar la figura 6.24, que es un gráfico de momentos lineales, a una de velocidades. Pero, para transformar momentos lineales en velocidades basta con dividir a los vectores momento lineal correspondientes a cada partícula por su masa. Si los dos discos no tienen la misma masa, entonces los vectores de velocidad de las partículas ya no quedarán sobre el mismo círculo. Supongamos que M es mayor que m , entonces los vectores velocidad correspondientes a la masa M serán menores que los del disco m y, en este caso, se obtiene una representación gráfica como la mostrada en la figura 6.26).

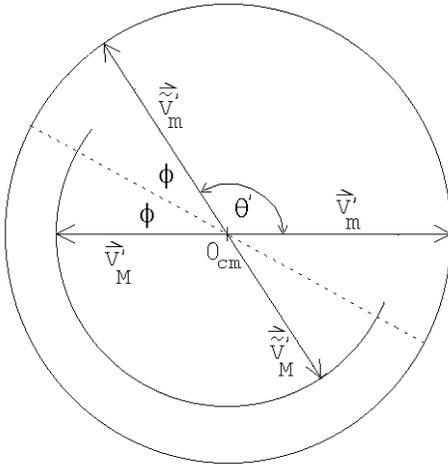


Figura 6.26

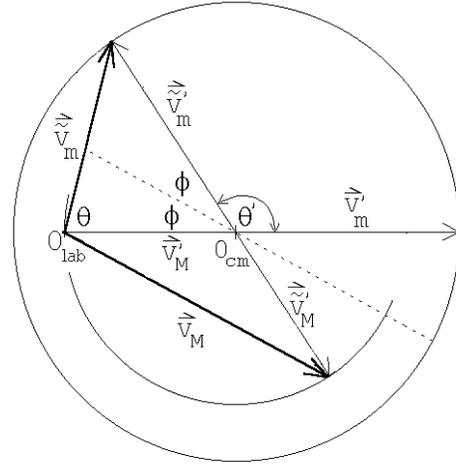


Figura 6.27

Elijamos como unidad de magnitud para medir las rapidezces a la rapidez que la partícula m tiene en el sistema de referencia del centro de masas, o sea, la rapidez (medida desde el sistema de referencia del centro de masas) de la partícula m , tanto antes como después de la colisión, es 1. La rapidez de la partícula M , en esas unidades, es m/M .

Como ya hemos mencionado, para pasar del sistema de referencia del centro de masas al sistema del laboratorio, debemos sumarle a todos los vectores velocidad del diagrama 6.26, la velocidad relativa de los dos observadores (que es $-\vec{v}_M$).

En lugar de sumar un vector constante a todos los vectores de un gráfico resulta más cómodo simplemente mover el origen en la dirección contraria en esa misma magnitud. Trasladando el origen en la cantidad \vec{v}'_M se obtiene la figura 6.27. Cuando los vectores velocidad se observan desde el sistema de centro de masas debe usarse el origen O_{cm} , mientras que si esto se realiza desde el sistema de referencia del laboratorio, hay que usar el origen O_{lab} .

A partir de la figura 6.27 es fácil determinar el ángulo de dispersión θ . La figura 6.28 muestra el detalle del triángulo relevante. Se tiene:

$$a = \tilde{v}'_m \sin(2\phi) = \sin(2\phi)$$

$$b = v'_M - \tilde{v}'_m \cos(2\phi) = \frac{m}{M} - \cos(2\phi)$$

y

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin(2\phi)}{\frac{m}{M} - \cos(2\phi)} .$$

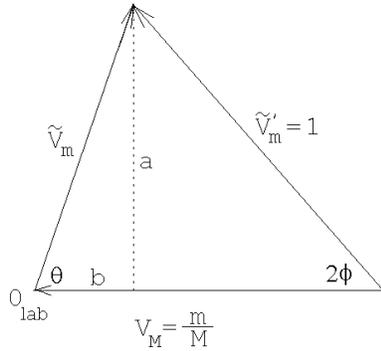


Figura 6.28

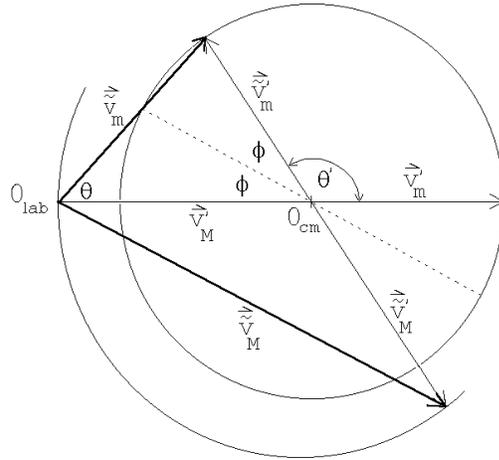


Figura 6.29

Esta última ecuación coincide con el resultado que habíamos obtenido anteriormente en forma analítica (ver ecuación (6.14)).

Si $M < m$, entonces el punto O_{cm} cae fuera del círculo original (ver figura 6.29). Note que en este caso el ángulo de dispersión θ siempre será menor que un valor máximo dado por

$$\sin \theta_{max} = \frac{M}{m} .$$

Problema:

Considere una partícula de masa m y velocidad v_0 que colisiona con otra partícula de masa m , inicialmente en reposo. La energía cinética de la partícula incidente es $E_0 = mv_0^2/2$. La partícula # 2 emerge de manera que su vector velocidad forma un ángulo de 45° (medido en el sistema de referencia del laboratorio) con respecto a la dirección incidente. Además de esta información se sabe que el choque es inelástico, siendo $Q = 0,18 E_0$ la energía que desaparece del movimiento relativo (iéndose a los grados de libertad internos del sistema, transformándose, por ejemplo, en calor). Encuentre gráficamente los ángulos (hay dos soluciones) en que emerge la partícula # 1.

Capítulo 7

Torque, centro de masas y equilibrio

versión 3 enero 2011

Hasta el momento, hemos sido capaces de describir la evolución de sistemas físicos basados exclusivamente en el concepto de partícula. De hecho, hemos visto que, en más de un sentido, existe un punto especial, el centro de masas, tal que un cuerpo, por complejo que sea, puede ser considerado como una partícula en que toda la masa está concentrada en el centro de masas. Pero evidentemente reemplazar un sistema complicado por una única partícula puede ser correcto en algunos contextos, pero no en todos. *Alguna* diferencia debe hacer que tengamos una partícula, una esfera o un elefantes de masa M . En este capítulo comenzaremos a examinar las consecuencias de que los cuerpos tengan estructura, y no sean sólo partículas puntuales. Una primera diferencia evidente es que, si colocamos una partícula puntual sobre una mesa, por ejemplo, siempre quedará en reposo. Pero si colocamos un lápiz, no siempre es así, y dependerá de hecho de la manera en que coloquemos el lápiz sobre la mesa. Por tanto, el primer problema que abordaremos es el del *equilibrio* de cuerpos con estructura. Para ello, sin embargo, deberemos introducir nuevos conceptos tales como el torque y el producto vectorial.

7.1. Producto vectorial

Definamos una nueva operación entre dos vectores, llamada *producto vectorial* o *producto cruz*.

Definición:

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores. Entonces definimos el vector \vec{C} , que es el producto vectorial de \vec{A} y \vec{B} , por:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \gamma \hat{C}, \quad (7.1)$$

donde γ es el ángulo (más pequeño) entre los dos vectores \vec{A} y \vec{B} , y \hat{C} es un vector unitario perpendicular al plano engendrado por los vectores \vec{A} y \vec{B} .

Hay dos vectores unitarios que son perpendiculares al plano engendrado por los vectores \vec{A} y \vec{B} . Por convención debe usarse el que se obtiene usando la *regla de la mano derecha*.

Regla de la mano derecha: Empuñe la mano y estire el dedo pulgar. Oriente los dedos empuñados de manera que apunten a lo largo del ángulo γ (desde \vec{A} hacia \vec{B}); entonces el pulgar indica la dirección y sentido del vector \vec{C} .

De la definición se desprende que el producto cruz de dos vectores es otro vector. Notemos que la definición del vector \vec{C} es independiente de cualquier sistema de coordenadas. Es inmediato que

$$\begin{aligned}\hat{x} \times \hat{x} &= \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0, \\ \hat{x} \times \hat{y} &= -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}, \\ \hat{y} \times \hat{z} &= -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}\end{aligned}$$

y

$$\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}.$$

Una característica importante del producto cruz es que no es conmutativo, sino anti-conmutativo; en efecto, de la definición se observa inmediatamente que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

El producto cruz es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad .$$

y

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C} \quad .$$

Evaluemos el producto cruz entre los dos vectores \vec{A} y \vec{B} en términos de sus coordenadas. Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z},$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \times \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \times \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \times \hat{z} + A_y B_x \hat{y} \times \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \times \hat{y} + \\ &\quad + A_y B_z \hat{y} \times \hat{z} + A_z B_x \hat{z} \times \hat{x} + A_z B_y \hat{z} \times \hat{y} + A_z B_z \hat{z} \times \hat{z} \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} + (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y}\end{aligned} \quad (7.2)$$

Observemos que la expresión anterior se puede calcular rápidamente notando que el producto cruz es *cíclico*, en el siguiente sentido:

$$\begin{matrix} \vec{x} & = & \vec{x} & = & \vec{x} \\ x \dashrightarrow & y \longrightarrow & z & y \dashrightarrow & z \longrightarrow & x & z \dashrightarrow & x \longrightarrow & y \end{matrix}$$

De manera que simplemente tomando el orden alfabético y aplicando permutaciones cíclicas, se obtiene el producto cruz entre dos coordenadas cualesquiera. Si las coordenadas entre las cuales se calcula el producto cruz no están en orden cíclico, entonces el resultado es con signo opuesto.

Lo anterior nos permite calcular rápidamente una componente cualquiera del producto cruz entre dos vectores en coordenadas cartesianas. Es evidente, entonces, que la componente z del producto cruz entre \vec{A} y \vec{B} es $A_x B_y - A_y B_x$, sin necesidad de hacer la expansión en coordenadas cartesianas. Se puede así reobtener (7.2) de modo expedito.

Es interesante notar lo siguiente: considere el paralelogramo engendrado por dos vectores \vec{A} y \vec{B} (ver figura 7.1). De (11.15) es claro que el área de tal paralelogramo viene dada por

$$\text{Área} = |\vec{A} \times \vec{B}|.$$

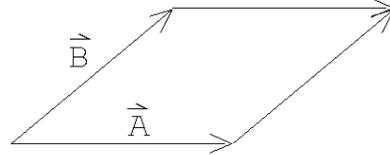


Figura 7.1

Ilustremos el uso del producto cruz con dos problemas.

Problema 1: Sean $P_1 = (2,1,5)$, $P_2 = (5,2,8)$ y $P_3 = (4,8,2)$ las coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule su área.

Solución: El vector que une los puntos P_1 y P_2 es

$$\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z},$$

mientras que el vector que une los puntos P_1 y P_3 es

$$\vec{B} = 2\hat{x} + 7\hat{y} - 3\hat{z}.$$

Ahora observe que el módulo del producto vectorial de los vectores \vec{A} y \vec{B} es igual al doble de área del triángulo, por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Área del } \triangle &= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{2} | -24\hat{x} + 15\hat{y} + 19\hat{z} | \simeq 17,04 \end{aligned}$$

Notemos entonces que, dados tres puntos, el producto cruz nos permite determinar rápidamente si tres puntos son colineales (si lo fueran, el producto cruz de los vectores \vec{A} y \vec{B} calculados sería cero, pues ellos serían paralelos), y el área del triángulo que forman en caso que no lo sean. Ambas preguntas no serían tan sencillas de responder si no conociéramos el concepto de producto cruz.

Problema 2: Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores unitarios en el plano x, y , que forman ángulos $-\alpha$ y β con el eje \hat{x} , respectivamente (ver figura 7.2). Evalúe el producto cruz de estos vectores de dos maneras, una vez usando la definición y la segunda vez usando la expresión en términos de las coordenadas cartesianas, y de esta manera encuentre una expresión para $\sin(\alpha + \beta)$.

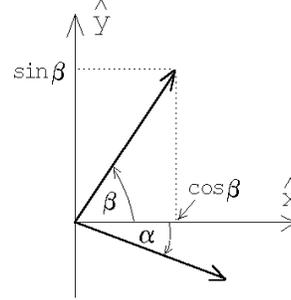


Figura 7.2

Solución: El ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} es $\alpha + \beta$, luego

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| |\sin(\alpha + \beta)| = \sin(\alpha + \beta).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}| &= |(\cos \alpha \hat{x} - \sin \alpha \hat{y}) \times (\cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y})| \\ &= |(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \hat{z}| = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores concluimos que

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.$$

Ejercicios:

1. Encuentre un vector unitario \hat{A} que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\vec{u} = 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$ y $\vec{v} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$. ¿Cuántos vectores unitarios \hat{A} existen con esta propiedad?
2. Sea $\vec{A} = \hat{x} + 3\hat{z} - 2\hat{y}$. Encuentre un vector en el plano \hat{x}, \hat{y} que sea perpendicular a \vec{A} .
3. Verifique la expansión del producto vectorial triple:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

por expansión directa en coordenadas cartesianas.

4. Considere los vectores $\vec{A} = \hat{x} + \hat{y}$, $\vec{B} = \hat{y} + \hat{z}$ y $\vec{C} = \hat{x} - \hat{z}$.
- Evalúe el producto escalar triple $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$.
 - Evalúe $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.
5. Encuentre un vector que sea perpendicular al plano que pasa por los puntos $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, 2, 3)$ y $P_3 = (2, 3, 1)$.
- Respuesta: $\vec{C} = \alpha(-4\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z})$ con α un número real no nulo.
6. Encuentre un vector que apunte a lo largo de la intersección de los planos engendrados por los vectores $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{B} = \hat{x} - 3\hat{y}$ y $\vec{C} = \hat{z} + 2\hat{x} - \hat{y}$, $\vec{D} = \hat{y} + 2\hat{z}$, respectivamente.

Problema resuelto en clases: 7.2

7.2. Torque

Hasta el momento sabemos describir el movimiento de partículas, y sabemos que los objetos, aunque sean extendidos, se pueden considerar como partículas. De hecho, la fuerza total sobre un objeto es igual al cambio de momentum del centro de masas, como si toda la masa estuviera concentrada en él. Pero evidentemente no puede ser *completamente* equivalente un cuerpo extendido que una única partícula. Analicemos por ejemplo la siguiente situación.

Consideremos un objeto (por ejemplo, una barra) que en cierto instante se encuentra en reposo. Que la fuerza total sobre la barra sea nula, y por lo tanto (usando la segunda ley de Newton) su aceleración sea nula, no significa que ésta no empezará a moverse.

Una situación de ese tipo se muestra en la figura 7.3. La fuerza total (es decir, la suma vectorial de las dos fuerzas aplicadas sobre la barra) es nula y efectivamente la barra como un todo no se trasladará; sin embargo, las dos fuerzas paulatinamente harán que la barra rote.

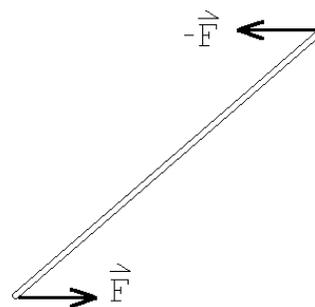


Figura 7.3

De hecho, es claro que no sólo importa la magnitud y dirección de las fuerzas, sino también *dónde* están aplicadas. En efecto, si las fuerzas están aplicadas como se indica en la Fig. 7.3, la barra comenzará a girar. Pero si las mismas dos fuerzas se aplican en el centro de la barra, entonces no sólo el centro de masas no acelera, sino que la barra no gira tampoco.

El ejemplo anterior nos muestra que, para describir completamente el comportamiento del objeto, el concepto de fuerza por sí sólo no basta, y es necesario introducir algún concepto nuevo que obviamente depende de la fuerza, pero también del lugar donde ésta se aplica.

Consideremos ahora la palanca mostrada en la figura 7.4. Ignoremos por un momento el peso de la palanca. ¿Qué fuerza debemos hacer para mantener la palanca en equilibrio? Ya en la antigüedad los griegos conocían la respuesta:

$$F = Mg \frac{x}{L} .$$

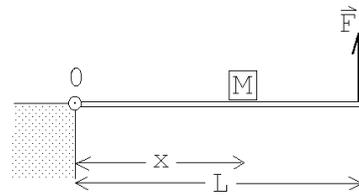


Figura 7.4

Resultados empíricos como los anteriores se pueden reunir en la así llamada *ley de las palancas*. Lo importante para nosotros, en este caso, es que nuevamente no sólo importa la fuerza aplicada (el peso de la masa M), sino el punto donde se aplica.

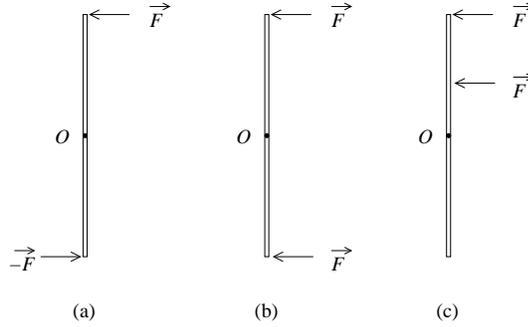
Para describir situaciones como las descritas en los ejemplos anteriores necesitamos introducir el concepto de torque.

Definición: El *torque* $\vec{\tau}$ que genera una fuerza \vec{F} respecto a un punto P es

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} ,$$

donde \vec{r} es el vector que va desde el punto P hasta el lugar donde se aplica la fuerza \vec{F} .

Para ganar un poco de intuición acerca de este concepto, consideremos nuevamente una situación como la Fig. 7.3. Consideremos una barra, fija a un pivote en su centro O .



Si ponemos el origen del sistema de coordenadas en el punto O , las únicas fuerzas que ejercen torque son las fuerzas indicadas, \vec{F} o $-\vec{F}$ según corresponda. Consideremos ahora el caso (a) ilustrado en la figura anterior. Cada fuerza ejerce el mismo torque respecto al punto O (pues tanto la fuerza como el vector posición cambian de signo, lo cual deja invariante el producto cruz). La dirección del torque ejercido por cada fuerza apunta en la dirección que sale del plano de la figura. Notemos, por otro lado, que en la situación (a) evidentemente la barra comenzará a girar. Si ponemos los dedos empuñados en el sentido de la rotación, el pulgar extendido apunta a lo largo del eje de giro, también en la dirección que sale del plano de la figura. Por tanto, la dirección del torque coincide con la dirección del eje de giro.

En la situación (b), en cambio, se aplican las mismas fuerzas en módulo, pero una ha cambiado de dirección. El torque ejercido por cada una de las fuerzas tiene igual módulo, pero signo opuesto, por tanto el torque total es cero. Y, por cierto, en (b) evidentemente la barra no debería girar.

Finalmente, en (c), hemos vuelto a una situación en que la barra puede girar, simplemente cambiando el punto de aplicación de una de las fuerzas, logrando de este modo que ambos torques tengan el mismo signo.

Todas estas observaciones nos permiten intuir que es el torque la magnitud responsable de hacer girar a los objetos. No es la fuerza: en los casos (b) y (c) tenemos las mismas fuerzas, pero aplicadas en puntos distintos, y es ésta la diferencia que hace que en un caso la barra gire y en el otro no.

Además, hemos aprendido que el torque apunta en la dirección del eje de giro y en el sentido dado por la regla de la mano derecha (si los dedos empuñados indican el sentido de la rotación entonces el pulgar extendido apunta a lo largo del eje de giro).

Claramente, el torque que ejerce una fuerza depende de la posición del punto (digamos Q) donde ésta se aplica y del punto (digamos P) respecto al cual estamos evaluando el torque. Una fuerza \vec{F} , respecto a puntos distintos, ejerce torques distintos. Y la misma fuerza, calculada respecto al mismo punto, pero aplicada en puntos distintos [como en los casos (b) y (c) del ejemplo anterior], también ejerce torques distintos.

Notemos, además, que lo único relevante para efectos de torque es la componente perpendicular de la fuerza al vector posición \vec{r} . Si las fuerzas en la figura anterior no

fueran perpendiculares, basta considerar sus componentes perpendiculares a la barra, y proseguir la discusión sólo en términos de ella.

También es interesante notar que, en ocasiones, es más útil calcular el torque como el producto de la fuerza por el *brazo*, como se explica en la siguiente figura.

En el objeto mostrado en la figura 7.5 se aplica una fuerza en el punto Q . La magnitud del torque se puede evaluar, como hemos dicho, multiplicando el tamaño de la fuerza por el brazo. El brazo es la distancia entre el punto P y recta que indica la dirección de \vec{F} que pasa por el punto Q . Con respecto al punto P_1 el módulo del torque producido por la fuerza \vec{F} es Fa , donde $F = |\vec{F}|$ y a es el brazo. El vector $\vec{\tau}$ apunta normal a la hoja de papel en dirección del lector (en la dirección de giro que tendría el objeto si pudiera girar en torno a P_1 , sólo debido a la acción de la fuerza \vec{F}). Respecto al punto P_2 el torque generado por la fuerza \vec{F} es nulo, ya que el brazo es nulo.

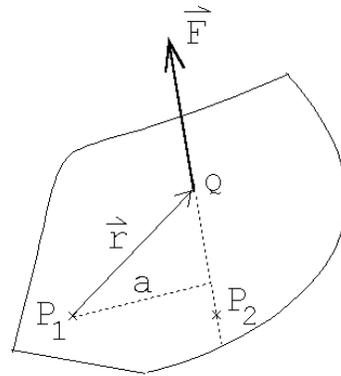


Figura 7.5

El conocimiento empírico que se tiene sobre palancas, y en general, sobre objetos en equilibrio (es decir, objetos que no aceleran ni comienzan a rotar) permite enunciar la siguiente ley:

Si el torque neto ejercido por las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, respecto a un punto P , es nulo, entonces el cuerpo no cambiará su estado rotacional (o sea, si no estaba rotando en torno a P , no comenzará a rotar en torno a ese punto y si estaba rotando con cierta velocidad angular, seguirá rotando con la misma velocidad angular).

Notemos que el enunciado anterior es análogo a la segunda ley de Newton, reemplazando fuerza por torque y velocidad por velocidad angular.

Ejercicio: Demuestre que para la situación mostrada en la figura 7.4, el torque neto, en torno al punto O , ejercido por las tres fuerzas que actúan sobre la palanca, es nulo. (Ignore el peso de la palanca.)

7.3. Centro de masas

La evaluación del torque debido al peso de un objeto se simplifica considerablemente si se introduce el concepto de *centro de masas*, ya mencionado en capítulos anteriores.

Consideremos dos masas m_1 y m_2 , unidas por una barra de masa despreciable, dentro de un campo gravitacional $\vec{g} = -g\hat{z}$. Evaluemos el torque neto debido al peso de las masas en torno al punto P .

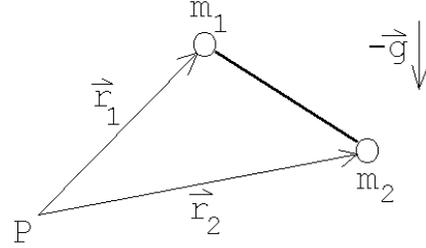


Figura 7.6

Tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r}_1 \times (-m_1 g \hat{z}) + \vec{r}_2 \times (-m_2 g \hat{z}) \\ &= \frac{(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{M} \times (-M g \hat{z})\end{aligned}$$

Sea $M = m_1 + m_2$ y definamos

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) ,$$

entonces

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{\text{cm}} \times (-M g \hat{z}) .$$

O sea, una vez conocido el vector de posición del centro de masas \vec{r}_{cm} , podemos evaluar el torque debido a la fuerza de gravedad suponiendo que la masa total del objeto se encuentra en ese lugar.

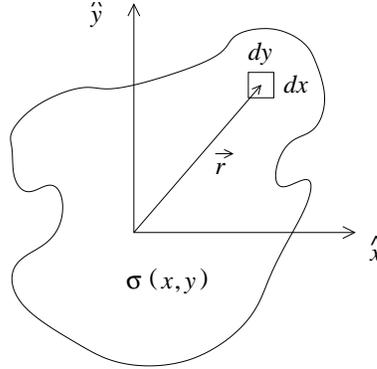
El concepto *centro de masas* ha aparecido en varias oportunidades, y nuevamente aparece ahora como un punto privilegiado. Analicemos con un poco más de profundidad algunas de sus propiedades.

Para N masas discretas $\{m_j\}_j$ en los lugares $\{\vec{r}_j\}_j$, la posición del centro de masas viene dada por

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j ,$$

con $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$.

Consideremos ahora el caso de una distribución continua de masa, por ejemplo, una lámina:



Consideremos, como muestra la figura, una lámina ubicada sobre el plano x - y . Dividamos la lámina en N pequeños cuadraditos de ancho dx y alto dy . Si estos cuadraditos (técnicamente, *elementos de superficie*) son suficientemente pequeños, entonces deberíamos ser capaces de cubrir toda el área de la lámina con ellos. Cada elemento de superficie tiene un área $dx dy$, y por tanto una masa $\sigma(\vec{r}_i) dx dy$, donde $\sigma(\vec{r}_i)$ es la densidad superficial de masa en el punto $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$.¹ Entonces el centro de masas se puede calcular como:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma(\vec{r}_i) \vec{r}_i dx dy}{\sum_{i=1}^N \sigma(\vec{r}_i) dx dy} .$$

En el límite en que los elementos de superficie son infinitamente pequeños, la suma discreta sobre i se convierte en una integral sobre la variable continua \vec{r} . \vec{r} recorre todos los puntos del espacio necesarios para cubrir toda la lámina, y podemos por tanto escribir:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_{\text{lámina}} (x\hat{x} + y\hat{y}) \sigma(x, y) dx dy ,$$

donde M es la masa total de la lámina, que se puede calcular como

$$M = \int_{\text{lámina}} (x\hat{x} + y\hat{y}) \sigma(x, y) dx dy .$$

En el caso de un cuerpo sólido, con volumen, de densidad $\rho(x, y, z)$, podemos dividirlo en cubos de aristas dx , dy y dz , y el mismo análisis anterior nos indica que la posición del centro de masas viene dada por

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_{\text{cuerpo}} \vec{r} \rho(x, y, z) dx dy dz ,$$

con

$$M = \int_{\text{cuerpo}} \vec{r} \rho(x, y, z) dx dy dz .$$

¹Normalmente, se denotan por λ a las densidades lineales, σ a las densidades superficiales y ρ a las densidades volumétricas.

Las integrales que han aparecido en las expresiones anteriores son integrales en dos y tres dimensiones, que no hemos encontrado antes. Más adelante en el curso tendremos que introducir técnicas para calcularlas. De momento, sólo nos interesa dejar el mensaje de que, si tenemos distribuciones continuas de masa, podemos discretizar la distribución y calcular el centro de masas de la nueva distribución, discreta, de masas. Las integrales en dos y tres dimensiones que hemos mostrado no son sino una notación matemática conveniente para describir ese proceso, y en la Sec. 7.4 veremos un ejemplo de cálculo numérico del centro de masas basado en este proceso límite. Salvo dicho ejemplo, por ahora bastará con saber calcular el centro de masas de cuerpos con distribuciones uniformes y ejes de simetría, y para ellos es conveniente revisar los siguientes ejercicios, que se refieren a importantes propiedades del centro de masas.

Ejercicios:

1. A pesar de que el vector centro de masas \vec{r}_{cm} depende del origen que se elija para evaluarlo, la posición del centro de masas es independiente de la elección del origen.

Sea \vec{r}_{cm} el vector posición del centro de masas de un objeto evaluado usando un sistema de referencia cuyo origen es O y \vec{r}'_{cm} el resultado que se obtiene usando otro sistema de coordenadas cuyo origen es O' . Demuestre que

$$\vec{r}_{cm} = \vec{r}'_{cm} + \vec{a} ,$$

donde \vec{a} es el vector que une los dos orígenes.

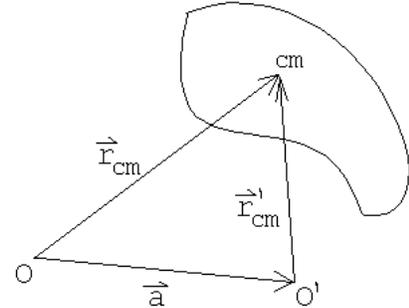


Figura 7.7

2. Considere un sistema que consiste de dos masas m y M puntuales separadas por una distancia a . Demuestre que la posición del centro de masas del sistema se ubica sobre la recta que las une, encontrándose más cercano a la masa mayor.
3. Considere tres masas $m_1 = m_0$, $m_2 = 3m_0$ y $m_3 = 6m_0$, ubicadas en los lugares

$$\vec{r}_1 = \hat{x} + 3\hat{y} , \quad \vec{r}_2 = -\hat{x} + 2\hat{z} \quad \text{y} \quad \vec{r}_3 = 5\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z} ,$$

respectivamente. Encuentre la posición del centro de masas usando los dos procedimientos siguientes:

- a) Usando la fórmula

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_j m_j} .$$

- b) Encontrando primero el centro de masas del subsistema formado por las partículas 1 y 2 solamente y luego encontrando el centro de masas de este subsistema con la partícula # 3.
- c) Demuestre que, en general, para un sistema de N masas, el centro de masas se puede encontrar determinando primero el centro de masas de $N - 1$ masas, $\vec{r}_{\text{cm}}^{(N-1)}$, y luego evaluando el centro de masas de dos “partículas”: la partícula N -ésima, y una “partícula” de masa $\sum_{i=1}^{N-1} m_i$ ubicada en $\vec{r}_{\text{cm}}^{(N-1)}$.
4. Convéznase de que si un objeto tiene ejes y planos de simetría, entonces el centro de masas se ubica en tales planos y ejes. Por ejemplo, de acuerdo a este resultado, en una esfera, un cilindro recto, etc., el centro de masas se ubicará al centro de tales objetos.

Problema resuelto en clases: 7.4

7.4. Evaluación numérica del centro de masas de un semicírculo

Problema: Encontrar numéricamente el centro de masas de una lámina semicircular de radio R y densidad superficial uniforme σ_0 .

Solución: Dividamos el semicírculo en N franjas de ancho $dz = R/N$ y luego aproximemos las franjas por rectángulos (ver figura 7.8). El centro de masa del rectángulo j se encontrará en el lugar

$$\vec{r}_j = \left(j dz - \frac{1}{2} dz \right) \hat{z} = \frac{R(j - 1/2)}{N} \hat{z} \quad j = 1, \dots, N \quad .$$

El área del rectángulo j viene dada por

$$\begin{aligned} A_j &= (\text{ancho}) \cdot (\text{largo}) \\ &= dz \cdot 2x_j \\ &= 2 \cdot \frac{R}{N} \cdot \sqrt{R^2 - R^2(j - 1)^2/N^2} \\ &= 2 \left(\frac{R}{N} \right)^2 \sqrt{N^2 - (j - 1)^2} \end{aligned}$$

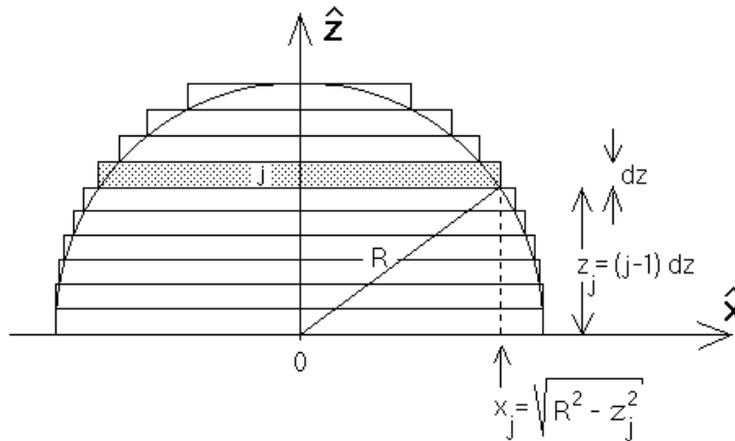


Figura 7.8

Encontremos ahora el centro de masas de los centros de masas de todos los rectángulos. Se tiene:

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_{cm} &= \frac{\sum_j \vec{r}_j \cdot (\text{masa de rectángulo } j)}{(\text{masa del semicírculo})} \\
 &= \sum_j \left(\frac{R(j-1/2)}{N} \hat{z} \sigma_0 2 \left(\frac{R}{N} \right)^2 \sqrt{N^2 - (j-1)^2} \right) \frac{1}{\sigma_0 \frac{1}{2} \pi R^2} \\
 &= \frac{4R}{\pi N^3} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{N^2 - (j-1)^2} (j-1/2) \right) \hat{z} \\
 &= f(N) R \hat{z} ,
 \end{aligned}$$

donde

$$f(N) \equiv \frac{4}{\pi N^3} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{N^2 - (j-1)^2} (j-1/2) \right) .$$

El valor exacto para \vec{R}_{cm} se obtiene para valores grandes de N .

Para valores de N no demasiado grandes podemos evaluar $f(N)$ con una calculadora (hágalo para $N = 1$ y $N = 2$ y compare su resultado con el de la tabla). Para valores grandes de N debemos hacer un pequeño programa y usar una computadora. Un pequeño programa en BASIC que permite evaluar $f(N)$ (para $N = 500$) es:

```

PI = 3.1415926
N = 500
S = 0
FOR J = 1 TO N
S = S + SQR(N*N - (J - 1)*(J - 1)) * (J - 0.5)
NEXT J
F = 4*S / (PI*N*N*N)
PRINT N , F
    
```

N	$f(N)$	Error relativo %
1	0.6366	50
2	0.5826	35
3	0.5344	26
5	0.4972	17
10	0.4642	9.4
20	0.4456	5.0
50	0.4334	2.1
100	0.4390	1.1
200	0.4268	0.56
500	0.4254	0.24
1000	0.42490	0.12
Exacto	0.4244	

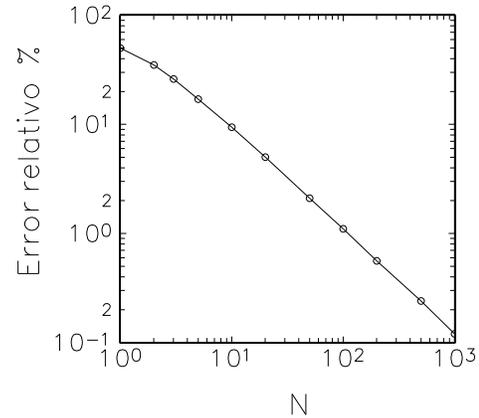


Figura 7.9

Los resultados que arroja este programa para distintos valores de N , se presentan en la tabla adjunta. Recurriendo al cálculo integral, es posible encontrar el resultado exacto, es decir, el valor de $f(\infty)$; éste resulta ser $4/(3\pi) = 0.4244\dots$. En la figura 7.9 se muestra un gráfico del error relativo entre el valor numérico y el valor exacto en función de N . A partir de $N = 100$ el error es menor que un 1 %.

Nota: El método numérico empleado aquí para resolver el problema no es el más eficiente. La bondad del método empleado radica en su simpleza.

Ejercicio: Use un procedimiento análogo para calcular la posición del centro de masas de una semiesfera de radio R y densidad de masa (uniforme) ρ_0 .

7.5. Equilibrio

Ahora que consideramos sistemas con estructura, las condiciones de equilibrio para un cuerpo deben ser reformuladas. En efecto, ya sabemos que un objeto o sistema inicialmente en reposo permanecerá en reposo si la fuerza neta sobre él es cero. Esto es en rigor cierto sólo para partículas puntuales. Cuando tenemos sistemas más complejos, lo anterior sólo asegura que el centro de masas permanece en reposo [ver Ec. (6.3)]. Pero eso no basta, porque el cuerpo aún podría girar respecto al centro de masas. Por lo tanto, para que un cuerpo esté en equilibrio debemos exigir, además, que el torque neto sobre él (calculado respecto a cualquier punto) sea también nulo.

Leyes de equilibrio:

Para que un cuerpo esté en equilibrio es necesario que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- i) La fuerza neta sobre el objeto debe ser nula.
- ii) El torque neto sobre el objeto debe ser nulo.

Consideremos un objeto (cuerpo rígido) formado por N masas $\{m_j\}$ ubicadas en los lugares $\{\vec{r}_j\}$ (respecto a un origen O) y unidas por barras rígidas sin masas (ver figura 7.10). Sea \vec{F}_j la fuerza externa que actúa sobre cada una de las masas m_j .

A continuación, usando esta figura, demostraremos dos resultados importantes:

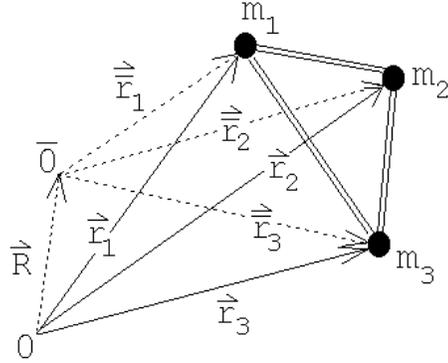


Figura 7.10

Si la fuerza neta sobre un cuerpo es cero entonces el torque neto es independiente del punto respecto del cual se evalúa. En particular, si el torque es nulo respecto a un punto, también lo será respecto a cualquier otro punto.

Demostración:

Sean $\{\vec{r}_j\}$ y $\{\vec{r}_j\}$ los vectores de posición de las masas $\{m_j\}$ respecto a un origen O y \bar{O} , respectivamente. Sea además \vec{R} el vector que une los puntos O y \bar{O} . Entonces

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau} &= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j \\
 &= \sum_j (\vec{R} + \vec{r}_j) \times \vec{F}_j \\
 &= \sum_j \vec{R} \times \vec{F}_j + \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j \\
 &= \vec{R} \times \sum_j \vec{F}_j + \vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{0} + \vec{\tau} = \vec{\tau}.
 \end{aligned}$$

El otro resultado importante es el siguiente:

Si la fuerza neta \vec{F}_{tot} que actúa sobre un cuerpo de masa M no es nula, entonces el punto del cuerpo que es acelerado de acuerdo a la segunda ley de Newton es el centro de masas. O sea, se tiene que:

$$\vec{F}_{tot} = M\ddot{\vec{r}}_{cm}.$$

Demostración:

En primer lugar notemos que las barras que unen las distintas masas en la figura 7.10 transmiten fuerzas. Sea \vec{F}_{ij} la fuerza que ejerce la masa m_j sobre la masa m_i . Debido al principio de acción y reacción $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$.

Por lo tanto, se cumplen las mismas condiciones del sistema estudiado en la Sec. 6.1, y por tanto podemos afirmar que (6.3) es válida.

En otras palabras, el lugar geométrico que cumple con la segunda ley de Newton es el centro de masas. O sea, para analizar el movimiento traslacional, toda la masa se puede pensar como si estuviese concentrada en el centro de masas, siendo ése también el lugar en que se aplica la fuerza neta. Se sigue entonces que si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es nula, entonces el centro de masas del cuerpo se traslada con velocidad uniforme (o nula).

Observemos finalmente que, para estudiar sistemas en equilibrio, no es necesario especificar el punto respecto al cual se está evaluando el torque neto, ya que, de acuerdo a los resultados expuestos anteriormente, si la fuerza neta es nula y el torque es nulo respecto a un punto, también lo será con respecto a cualquier otro punto.

Ilustremos el uso de las leyes del equilibrio resolviendo un problema.

Problema:

Una escalera de masa m y largo L se encuentra apoyada contra una pared lisa (o sea, no hay roce entre la escalera y la pared), formando un ángulo α con ella. Una persona de masa M se encuentra sobre la escalera. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de roce estático que debe existir entre el suelo y la escalera para que la escalera no resbale, independientemente de la altura a la que se encuentra la persona?

Solución:

Introduzcamos el sistema de coordenadas mostrado en la figura adjunta. Para que el sistema se encuentre en equilibrio, la fuerza total sobre la escalera debe ser nula. Hay cuatro fuerzas actuando sobre la escalera:

- i) El peso de la escalera $-mg\hat{z}$; esta fuerza se aplica en el centro de masas de la escalera.
- ii) El peso de la persona $-Mg\hat{z}$.
- iii) La reacción que ejerce la pared sobre la escalera. Como la pared es lisa (no hay roce) tal fuerza es perpendicular a la pared: $\vec{F}_p = -F_p\hat{x}$.
- iv) La reacción del suelo sobre la escalera. Esta es $\vec{F}_s = F_N\hat{z} + f_r\hat{x}$, donde F_N es la fuerza normal y f_r es la fuerza de roce.

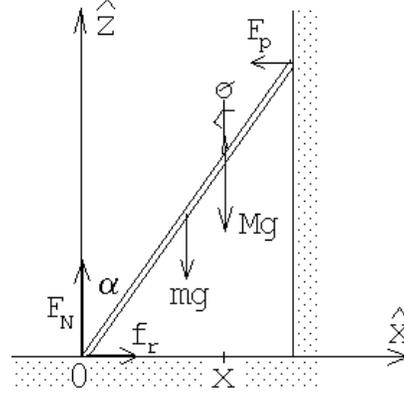


Figura 7.11

La condición de que la fuerza total sea nula nos da la relación:

$$-mg\hat{z} - Mg\hat{z} - F_p\hat{x} + F_N\hat{z} + f_r\hat{x} = \vec{0}.$$

De aquí se deducen las ecuaciones

$$F_N = (m + M)g \quad (7.3)$$

y

$$f_r = F_p. \quad (7.4)$$

Evaluemos el torque total en torno al origen. Como la escalera está en equilibrio, el torque neto debe ser nulo. Se tiene:

$$Mgx \hat{y} + mg\frac{L}{2} \sin \alpha \hat{y} - F_p L \cos \alpha \hat{y} = \vec{0},$$

o sea,

$$F_p = \frac{g(Mx + m\frac{L}{2} \sin \alpha)}{L \cos \alpha}. \quad (7.5)$$

De las ecuaciones (7.4) y (7.5) se encuentra que la fuerza de roce viene dada por

$$f_r = \frac{g(2Mx + mL \sin \alpha)}{2L \cos \alpha}.$$

El valor máximo de la fuerza de roce se obtiene cuando la persona sube hasta la parte más alta de la escalera ($x = L \cos \alpha$). En ese caso la fuerza de roce es

$$f_r = g \left(M + \frac{m}{2} \right) \tan \alpha.$$

La fuerza de roce f_r debe ser menor que el máximo posible, que es $\mu_e F_N$, o sea, se debe cumplir la relación

$$g \left(M + \frac{m}{2} \right) \tan \alpha \leq \mu_e F_N = \mu_e (M + m)g.$$

De aquí se deduce que el menor valor posible que puede tener μ_e para que la escalera no resbale es

$$\mu_e^{\min} = \frac{2M + m}{2(M + m)} \tan \alpha .$$

Problema resuelto en clases: 7.9 (opcional)

Problema resuelto en clases: 7.10

7.6. Problemas

1. Al moverse una carga q con velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético \vec{B} , actúa sobre la partícula una fuerza (la así llamada “Fuerza de Lorentz”) dada por

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) .$$

Supongamos que para determinar la dirección y magnitud de un campo magnético constante, un investigador realiza dos experimentos, midiendo en cada uno de ellos la fuerza que actúa sobre una carga:

- a) Primero hace pasar la carga q a través del campo magnético con velocidad $\vec{v} = v_0 \hat{x}$. El investigador mide una fuerza $\vec{F} = F_0 \cdot (2\hat{z} - 4\hat{y})$.
- b) Luego hace pasar la carga q con velocidad $\vec{v} = v_0 \hat{z}$, midiendo una fuerza $\vec{F} = F_0 \cdot (\hat{y} - 2\hat{x})$.

A partir de estos resultados encuentre el campo magnético \vec{B} (en función de v_0 , F_0 y q).

Respuesta:
$$\vec{B} = \frac{F_0}{qv_0} (\hat{x} + 2\hat{y} + 4\hat{z}) .$$

2. Considere una partícula cuya carga eléctrica y masa es q y m , respectivamente. La partícula se mueve en un campo magnético homogéneo $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Si en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen ($\vec{r}(0) = \vec{0}$) y su velocidad en ese instante es $\vec{v}(0) = v_0 \hat{x}$, encuentre el vector de posición $\vec{r}(t)$ en función del tiempo. (La fuerza que el campo magnético ejerce sobre la partícula viene dada por la fuerza de Lorentz ; ver problema anterior.) Indicación: recuerde lo que sabe sobre el movimiento circular uniforme.
3. Demuestre que la posición del centro de masas de una lámina triangular de densidad uniforme se ubica en el lugar donde se cortan las tres transversales de gravedad del triángulo.

4. En cinco de los seis vértices de un hexágono regular hay una masa m_0 . Encuentre la posición del centro de masas.

5. Encuentre la posición del centro de masas de una lámina de densidad (de masa) uniforme σ_0 y que tiene la forma indicada en la figura adjunta.

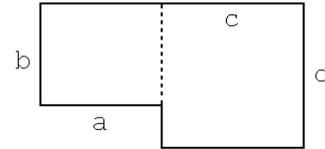


Figura 7.12

6. Encuentre la posición del centro de masas de un disco de densidad superficial σ_0 y que tiene un agujero circular como se indica en la figura adjunta.

Respuesta: El centro de masas del disco con agujero queda al lado opuesto de la perforación y a una distancia $a = r^2d/(R^2 - r^2)$ del centro del disco de radio R .

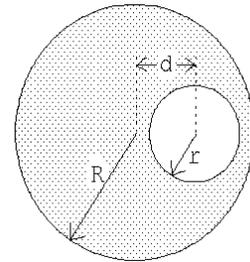


Figura 7.13

7. La figura muestra un letrero luminoso de masa m que cuelga de una barra (de masa despreciable) que se mantiene horizontal con la ayuda de una cuerda. Calcule la tensión de la cuerda y la fuerza ejercida por la barra contra la pared.

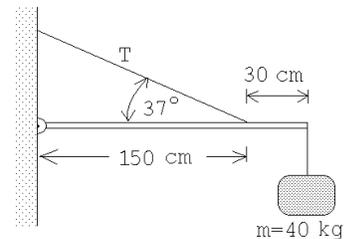


Figura 7.15

8. Considere una estructura formada por dos barras uniformes de largos a y b , unidas de modo que forman un ángulo recto y que cuelga con hilo desde el cielo (ver figura adjunta). Determine el ángulo α de la estructura cuando ella se encuentra en equilibrio.

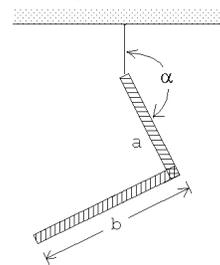


Figura 7.14

9. Describa un procedimiento que permita determinar experimentalmente la posición del centro de masas de una lámina plana irregular con densidad desconocida (y no necesariamente uniforme).

(Observe que al colgar un cuerpo de un punto P y estar éste en equilibrio, el centro de masas siempre debe estar sobre la normal que pasa por P .)

10. Una barra, cuya masa es de 10 Kg y tiene tres metros de largo, se dobla en 45° a 1 m de uno de los extremos y se cuelga como se indica en la figura adjunta. La estructura se encuentra en equilibrio gracias a una masa M que se cuelga en uno de los extremos.

- a) Encuentre la tensión T y el valor de M . ¿El equilibrio es estable o inestable?
- b) Conteste nuevamente las mismas preguntas de la parte a), pero asumiendo ahora que la barra al lado izquierdo, en lugar de estar doblada hacia abajo en 45° , está doblada hacia arriba en 45° .

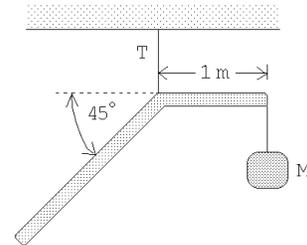


Figura 7.16

11. Considere una lámina triangular uniforme, de masa $M = 5$ Kg, que está sujeta a una pared con una articulación y colgada del cielo con una cuerda, tal como se muestra en la figura adjunta. Encuentre la tensión T de la cuerda.

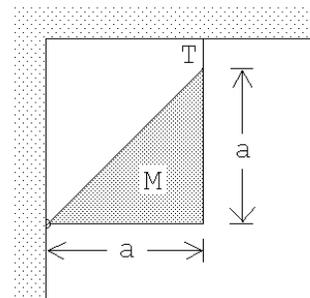
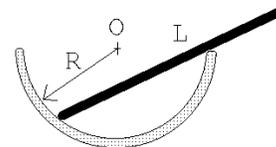


Figura 7.17

12. Encuentre la posición de equilibrio de una varilla de largo L colocada dentro de un pocillo. Considere al pocillo como una semiesfera de radio R y asuma que entre éste y la varilla no hay roce.



13. ¿Se podrá fomar una torre con ladrillos (suelos), uno encima de otro (ver figura), de manera que el ladrillo de más arriba esté desplazado en más de una unidad con respecto al de más abajo, sin que la torre se desplome?

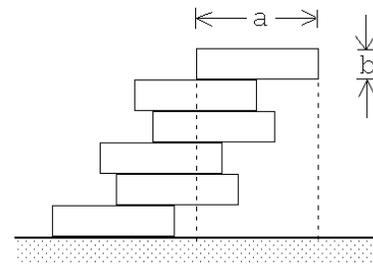


Figura 7.19

Indicación: Comience el análisis con los ladrillos superiores.

14. Tres tambores del mismo radio están arrumbados como se indica en la figura adjunta. Encuentre el mínimo coeficiente de roce estático que debe existir entre los tambores y también entre los tambores y el suelo de manera que el sistema no se derrumbe.

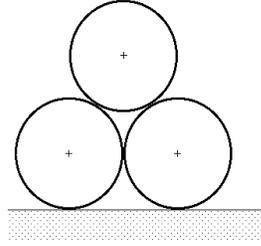


Figura 7.20

15. Un triángulo equilátero, de lado $a = 10$ cm y masa $M = 10$ kg se sujeta en forma rígida a una polea de radio $R = 4$ cm. El triángulo actúa de contrapeso para mantener en equilibrio a una masa $m = 1$ kg que cuelga de un hilo enrollado en la polea (ver figura 7.18)

- a) Encuentre el valor del ángulo β que mantiene el sistema en equilibrio. (β es el ángulo entre la normal y la altura del triángulo.)
- b) ¿Cuál es el máximo valor de m para el cual el sistema se mantendrá en equilibrio?

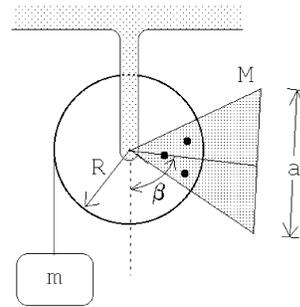


Figura 7.21

16. De una pieza metálica cuadrada, de densidad superficial uniforme σ_0 , se recorta un triángulo isósceles de manera tal que la lámina resultante quede en equilibrio en cualquier posición si se sujeta desde el punto P . ¿Cuál es la altura del triángulo?

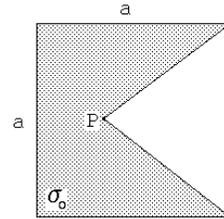


Figura 7.22

17. Una barra de masa M y largo L , que puede pivotar libremente en torno a O , se mantiene en equilibrio con una masa m y una cuerda, tal como se muestra en la figura adjunta. Encuentre el ángulo α para el caso en que $m/M = 0.5$. ¿El equilibrio es estable o inestable?

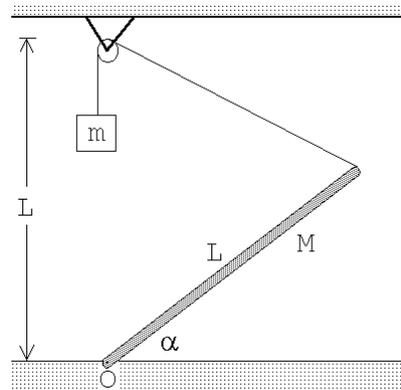


Figura 7.23

18. Considere un puente cuyo armazón consiste de 14 soportes de largo a . (En la figura se observan los 7 soportes de uno de los lados.) Asuma que los soportes sólo transmiten fuerzas a lo largo de ellos, o sea, en cada unión sólo se transmiten fuerzas y no torques. Encuentre la tensión adicional (al generado por el peso del puente) que debe soportar cada soporte si por el centro del puente pasa un camión de peso W .

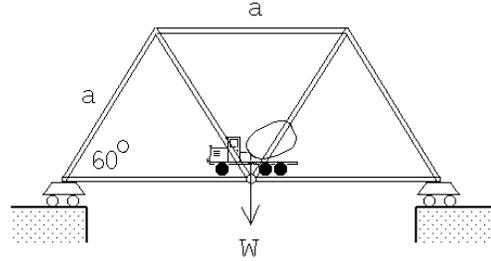


Figura 7.24

Especifique en cada caso si la tensión es de compresión o de tracción.

19. Una cadena de masa M y largo L se encuentra apoyada (en equilibrio) sobre un cono recto cuyo ángulo entre la normal y el manto es α . Encuentre la tensión de la cadena. Indicación: Aplique las leyes de equilibrio a un pequeño trozo (infinitesimal) de cadena.

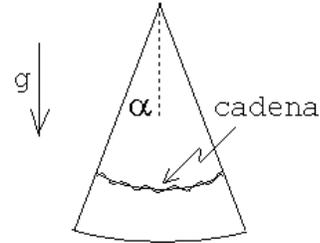


Figura 7.25

20. Un objeto formado por tres láminas cuadradas de lado a , homogéneas y de igual densidad, descansa sobre una superficie horizontal apoyado en dos pivotes colocados en los vértices del cuadrado inferior (ver figura 7.26).

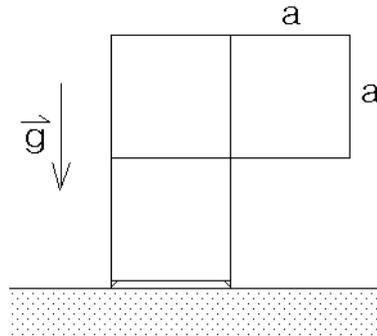


Figura 7.26

- a) Encuentre la posición del centro de masas.
 - b) Calcule la razón de la magnitud de las fuerzas de reacción de cada pivote.
21. Una regla 'T' de masa M , largo a y barra transversal b posa sobre un plano horizontal pulido como se indica. Calcule las reacciones normales en cada punto de contacto con el suelo.

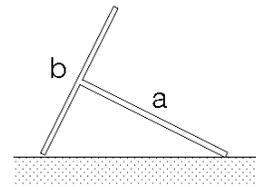


Figura 7.27

22. Considere una semiesfera homogénea de radio R . Demuestre que el centro de masas de la semiesfera está ubicado sobre el eje de simetría y a una distancia $b = 3R/8$ de la base.

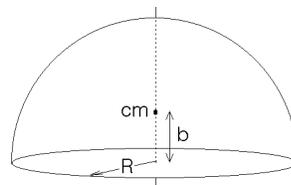


Figura 7.28

23. Considere una semiesfera homogénea de radio R que se encuentre sobre un plano inclinado. Existe un roce estático que evita que la semiesfera se deslice por el plano. Determine el máximo ángulo de inclinación β que puede tener el plano para que la semiesfera no se “dé vuelta”.

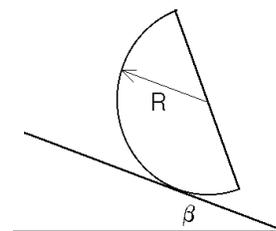


Figura 7.29

24. Considere una semiesfera de radio R , hecha de un material de densidad ρ_0 , que se encuentra con la parte curva sobre una superficie horizontal (ver figura adjunta). El centro de masas de una semiesfera homogénea queda sobre el eje de simetría a una distancia $b = 3R/8$ de la base.

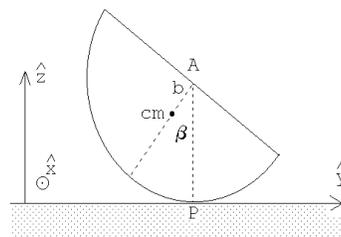


Figura 7.30

- Encuentre la magnitud y dirección del torque, respecto al punto de apoyo, ejercido por la fuerza de gravedad cuando la semiesfera se ladea en un ángulo β . Observe que el torque que aparece trata de hacer volver a la semiesfera a su posición de equilibrio (o sea, la posición de equilibrio es estable).
- Coloquemos ahora un cilindro homogéneo hecho del mismo material, del mismo radio R y altura h , sobre el cilindro. Determine la posición del centro de masas del sistema compuesto.
- Describa en palabras la condición que debe satisfacer la posición del centro de masas para que la posición de equilibrio del sistema compuesto siga siendo estable.
- Encuentre la altura límite del cilindro para la cual el sistema compuesto pierde su estabilidad.

25. Considere una semiesfera de radio R , hecha de un material de densidad ρ_0 , que se encuentra sobre una superficie horizontal y apoyada contra una pared tal como se muestra en la figura adjunta. El centro de masas de una semiesfera homogénea queda sobre el eje de simetría y a una distancia $b = 3R/8$ de la base. Suponga que, entre la semiesfera y el suelo el coeficiente de roce estático es $\mu = 3/16$, mientras que entre la pared y la semiesfera el roce es nulo.

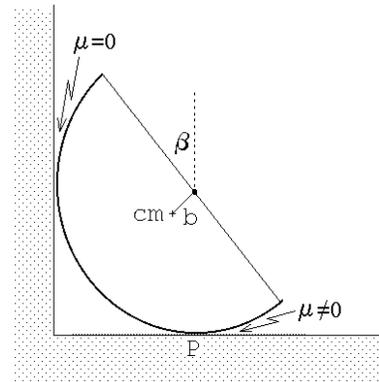


Figura 7.31

- Haga un diagrama de cuerpo libre para la semiesfera.
- Encuentre la magnitud y dirección del torque, respecto al punto de apoyo P , ejercido por la fuerza de gravedad cuando la semiesfera está ladeada en un ángulo β .
- Encuentre la fuerza de roce entre la semiesfera y el suelo.
- Encuentre el ángulo de inclinación máximo β_{\max} posible para que la esfera no resbale.
- Coloquemos ahora un cilindro homogéneo, hecho del mismo material, del mismo radio R y de altura h sobre el cilindro. Determine la posición del centro de masas del sistema compuesto. (1 punto)
- Encuentre la altura límite h_{\max} del cilindro a partir de la cual, para $h > h_{\max}$, el sistema compuesto se da vuelta (es decir, pierde su estabilidad).

26. Una semiesfera homogénea de masa M y radio R se ha cortado en dos mitades. El sistema se dispone con las dos mitades, cara a cara, y con la superficie de corte vertical. A fin de que las mitades no se separen, una cuerda sin roce y con masas iguales en sus extremos, es dispuesta como se indica en la figura. Determine las masas mínimas a atar en los extremos de la cuerda para que las mitades permanezcan juntas.

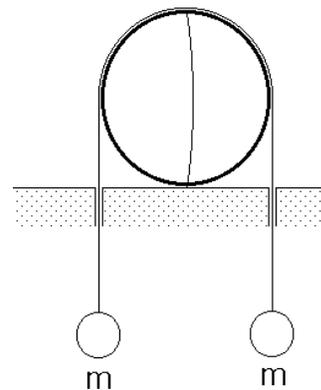


Figura 7.32

27. En los extremos de una barra de masa despreciable se adhieren bolas de mas m y $2m$, respectivamente. El sistema posa sobre un tiesto de fondo esférico resbaloso, de radio igual al largo de la barra. Calcule el ángulo que la barra forma con la vertical.

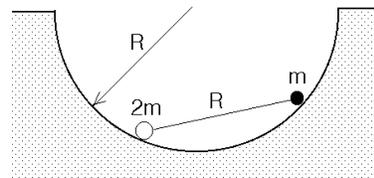


Figura 7.33

28. Un vaso cilíndrico (abierto por arriba), de radio basal a y altura b , hecho de un material de densidad superficial uniforme, posa sobre un plano inclinado y no resbala gracias a un tope fijo en el plano. Demuestre que el centro de masas se ubica a lo largo del eje y a una distancia $b^2/(a + 2b)$ de la base. Determine el ángulo de inclinación máximo del plano de modo que el vaso no vuelque.

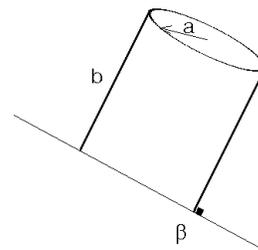


Figura 7.34

29. En la figura se muestra un cilindro de masa M y radio R , el cual se ata a la muralla mediante una cuerda. Alrededor de un calado que se le ha hecho al cilindro se enrolla una cuerda ideal. De la cuerda cuelga una masa m por determinar. Si el coeficiente de roce entre el suelo y el cilindro es μ , determine la masa máxima a colgar para que el cilindro no rote.

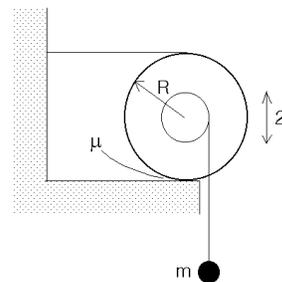


Figura 7.35

30. Un semicilindro de radio R y peso W se encuentra en equilibrio estático sobre un plano horizontal, con un pequeño bloque de peso Q sobre él. El bloque está ligado mediante un resorte ideal de largo natural $\ell_0 = R$ y constante elástica k a un punto A en el borde (ver figura). Suponga que no hay roce entre la superficie del cilindro y la masa de peso Q . Determine el ángulo α de equilibrio. Considere conocida la distancia D a la que se encuentra el centro de masas del punto O . Analice con cuidado que pasa cuando Q es pequeño.

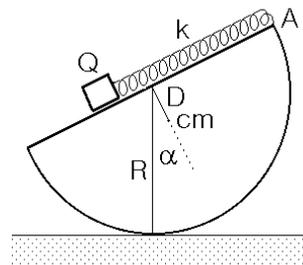
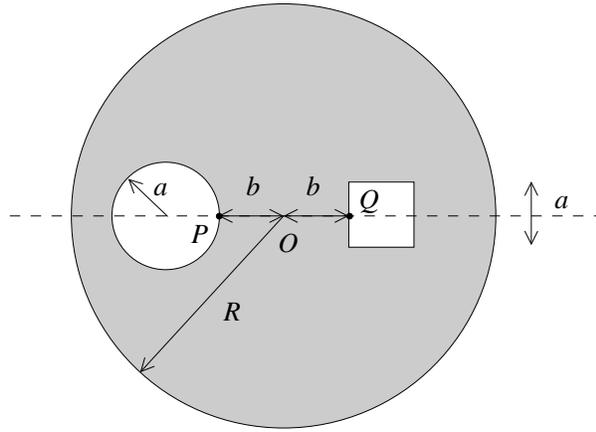


Figura 7.36

31. En un disco homogéneo de densidad superficial de masa σ y radio R se hacen dos perforaciones, una cuadrada de arista a , y otra circular de radio a . La distancia desde los bordes interiores de ambas perforaciones (puntos P y Q) al centro del disco (punto O) es b . Los centros del disco y de ambas perforaciones son colineales. La arista de la perforación cuadrada que pasa por Q es perpendicular al trazo PQ . ¿Para qué valor de b el centro de masas del sistema se encuentra en el punto Q ?



7.7. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 12

Elijamos el origen y los ejes tal como se muestra en la figura adjunta. Sea α el ángulo que la varilla forma con la horizontal, o sea, el ángulo ABO es α . Por ser AOB un triángulo isósceles, se tiene que el ángulo AOB también es α .

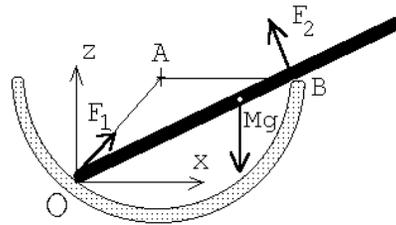


Figura 7.37

Como no hay roce entre las superficies de contacto, las fuerzas de reacción debe ser perpendiculares a las superficies de contacto. En otras palabras: la fuerza de reacción \vec{F}_1 en O será a lo largo del “radio” OA , mientras que la fuerza de reacción \vec{F}_2 en B será perpendicular a la varilla. Que la fuerza total horizontal sobre la varilla sea cero nos da la relación

$$F_1 \cos(2\alpha) = F_2 \sin \alpha . \tag{7.6}$$

La relación correspondiente para la componente vertical es

$$Mg = F_2 \cos \alpha + F_1 \sin(2\alpha) . \quad (7.7)$$

Para que la varilla esté en equilibrio también el torque total (respecto a O) debe ser nulo. La fuerza F_1 no ejerce torque (ya que su brazo es cero); el peso ejerce un torque $\vec{\tau}_g = Mg(L/2) \cos \alpha \hat{y}$, mientras que el torque generado por \vec{F}_2 es $\vec{\tau}_2 = -F_2 2R \cos \alpha \hat{y}$. De esta manera la condición de que el torque total sea nulo nos da la relación

$$Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 2F_2 R \cos \alpha . \quad (7.8)$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. De la última ecuación se deduce inmediatamente que

$$F_2 = \frac{MgL}{4R} . \quad (7.9)$$

De la ecuación (7.6) se encuentra

$$F_1 = F_2 \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} . \quad (7.10)$$

Usando (7.9) y (7.10) en (7.7), se tiene

$$Mg = \frac{MgL}{4R} \left[\cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} \right] ,$$

o sea,

$$\Gamma \equiv \frac{4R}{L} = \cos \alpha + \frac{2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} .$$

La última relación es una ecuación de segundo grado para $\cos \alpha$; resolviéndola se encuentra finalmente

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\Gamma^2}}{4\Gamma} .$$

Solución al problema 14

La figura adjunta muestra las fuerzas que actúan sobre los tambores (las flechas con líneas llenas son fuerzas que actúan sobre el tambor inferior, mientras que las flechas con líneas segmentadas corresponden a fuerzas que actúan sobre el tambor superior). Observe que no hay una fuerza horizontal entre los dos tambores inferiores. Observe también que el ángulo α entre la horizontal y la recta que une a los centros de un tambor inferior con el tambor superior es de 60° , luego $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ y $\cos \alpha = 1/2$.

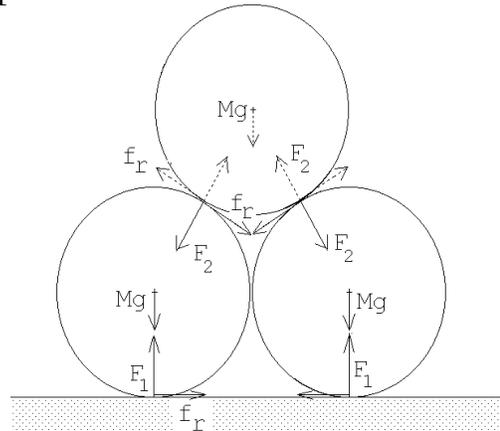


Figura 7.38

Las únicas fuerzas que producen un torque sobre el tambor inferior (respecto a su centro) son las dos fuerzas de roce. Como el torque total sobre el tambor inferior debe ser nulo se deduce que ambas fuerzas de roce deben tener la misma magnitud; llamémosla f_r .

La fuerza neta vertical sobre uno de los tambores inferiores debe ser nula; esto nos da la relación

$$F_1 - Mg - F_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - f_r \frac{1}{2} = 0 .$$

La relación correspondiente a las fuerzas horizontales es

$$f_r + f_r \frac{\sqrt{3}}{2} - F_2 \frac{1}{2} = 0 .$$

Como $2F_1$ debe ser igual al peso total de los tres tambores se tiene

$$F_1 = \frac{3}{2}Mg .$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas (en realidad la tercera ecuación ya es la solución de una de las incógnitas). Para las otras dos incógnitas f_r y F_2 se encuentra

$$f_r = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) Mg$$

y

$$F_2 = \frac{1}{2}Mg .$$

Si μ_1 es el coeficiente de roce estático entre el tambor inferior y el suelo, y μ_2 es el coeficiente de roce entre los tambores inferior y superior, entonces, para que el sistema no se derrumbe, debe cumplirse

$$f_r \leq \mu_1 F_1 \quad \text{y} \quad f_r \leq \mu_2 F_2 .$$

De estas desigualdades se deduce, finalmente, que

$$\mu_1 \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad \mu_2 \geq 2 - \sqrt{3} .$$

Solución al problema 19

El radio del círculo que forma la cadena es

$$R = \frac{L}{2\pi} .$$

Consideremos un trozo de cadena de largo infinitesimal $R d\theta$. Debido a la curvatura, la tensión T ejerce sobre el pequeño trozo de cadena una fuerza neta F_T hacia el centro O (ver figura 7.39a):

$$\vec{F}_T = -2T \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \hat{r} = -T d\theta \hat{r} .$$

No hay roce entre la cadena y el cono, luego la fuerza que el cono ejerce sobre la cadena es perpendicular al manto. Sea F_N la magnitud de esta fuerza. De la la figura 7.39b se desprende que

$$\vec{F}_N = F_N \cos \alpha \hat{r} + F_N \sin \alpha \hat{z} .$$

Por último, la otra fuerza que actúa sobre el trozo de cadena, debido a la gravedad, es

$$\vec{F}_g = -\frac{d\theta}{2\pi} Mg \hat{z} .$$

Como el trozo de cuerda está en reposo, la suma de las tres fuerzas debe ser nula, es decir,

$$\vec{F}_T + \vec{F}_N + \vec{F}_g = -T d\theta \hat{r} + F_N \cos \alpha \hat{r} + F_N \sin \alpha \hat{z} - \frac{d\theta}{2\pi} Mg \hat{z} = 0 .$$

Igualando las componentes se obtienen las relaciones

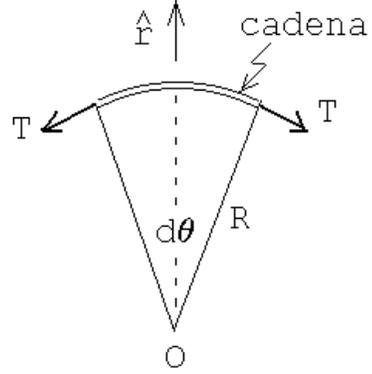
$$T d\theta = F_N \cos \alpha$$

y

$$Mg \frac{d\theta}{2\pi} = F_N \sin \alpha .$$

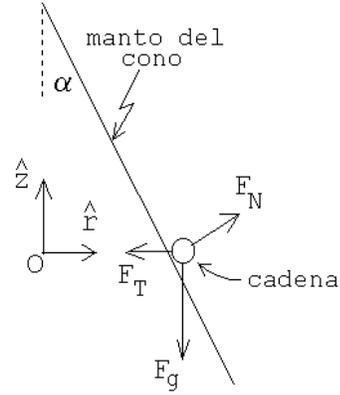
Despejando la tensión se encuentra, finalmente

$$T = \frac{Mg}{2\pi \tan \alpha} .$$



vista desde arriba

Figura 7.39a



vista lateral

Figura 7.39b

Solución al problema 22

Para evaluar la posición del centro de masas de la semiesfera, la colocamos con la cara plana sobre el plano $x - y$, haciendo coincidir el eje con \hat{z} , y luego la rebanamos en tajadas de ancho dz (ver figura).

Evaluemos primero la masa de la rebanada que se encuentra a la altura z . Su masa es $\rho_0 \pi (R^2 - z^2) dz$, donde ρ_0 es la densidad de masa de la semiesfera. El centro de masa de esta rebanada por supuesto que queda sobre el eje \hat{z} a la altura z .

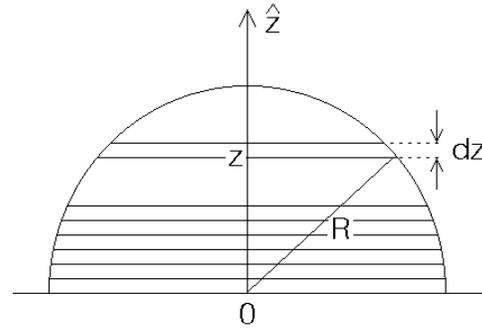


Figura 7.40

El centro de masas de la semiesfera será la suma de los centros de masas de cada rebanada pesada con la masa de de cada rebanada, es decir,

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} \int_0^R z \rho_0 \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{\rho_0 \pi}{M} \int_0^R (zR^2 - z^3) dz \\ &= \frac{\rho_0 \pi}{M} \left(\frac{1}{2} R^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^R = \frac{\rho_0 \pi}{M} \frac{1}{4} R^4 . \end{aligned}$$

Pero $M = 2\rho_0\pi R^3/3$, luego $z_{\text{cm}} = 3R/8$.

Solución al problema 24

- a) La masa de la semiesfera es $M = 2\pi\rho_0 R^3/3$. El torque en torno al punto de contacto P viene dado por

$$\vec{\tau} = Mgb \sin \beta \hat{x},$$

donde \hat{x} es un vector unitario que, para la situación mostrada en la figura adjunta, apunta hacia el lector.

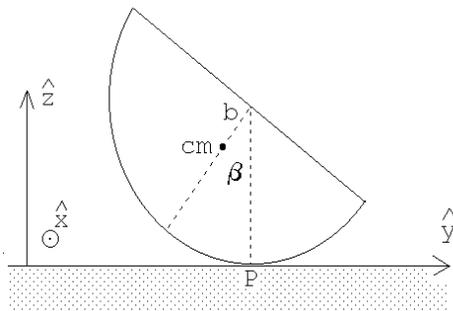


Figura 7.41a

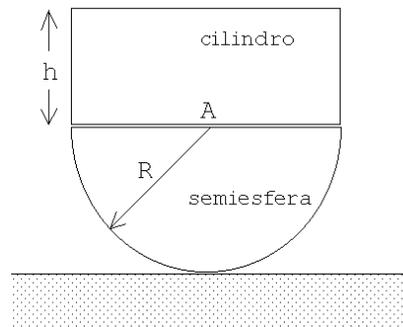


Figura 7.41.b

- b) Al colocar sobre la semiesfera un cilindro de altura h la posición del centro de masas es

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M + M_c} \left[M \frac{5}{8} R + M_c \left(R + \frac{h}{2} \right) \right],$$

donde $M_c = \pi R^2 h \rho_0$ es la masa del cilindro. Reemplazando las masas de los cuerpos se obtiene

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h} \left[\frac{5}{12}R^2 + hR + \frac{h^2}{2} \right].$$

- c) Mientras el la posición del centro de masas del sistema compuesto se encuentre por debajo del centro del semicírculo (punto A), el equilibrio será estable. (Es fácil convencersrse de que el torque que aparece al ladear el sistema trata de restituir al cuerpo a su posición de equilibrio). Por lo contrario, si el centro de masas del sistema compuesto se encuentra por encima del punto A , el equilibrio será inestable.

- d) La altura límite h_0 se obtiene cuando $z_{\text{cm}} = R$. Se tiene

$$z_{\text{cm}} = R = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h_0} \left[\frac{5}{12}R^2 + h_0R + \frac{h_0^2}{2} \right].$$

Despejando la altura límite se encuentra que ésta viene dada por

$$h_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Solución al problema 25

- a) El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura adjunta.
- b) La masa de la semiesfera es $M = 2\pi\rho_0 R^3/3$. El torque en torno al punto de contacto P viene dado por

$$\vec{\tau} = Mgb \sin \beta \hat{x},$$

donde \hat{x} es un vector unitario que, para la situación mostrada en la figura adjunta, apunta hacia el lector.

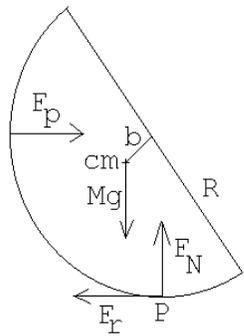


Figura 7.42a

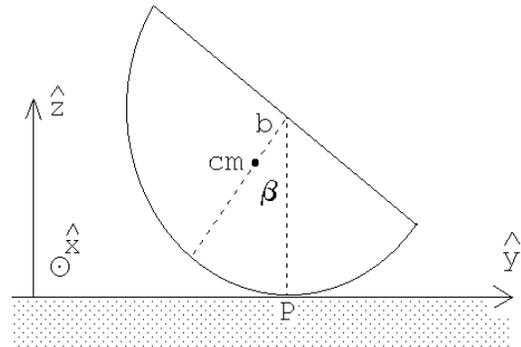


Figura 7.42.b

- c) La fuerza F_p que ejerce la pared sobre la semiesfera es en la dirección horizontal $+\hat{y}$ y su magnitud es tal que el torque total respecto a P es nulo. Luego

$$\vec{F}_p = \frac{Mgh \sin \beta}{R} \hat{y} = \frac{3}{8}Mg \sin \beta \hat{y}.$$

Como la fuerza horizontal total debe ser nula, y la única otra fuerza horizontal es la fuerza de roce, se tiene

$$\vec{F}_r = -\vec{F}_p = -\frac{Mgh \sin \beta}{R} \hat{y} = \frac{3}{8}Mg \sin \beta \hat{y}.$$

- d) La fuerza de roce no debe sobrepasar el valor μMg , o sea,

$$\frac{3}{8}Mg \sin \beta \leq \mu Mg = \frac{3}{16}Mg$$

de donde

$$\sin \beta \leq \frac{1}{2}.$$

El ángulo crítico es, por lo tanto, $\beta_{\max} = 30^\circ$.

- e) Al colocar sobre la semiesfera un cilindro de altura h la posición del centro de masas es

$$s_{\text{cm}} = \frac{1}{M + M_c} \left[M \frac{5}{8}R + M_c \left(R + \frac{h}{2} \right) \right],$$

donde $M_c = \pi R^2 h \rho_0$ es la masa del cilindro. Reemplazando las masas de los cuerpos se obtiene

$$s_{\text{cm}} = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h} \left[\frac{5}{12}R^2 + hR + \frac{h^2}{2} \right].$$

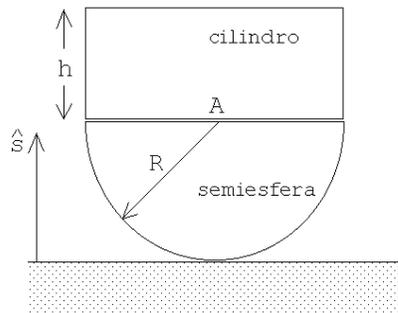


Figura 7.43a

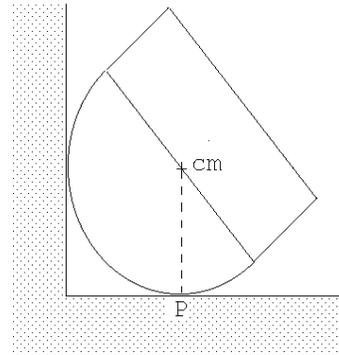


Figura 7.43.b

- f) La altura límite h_{\max} se obtiene cuando $s_{\text{cm}} = R$. Se tiene

$$s_{\text{cm}} = R = \frac{1}{\frac{2}{3}R + h_{\max}} \left[\frac{5}{12}R^2 + h_{\max}R + \frac{h_{\max}^2}{2} \right].$$

Despejando la altura límite se encuentra que ésta viene dada por

$$h_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Solución al problema 30

Las figuras 7.44a y 7.44b muestran los diagramas de cuerpo libre de la masa Q y el semicilindro, respectivamente. $F_r = kx$ es la fuerza ejercida por el resorte, W el peso del semicilindro y Q el peso del bloque que se encuentra a una distancia x de O . La distancia d entre el centro de masas y O la supondremos conocida.

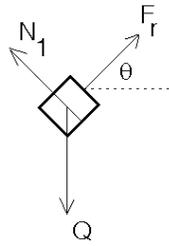


Figura 7.44a

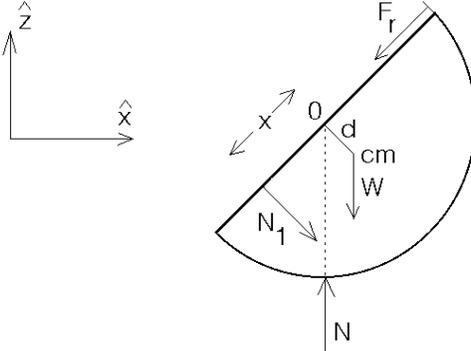


Figura 7.44.b

Debido a que ambos objetos están en equilibrio se debe tener que la fuerza total sobre cada uno de ellos debe ser nula, y también el torque total sobre el semicilindro (en torno a cualquier origen).

Para el bloque Q se obtiene la relación

$$\vec{F}_{\text{tot}} = (F_r \cos \theta \hat{x} + F_r \sin \theta \hat{z}) - Q \hat{z} + (N_1 \cos \theta \hat{z} - N_1 \sin \theta \hat{x}) = 0 .$$

Igualando las componentes de los vectores de la última igualdad y usando el hecho que $F_r = kx$, se obtienen las ecuaciones,

$$kr \cos \theta = N_1 \sin \theta \quad (7.11)$$

y

$$kx \sin \theta = Q - N_1 \cos \theta . \quad (7.12)$$

La fuerza total que actúa sobre el semicilindro (que también debe ser nula) es

$$-W \hat{z} + N \hat{z} + (-F_r \cos \theta \hat{x} - F_r \sin \theta \hat{z}) + (-N_1 \cos \theta \hat{z} + N_1 \sin \theta \hat{x}) = 0 .$$

Esto nos da las relaciones

$$-N_1 \cos \theta - kx \sin \theta - W + N = 0 \quad (7.13)$$

y

$$N_1 \sin \theta - kx \cos \theta = 0 .$$

Esta última ecuación no da información nueva ya que coincide con (7.11). Por último, evaluando el torque total (en torno al punto O) que actúa sobre el semicilindro, se obtiene:

$$N_1 x - Wd \sin \theta = 0 . \quad (7.14)$$

De las cuatro ecuaciones (7.11), (7.12), (7.13) y (7.14), con las cuatro incógnitas N , N_1 , x y θ , podemos despejar $\cos \theta$. Realizando el álgebra, se obtiene,

$$\cos \theta = \frac{Wdk}{Q^2} .$$

¿Que pasa cuando Q es pequeño? Es claro que la solución obtenida sólo tiene sentido si $Q^2 > Wkd$. Al analizar el problema (¡hágalo!) con más cuidado se encuentra que $\theta = 0$ (y, por lo tanto, $x = 0$) también (para todos los valores de Q) es una solución de este problema de equilibrio. También se encuentra que para $0 \leq Q^2 < Wkd$, la solución $\theta = 0$ es la única, siendo estable. Para $Wdk < Q^2$, hay tres soluciones: $\theta = 0$ y $\theta = \pm \text{Acos}(Wdk/Q^2)$; siendo la primera de éstas inestable, y estables las otras dos.

Para comprender mejor lo que está ocurriendo es útil analizar el problema también desde el punto de vista de la energía potencial. Definiendo el origen de la energía potencial gravitacional cuando $\theta = 0$, se encuentra que

$$U(\theta) = Wd(1 - \cos \theta) - Qx \sin \theta + \frac{1}{2}kx^2 .$$

El primer término al lado derecho es el cambio de la energía potencial gravitacional del semicilindro, el segundo el cambio de la energía potencial gravitacional de la masa Q y el tercero la energía potencial del resorte. Con $kx = Q \sin \theta$ queda

$$U(\theta) = Wd(1 - \cos \theta) - \frac{Q^2}{2k} \sin^2 \theta .$$

Para hacer un estudio gráfico de esta relación introducimos el parámetro $\alpha \equiv Q^2/(kWd)$ y definimos $\bar{U}(\theta) \equiv U(\theta)/(Wd)$; de esta manera la última ecuación queda de la forma

$$\bar{U}(\theta) = (1 - \cos \theta) - \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta .$$

La figura 7.45 muestra el gráfico para $\alpha = 0$; $-0,5$; $1,0$ y 2 . Para $0 < \alpha < 1$, el gráfico tiene un sólo mínimo, para $\alpha > 1$ el gráfico tiene dos mínimos (en $\pm\theta_0$) y un máximo (en $\theta = 0$). Para encontrar θ_0 debemos evaluar la derivada de $\bar{U}(\theta)$ respecto a θ e igualarla a cero:

$$\frac{d\bar{U}(\theta)}{d\theta} = \sin \theta - \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

o sea,

$$\sin \theta (1 - \alpha \cos \theta) = 0.$$

Esta ecuación se satisface si $\sin \theta = 0$ o $(1 - \alpha \cos \theta) = 0$. La primera de estas condiciones nos da la solución $\theta = 0$ mientras que la segunda entrega las soluciones $\theta_0 = \pm \arccos(1/\alpha)$, soluciones que existe sólo si $\alpha \geq 1$. Para $\alpha = 2$, se obtiene $\theta_0 = \pm 60^\circ$.

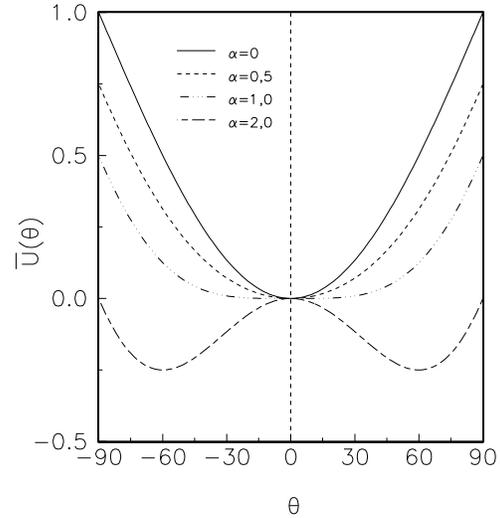


Figura 7.45

Capítulo 8

Momento angular

versión 19 agosto 2010

En el capítulo anterior comenzamos a estudiar sistemas que ya no son partículas puntuales, sino cuerpos con estructura. Aprendimos que la fuerza neta sobre un objeto, por sí sola, no es suficiente para describir el estado de tales sistemas, y que es necesario introducir una nueva cantidad física, el torque. De este modo, la fuerza describe el estado traslacional de un objeto, mientras que el torque describe su estado rotacional. De momento, sin embargo, sólo nos hemos preocupado de sistemas en equilibrio. Ahora debemos estudiar su dinámica. Para ello, será necesario introducir otra magnitud física, el *momento angular*, que podemos considerar como el análogo al momento lineal estudiado en el Cap. 6, pero cuando lo que nos interesa es describir rotaciones y no traslaciones. En este capítulo sólo pretenderemos enunciar este concepto, mostrar algunos resultados importantes, y ganar intuición al respecto, de manera que más adelante en el curso podamos estudiar adecuadamente la evolución de sistemas con estructura.

8.1. Momento angular de una partícula

Consideremos una partícula de masa m y cuya posición (respecto a algún sistema de referencia inercial) viene dada por el vector \vec{r} . Sea \vec{F} la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Entonces, de acuerdo a la 2ª ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Tomando el producto cruz con el vector \vec{r} se obtiene

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} . \tag{8.1}$$

Observemos que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (8.2)$$

La última igualdad se deduce del hecho que los vectores $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ y \vec{p} son paralelos. Usando (8.2) en (8.1) se obtiene

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}).$$

Observemos que la expresión anterior es análoga a la segunda ley de Newton, donde en el lado izquierdo la fuerza es reemplazada por el torque (como debe ser, ya que ahora no sólo interesa la posición de una partícula puntual o del centro de masas), y en el lado derecho el momento lineal \vec{p} ha sido reemplazado por $\vec{r} \times \vec{p}$. Inspirados por dicha analogía, entonces, definimos el *momento angular* de una partícula por

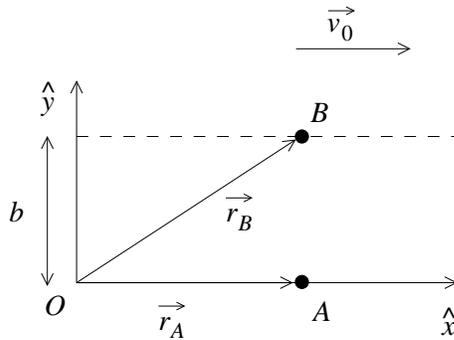
$$\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p}.$$

Entonces

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}.$$

Igual que en el caso del torque, el momento angular de una partícula depende del origen que se use para evaluarlo. Notemos también que si el torque que actúa sobre una partícula, medido respecto a cierto origen es nulo, entonces el momento angular de la partícula, respecto al mismo origen, no variará en el tiempo, es decir, se conservará.

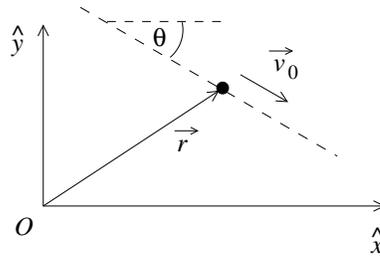
Revisemos algunos ejemplos sencillos. Primero, consideremos una partícula A (ver figura) con velocidad constante $\vec{v} = v_0 \hat{x}$, moviéndose a lo largo del eje \hat{x} :



De la definición de momento angular es inmediato que $\vec{\ell}_A = \vec{r}_A \times \vec{p}_A = \vec{0}$. Si ahora consideramos la partícula B , de igual masa, moviéndose con igual velocidad, pero a una distancia b del eje \hat{x} , es evidente que $\vec{\ell}_B \neq 0$. La misma partícula, entonces, puede tener momento angular distinto simplemente porque se mueve a lo largo de otra recta. Esto no es sino consecuencia de lo dicho anteriormente, que el momento angular depende del origen respecto al cual se evalúa.

En el caso recién analizado, la fuerza neta sobre las partículas es cero, luego el torque es cero, y por lo tanto el momento angular debe ser constante. Para la partícula A ello es evidente. En el caso de la partícula B , si $\vec{\ell}_B$ es constante significa que para evaluarlo podemos usar cualquier punto de la trayectoria, por ejemplo cuando pasa por el eje \hat{y} , en cuyo caso \vec{r} y \vec{p} son perpendiculares. Es inmediato entonces que $\vec{\ell}_B = -mv_0b\hat{z}$.

Lo anterior, obviamente, también se puede observar en una trayectoria rectilínea arbitraria, como la indicada en la siguiente figura:



En este caso, si n es la ordenada en que la recta intersecta al eje \hat{y} , entonces el momento angular respecto a O es $\vec{\ell} = -mv_0n \cos \theta \hat{z}$, que es por supuesto constante.

Consideremos ahora una partícula que se mantiene en un movimiento circular uniforme (con velocidad angular ω_0) mediante un hilo.

Sea R el radio de círculo. El momento angular de la partícula (respecto al centro de la circunferencia) viene dado por

$$\vec{\ell} = mR^2\omega_0 \hat{z} .$$

La dirección en que apunta $\vec{\ell}$ es a lo largo del eje de giro, y en el sentido dado por la regla de la mano derecha (los dedos empuñados indicando el sentido de la rotación; el pulgar extendido da el sentido del momento angular —la misma regla que encontramos para el sentido del torque).

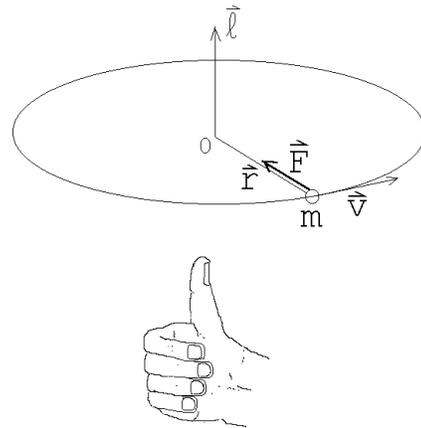


Figura 8.1

El hilo ejerce una fuerza sobre la partícula (la fuerza centrípeta dada por $-mR\omega_0^2 \hat{r}$), pero esta fuerza no ejerce un torque respecto al origen ya que \vec{F} y \vec{r} son paralelos. Debido a que el torque es nulo, el momento angular de la partícula se conserva (o sea, a medida que transcurre el tiempo no cambia la magnitud ni la orientación del vector $\vec{\ell}$).

Evaluemos ahora el momento angular para una partícula moviéndose de manera arbitraria en un plano.

Supongamos que una partícula de masa m se mueve en el plano x, y y sean $r(t), \theta(t)$ las coordenadas polares del vector de posición $\vec{r}(t)$. La posición de la partícula vendrá dada por

$$\vec{r} = r \hat{r} ,$$

donde

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} .$$

Derivando obtenemos la velocidad

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} .$$

Pero

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt}(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) = -\sin(\theta) \dot{\theta} \hat{x} + \cos(\theta) \dot{\theta} \hat{y} \equiv \dot{\theta} \hat{\theta} ,$$

luego

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} .$$

De esta manera, para el momento angular de la partícula se encuentra la expresión

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m r \hat{r} \times \vec{v} = m r \dot{r} \hat{r} \times \hat{r} + m r^2 \dot{\theta} \hat{r} \times \hat{\theta} = m r^2 \dot{\theta} \hat{z} , \quad (8.3)$$

donde \hat{z} es el vector unitario perpendicular al plano (x, y) (cuya dirección en que apunta se encuentra usando la *regla de la mano derecha*).

Observe que si la partícula se aleja en dirección radial (o sea, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{r} \neq 0$) entonces el momento angular es nulo. Sólo si el ángulo θ del vector de posición cambia a medida que transcurre el tiempo, el momento angular es no nulo. ¡El momento angular de una partícula está relacionado con el aspecto rotacional de su movimiento!

Esta conclusión de algún modo era evidente cuando estudiamos el caso de una partícula en movimiento circular, pero es menos evidente cuando consideramos un movimiento rectilíneo, ya que el momento angular podía o no ser cero. La razón es la siguiente: cuando la partícula se mueve sobre el eje \hat{x} , vista desde el origen la partícula se ve alejarse radialmente, y por lo tanto $\dot{\theta} = 0$, y $\vec{\ell} = 0$, de acuerdo a (8.3). Pero cuando la partícula se mueve a una distancia b del eje \hat{x} , el ángulo θ que forma su vector posición con el eje \hat{x} sí cambia (se acerca asintóticamente a cero a medida que la partícula se aleja). Por tanto, respecto al origen, sí podríamos decir que la partícula gira, en algún sentido. Lo importante entonces es que el momento

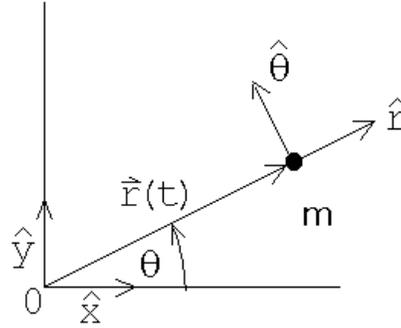


Figura 8.2

angular será distinto de cero cuando la variable angular que describe la posición de la partícula varía. Eso puede o no representar una rotación o un movimiento curvilíneo, en el sentido convencional.

Problema resuelto en clases: 8.7

8.2. Momento angular de varias partículas

Consideremos ahora N masas $\{m_j\}$ ubicados en los lugares $\{\vec{r}_j\}$. Sean $\{\vec{F}_j\}$ la fuerza externa que actúa sobre cada partícula y $\{\vec{f}_{ji}\}$ la fuerza que la masa i ejerce sobre la masa j . Por supuesto que debido al tercer principio de Newton, $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$. Supongamos además que la fuerza que una partícula i ejerce sobre otra partícula j es a lo largo de la línea que las une (o sea, que la interacción entre las partículas es central).

La ecuación de movimiento (2ª ley de Newton) para cada partícula es

$$\vec{F}_j + \sum_i \vec{f}_{ji} = \frac{d\vec{p}_j}{dt}.$$

Tomando el producto cruz con el vector \vec{r}_j se obtiene

$$\vec{r}_j \times \left(\vec{F}_j + \sum_i \vec{f}_{ji} \right) = \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt}.$$

Por la misma razón discutida en la sección anterior

$$\vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_j \times \vec{p}_j).$$

Usando esta relación y sumando sobre j , se obtiene

$$\sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \sum_{ji} \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \sum_j \frac{d}{dt} (\vec{r}_j \times \vec{p}_j) = \frac{d}{dt} \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j.$$

Pero

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0,$$

ya que $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ es paralelo a \vec{f}_{ij} . Luego, la doble suma $\sum_{ji} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$ es nula. De esta manera, usando las definiciones de momento angular y torque, se obtiene

$$\sum_j \vec{\tau}_j = \frac{d}{dt} \sum_j \vec{\ell}_j. \quad (8.4)$$

Sea

$$\vec{\tau} \equiv \sum_j \vec{\tau}_j$$

y

$$\vec{L} \equiv \sum_j \vec{\ell}_j$$

el torque y el momento angular total del sistema de partículas, entonces la ecuación (8.4) queda

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}. \quad (8.5)$$

En palabras: Si el torque total que actúa sobre un sistema (respecto a un punto P) es nulo, entonces el momento angular del sistema (respecto al mismo punto) no cambiará. Lo anterior se conoce como la *ley de conservación del momento angular*. Las fuerzas internas de un sistema pueden cambiar el momento angular de las partículas que lo componen, pero no pueden modificar el vector momento angular total.

Ilustremos el uso de la ley de conservación de momento angular con algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Demuestre que un planeta, que se mueve alrededor del sol, barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, $dA/dt = \text{constante}$.

Coloquemos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el lugar donde está el sol. La fuerza que el sol ejerce sobre los planetas es a lo largo de la dirección radial, por lo tanto, la fuerza atractiva de gravitación no ejerce torque sobre el planeta. De lo anterior se desprende que el momento angular del planeta debe ser en todos los instantes el mismo. De hecho, el momento angular se conservará en general, para cualquier fuerza central (que dependa sólo de \vec{r}).

¿Cuál es el área ΔA que barre el planeta en un tiempo Δt ? La respuesta es

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times (\vec{v} \Delta t)| = \frac{\Delta t}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{\Delta t}{2m} \ell.$$

Como $\ell = |\vec{\ell}|$ se conserva a lo largo de la trayectoria, se deduce que el área barrida en un tiempo Δt es independiente del punto de la trayectoria que se considere.

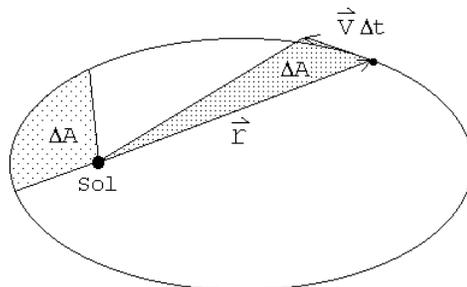


Figura 8.3

Observemos además que la conservación del momento angular es vectorial, es decir, que debe conservarse también su dirección. En particular, para un planeta

orbitando en torno a una estrella el momento angular es perpendicular al plano orbital, y por ende la conservación del momento angular implica que el plano orbital debe ser constante y el movimiento del planeta es siempre en dos dimensiones.

Ejemplo 2

Considere una masa M colgada de una varilla rígida, de masa despreciable y de largo L , que puede girar libremente en torno al punto O (ver figura adjunta). En el instante $t = 0$ la masa M explota y una parte $M/2$ sale disparada con velocidad v en una dirección que forma un ángulo θ con respecto a la horizontal. Encuentre la energía cinética de la parte que quedó adosada a la varilla en el instante inmediatamente posterior a la explosión.

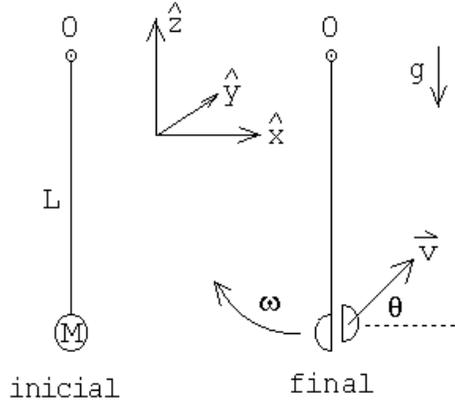


Figura 8.4

Observemos que este problema corresponde a una “colisión” inelástica. Es evidentemente inelástica ya que la energía cinética cambia después de la explosión. Y como las ecuaciones de Newton no cambian si invertimos el sentido del tiempo, no pueden distinguir entre el proceso de explosión descrito, o el proceso inverso, de dos masas acercándose hasta quedar adosadas y en reposo en el extremo del péndulo, de modo que podemos hablar de una colisión en sentido genérico también.

Sobre el sistema (la varilla con la masa colgando) actúan las siguientes fuerzas: i) el peso $-Mg\hat{z}$, ii) una fuerza \vec{F}_0 que ejerce el eje de giro sobre la varilla y iii) fuerzas originadas por la explosión. En el instante $t = 0$ el peso no ejerce un torque sobre el sistema respecto a O ya que en ese instante los vectores \vec{r} y $-Mg\hat{z}$ son paralelos. La fuerza \vec{F}_0 tampoco ejerce un torque ya que el *brazo* para esta fuerza es nulo. Las fuerzas originadas por la explosión son fuerzas internas y por consiguiente no modifican el momento angular total del sistema. Concluimos que el momento angular total antes y justo después de la explosión deben ser iguales.

Inicialmente el momento angular es cero. Después de la explosión el momento angular del fragmento que sale disparado es

$$\vec{\ell}_1 = -\frac{M}{2}Lv \cos \theta \hat{y} .$$

Si la velocidad angular de la varilla en el instante posterior a la explosión es ω_0 , el momento angular de la masa que quedó adosada a la varilla es

$$\vec{\ell}_2 = \frac{M}{2}L^2\omega_0 \hat{y} .$$

Como la suma de los dos momentos angulares $\vec{\ell}_1$ y $\vec{\ell}_2$ debe ser nula, se tiene que

$$\frac{M}{2}Lv \cos \theta = \frac{M}{2}L^2\omega_0.$$

Despejando ω_0 se encuentra

$$\omega_0 = \frac{v \cos \theta}{L}.$$

Finalmente, conociendo la velocidad angular ω_0 podemos evaluar la energía cinética del fragmento que quedó adosado a la varilla, en el instante inmediatamente posterior a la explosión:

$$K = \frac{1}{2} \frac{M}{2} L^2 \omega_0^2 = \frac{M}{4} v^2 \cos^2 \theta.$$

Antes de analizar un tercer ejemplo debemos demostrar una proposición importante.

Consideremos nuevamente N partículas con masas $\{m_j\}$ ubicadas en los lugares $\{\vec{r}_j\}$ y con velocidades $\{\vec{v}_j\}$. Sean \vec{R}_{cm} y \vec{V}_{cm} la posición y velocidad del centro de masas. Denotemos por \vec{r}_j' y \vec{v}_j' los vectores de posición y velocidad de la partícula m_j respecto al centro de masas.

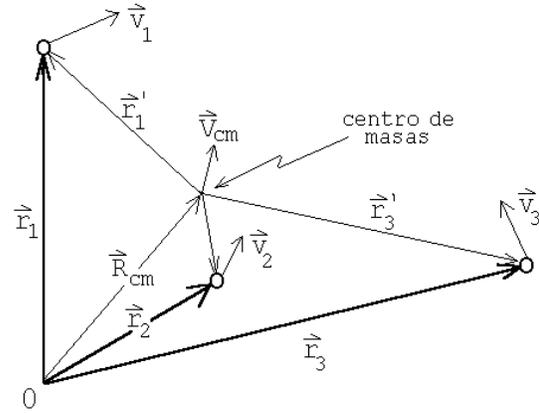


Figura 8.5

Entonces

$$\vec{L} = \sum_j \vec{\ell}_j = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \sum_j m_j (\vec{r}_j \times \vec{v}_j).$$

Por otra parte

$$\vec{r}_j = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_j'$$

y

$$\vec{v}_j = \vec{V}_{cm} + \vec{v}_j'.$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_j m_j (\vec{R}_{cm} + \vec{r}_j') \times (\vec{V}_{cm} + \vec{v}_j') \\ &= \sum_j m_j \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + M \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j'}{M} \times \vec{V}_{cm} + M \vec{R}_{cm} \times \frac{\sum_j m_j \vec{v}_j'}{M} + \sum_j m_j \vec{r}_j' \times \vec{v}_j' \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\sum_j m_j \vec{r}_j'}{M} = \vec{R}_{cm}'$$

y

$$\frac{\sum_j m_j \vec{v}_j'}{M} = \vec{V}_{cm}'$$

son la posición y velocidad del centro de masas medidas desde el centro de masas — luego ambas sumatorias son nulas. De esta manera la ecuación anterior queda

Proposición:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \sum_j \vec{\ell}' = \vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} + \vec{L}' .$$

En palabras: El momento angular respecto a cualquier punto O es igual al momento angular debido a la traslación del sistema como un todo, es decir, el movimiento del centro de masas con toda la masa concentrada en ese lugar, más el momento angular (rotacional intrínseco) del sistema visto desde el centro de masas.

Es importante recalcar que el centro de masas ha aparecido nuevamente como un punto privilegiado, que nos permite hacer esta descomposición. Si tomáramos cualquier otro punto, digamos A , el esta descomposición del momento angular total en el momento angular de A , más un momento angular en torno al punto A , no es posible.

Ejemplo 3

Considere dos partículas de masa m unidas por una barra de masa despreciable y largo L . Una tercera partícula, también de masa m , colisiona con las anteriores, quedando adosada a la # 2. Si la velocidad incidente de la masa # 3 es v_0 , y ésta incide como se muestra en la figura 8.6, encuentre la posición de la masa # 1 en función del tiempo.

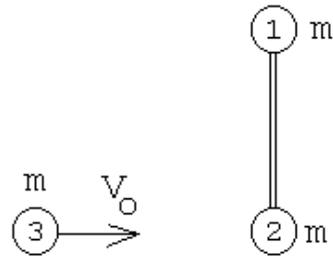


Figura 8.6

Observemos, en primer lugar, que en este problema tenemos tres ecuaciones (dos de momento lineal, una de momento angular), y, en principio, 4 incógnitas (dos coordenadas de velocidad para la masa 1, y dos para la masa 2-3). Pero ambas masas están unidas por una barra, de modo que sus velocidades no son independientes, y esto resulta en sólo 3 incógnitas (la velocidad traslacional del centro de masas y

la velocidad angular de rotación en torno al mismo), consistente con el número de ecuaciones. Así, el problema se debería poder resolver exactamente.

Lo haremos de dos maneras.

Primero elegiremos el sistema de coordenadas de manera que el eje \hat{x} coincida con la recta a lo largo de la cual se mueve el centro de masas del sistema (ver figura 8.7).

Si $t = 0$ corresponde al instante en que ocurre la colisión, entonces la posición del centro de masas del sistema total (es decir, de las tres masas), tanto antes como después de la colisión, vendrá dado por

$$\vec{r}_{cm}(t) = \frac{v_0}{3} t \hat{x} .$$

Posterior a la colisión, la barra con masas $2m$ y m en sus extremos, rotará con cierta velocidad angular ω_0 en torno al centro de masas. Podemos evaluar ω_0 usando la ley de conservación del momento angular.

Antes de la colisión el momento angular del sistema es

$$\vec{L}_i = \left[\frac{L}{3} m v_0 \right] \hat{z} .$$

Después de la colisión, para el sistema de referencia que estamos usando, la varilla con las masas sólo tiene un momento angular intrínseco:

$$\vec{L}_f = \left[\frac{2L}{3} m \left(\omega_0 \frac{2L}{3} \right) + \frac{L}{3} (2m) \left(\omega_0 \frac{L}{3} \right) \right] \hat{z} = \frac{2}{3} m \omega_0 L^2 \hat{z} .$$

Usando la ley de conservación del momento angular se encuentra que

$$\omega_0 = \frac{v_0}{2L} .$$

Volveremos a resolver el problema pero eligiendo ahora un sistema de coordenadas fijo en el laboratorio y con el origen coincidiendo con la posición de la partícula # 2 antes de la colisión. Nuevamente elegimos el eje \hat{x} a lo largo de la velocidad de la partícula incidente y el eje \hat{y} a lo largo de la dirección que tiene la barra antes de la colisión.

En este sistema de coordenadas, el momento angular del sistema, antes de la colisión, es nulo. Después de la colisión, el momento angular total de la barra con las

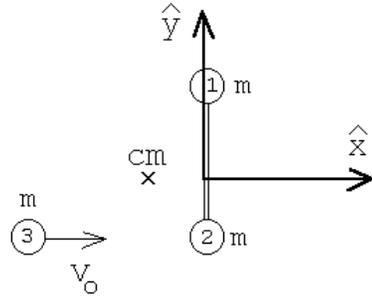


Figura 8.7

tres masas, también deberá ser nulo. El momento angular de este sistema complejo que se aleja, se puede evaluar usando la proposición recién demostrada. Consta de dos partes: el momento angular del centro de masas y el momento angular rotacional intrínseco.

Como el centro de masas se mueve con velocidad $v_0/3$, la masa total es $3m$ y el *brazo* (distancia entre el origen y la tangente de la trayectoria del centro de masas) es $L/3$, el momento angular del centro de masas será

$$\vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} = -\frac{L}{3} (3m) \frac{v_0}{3} \hat{z} .$$

El momento angular intrínseco, igual que en el caso anterior, viene dado por

$$\vec{L}' = \frac{2}{3} m \omega_0 L^2 \hat{z} .$$

La condición que la suma de los dos momentos angulares anteriores sea nula, nos da la misma relación que ya habíamos encontrado:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{2L} .$$

Para la posición de la masa #1 se obtiene la expresión

$$\vec{r}_1(t) = \begin{cases} \frac{2L}{3} \hat{y} & \text{para } t < 0 \\ \frac{v_0}{3} t \hat{x} + \frac{2L}{3} [\cos(\omega_0 t) \hat{y} - \sin(\omega_0 t) \hat{x}] & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Problema resuelto en clases: 8.11 (a)

Problema resuelto en clases: Péndulo simple, resuelto con Ec. (8.5)

Problema resuelto en clases: 7.13 (si se dio de tarea anteriormente)

8.3. Problemas

1. Consideremos un satélite artificial, de masa m , que gira en torno a la tierra a lo largo de una órbita elíptica y las distancias máxima y mínima a la superficie de la tierra son 2555 km y 352 km, respectivamente. La velocidad máxima del satélite es de 29737 km/h. El radio terrestre es igual a 6382 km. ¿Cuáles serán las velocidades del satélite en el perigeo (r_{\min}) y apogeo (r_{\max}), respectivamente?

- Una bala de masa m y velocidad v pasa a través de la “lenteja” de un péndulo de masa M , y emerge con velocidad $v/2$. La lenteja del péndulo está colgada de una cuerda de longitud ℓ . ¿Cuál debe ser el valor de v para que la lenteja del péndulo describa un círculo completo? ¿Cómo se modifica el problema si, en lugar de una cuerda, la lenteja está colgada de una varilla rígida sin masa?

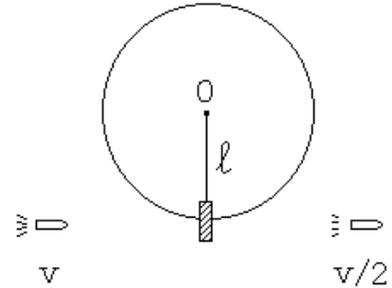


Figura 8.8

- Una partícula de masa m y velocidad v_0 incide sobre una barra de largo L y masa despreciable, que en cada uno de los extremos tiene una masa m , tal como se indica en la figura. Suponga que el choque entre las esferas # 1 y # 2 es elástico y central (frontal). ¿Se moverá la partícula # 1 después del choque? Si su respuesta es afirmativa evalúe su dirección y magnitud.

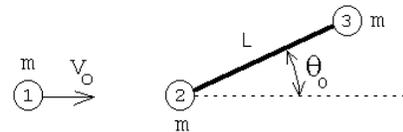


Figura 8.9

- Una masa m_1 se deja caer desde una altura h sobre un “balancín” (ver figura 8.10). El balancín puede girar libremente en torno a O en el sentido contrario al reloj. Sobre el otro extremo del balancín hay una masa m_2 . Al chocar la masa m_1 contra el balancín, ésta queda adosada a él. ¿Qué fracción de la energía total inicial se disipa en la colisión? Desprecie la masa del balancín.

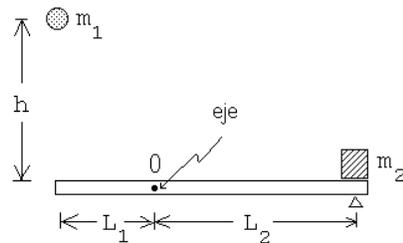


Figura 8.10

5. Considere dos masas m , unidas por una varilla de largo L . Esta varilla está soldada en su centro a otra varilla, formando un ángulo α . El sistema anterior rota con una velocidad angular ω_0 en torno a la segunda varilla (ver figura adjunta). En cierto instante la soldadura se rompe, desacoplándose el movimiento de las dos varillas. Describa, de ahí en adelante, el movimiento de la varilla con las dos masas.

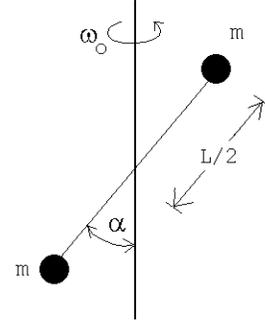


Figura 8.11

6. Considere una varilla rígida, pero de masa despreciable, cuyo largo es L y que tiene dos masas m , una adosada en uno de los extremos y la otra al centro (ver figura). La varilla puede girar libremente en el plano vertical alrededor de un eje que pasa por el extremo en que no tiene una masa adosada. Todo el sistema se encuentra en un campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{z}$. Suponga que este sistema inicialmente se encuentra en reposo en su posición de equilibrio inestable. Una leve perturbación hace que el sistema salga de su posición de equilibrio y paulatinamente comienza a “caer”.

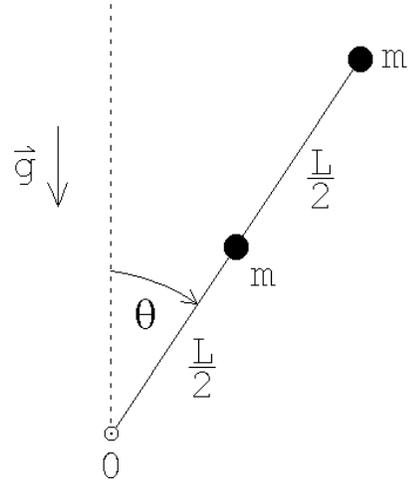


Figura 8.13

- a) Encuentre la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ y la aceleración angular $\alpha = \ddot{\theta}$ de la varilla cuando ésta forme un ángulo θ con la vertical.
- b) Encuentre la fuerza que la varilla ejerce sobre el eje cuando la varilla pasa por la horizontal (es decir, cuando $\theta = \pi/2$).

7. Una masa m realiza un movimiento circular, con radio R_0 , sobre una mesa (sin fricción), atada a un hilo (ver figura 8.12). Sea ω_0 la velocidad angular inicial. ¿Cuál es el trabajo que debe realizarse (tirando del hilo) para achicar el radio de giro desde R_0 a $R_0/2$?

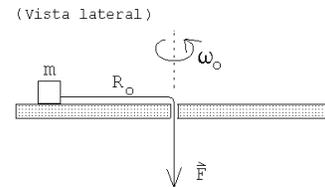


Figura 8.12

Respuesta: $W = 3m\omega_0^2 R_0^2/2$.

8. Considere un péndulo cónico (es decir, una masa m colgada de un hilo ideal de largo L), que gira en círculos formando un ángulo α_0 con la vertical.

- a) ¿Con qué velocidad angular girará si el hilo se acorta lentamente hasta llegar a $L/2$?
- b) ¿Que trabajo debe realizarse para acortar el hilo en esa magnitud?

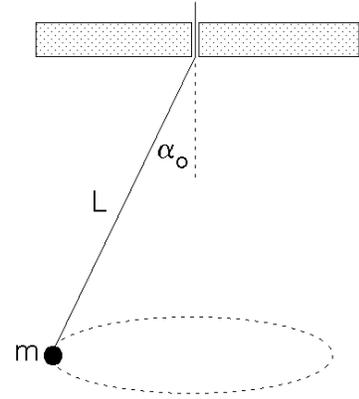


Figura 8.15

9. Un alambre (de masa despreciable) de largo $2L$ se dobla al centro de manera que forma un ángulo α . En cada extremo el alambre tiene una masa m . Este dispositivo se “cuelga” de un eje tal como se muestra en la figura adjunta. Calcule el período de oscilación del sistema para pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio estable. Verifique que la expresión general, en los límites $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$, da los resultados esperados.

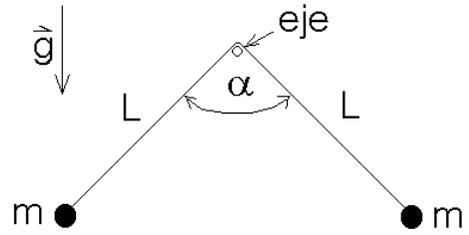


Figura 8.16

Para resolver este problema suponga que el sistema está oscilando (con pequeñas oscilaciones) y evalúe para un instante arbitrario el torque y el momento angular. Luego, usando la ecuación (8.4) demuestre que la variable $\alpha(t)$ satisface la ecuación diferencial de un oscilador armónico.

10. Considere una varilla de largo L que tiene dos masas M adosadas tal como se muestra en la figura. Un masa m que incide con velocidad v_0 , choca con el péndulo quedando adosada a él a una distancia h del eje. Determine el impulso transmitido por el eje al péndulo durante la colisión. ¿A qué altura debe impactar m para que el impulso transmitido por el eje sea nulo? (en ese caso el eje no se percata de la colisión).

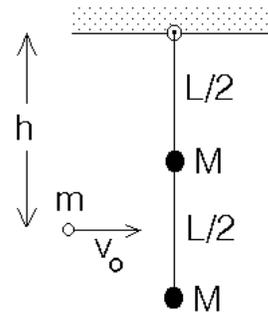


Figura 8.17

11. Dos masas m unidas por un hilo de largo L , caen con el hilo horizontal partiendo desde el reposo. Después de caer una distancia h , una de ellas choca elásticamente con una viga.

- a) Determine la velocidad angular con que girarán las masas en torno a su centro de masas después de la colisión.
- b) Encuentre la tensión a la que estará sometido del hilo después de que ha ocurrido la colisión.

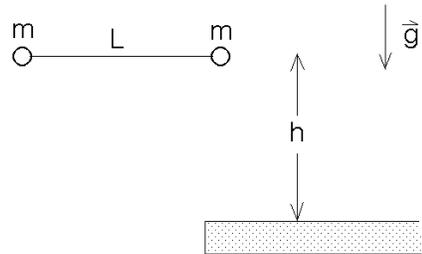


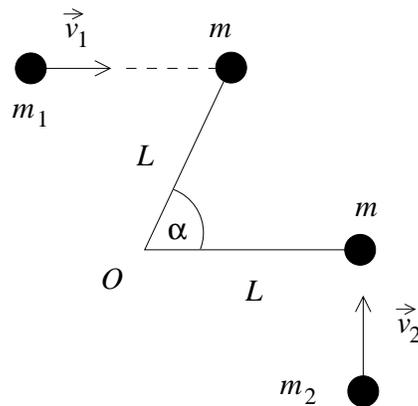
Figura 8.14

12. Una varilla de largo $2L$ y masa despreciable se dobla en su punto medio O , de modo que ambas secciones de la varilla forman un ángulo α entre sí (ver figura). En cada extremo de la varilla hay una masa m . El sistema se coloca sobre una mesa horizontal, y se fija a la mesa en el punto O , permitiéndole rotar en torno a él.

Dos masas adicionales, m_1 y m_2 , chocan simultáneamente sobre cada una de las masas anteriores, quedando adosadas a ellas, con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . La masa m_2 incide perpendicularmente a uno de los segmentos de la varilla, y la masa m_1 incide paralelamente a ese mismo segmento, como indica la figura.

Si $m_2 = m$, y $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, ¿Con qué frecuencia angular queda girando el sistema luego de la colisión?

¿Cuánto debe valer m_1 para que el sistema no gire después de la colisión?



8.4. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 6

Debido al principio de conservación de la energía, la energía cinética que tiene el sistema cuando la varilla forma un ángulo θ con la normal debe ser igual al cambio de energía potencial, o sea, $\Delta K = \Delta U$, con

$$\Delta K = \frac{1}{2}m \left(\frac{L}{2}\omega \right)^2 + \frac{1}{2}m(L\omega)^2 = \frac{5}{8}mL^2\omega^2$$

y

$$\Delta U = mg(L - L \cos \theta) + mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos \theta \right) = \frac{3}{2}mgL(1 - \cos \theta).$$

De esta manera se deduce que

$$\omega^2(\theta) = \frac{12}{5} \frac{g}{L} (1 - \cos \theta).$$

Derivando esta relación encontramos la aceleración angular, en efecto,

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{12}{5} \frac{g}{L} \sin \theta \dot{\theta}.$$

Pero $\dot{\theta} = \omega$, luego

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{6}{5} \frac{g}{L} \sin \theta.$$

Demostremos que el mismo resultado se puede obtener usando la “ecuación de movimiento” $\tau = d\ell/dt$. Cuando la varilla forma un ángulo θ con la normal, el torque respecto a un origen ubicado en el eje es

$$\tau = mgL \sin \theta + mg \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{3}{2}mgL \sin \theta.$$

Para el momento angular tenemos

$$\ell = m(L\omega)L + m \left(\frac{L}{2}\omega \right) \frac{L}{2} = \frac{5}{4}mL^2\omega.$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\frac{3}{2}mgL \sin \theta = \frac{5}{4}mL^2\dot{\omega},$$

de donde, nuevamente

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{6}{5} \frac{g}{L} \sin \theta.$$

Supongamos ahora que la varilla está pasando por la horizontal (es decir, $\theta = \pi/2$). En ese instante el centro de masas (que está ubicado a una distancia $3L/4$ del eje) acelera con una aceleración

$$\vec{a}_{\text{cm}} = -|a_t|\hat{z} - |a_c|\hat{x} = -\frac{3}{4}L\alpha\hat{z} - \omega^2 \left(\frac{3}{4}L\right)\hat{x} = -\frac{9}{10}g(\hat{z} + 2\hat{x}).$$

(Observe que la componente \hat{z} de la aceleración de la partícula m que está en el extremo de la varilla, cuando ésta pasa por la horizontal, es $6g/5$, o sea, mayor que g ; convéznase de que así debía ser). La fuerza neta que actúa sobre la varilla (cuando pasa por la horizontal) es

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{eje}} - 2mg\hat{z}.$$

Pero $\vec{F}_{\text{tot}} = (2m)\vec{a}_{\text{cm}}$, luego

$$\vec{F}_{\text{eje}} - 2mg\hat{z} = -2m\frac{9}{10}g(\hat{z} + 2\hat{x}),$$

de donde se deduce que

$$\vec{F}_{\text{eje}} = \frac{1}{5}mg(\hat{z} - 18\hat{x}).$$

Solución al problema 9

Denotemos por ϵ al ángulo que el péndulo hace respecto a su posición de equilibrio (ver figura 8.18).

El momento angular del péndulo será

$$\vec{\ell} = 2Lm(L\dot{\epsilon})\hat{x},$$

donde $\dot{\epsilon}$ es la velocidad angular del péndulo (siendo positiva cuando gira en la dirección contraria a los punteros del reloj). Derivando respecto al tiempo se deduce que

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 2mL^2\ddot{\epsilon}\hat{x}.$$

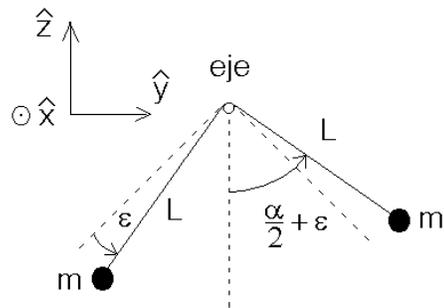


Figura 8.18

El torque de la fuerza gravitacional (respecto a un origen en el eje) es

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= mgL \sin(\alpha/2 - \epsilon)\hat{x} - mgL \sin(\alpha/2 + \epsilon)\hat{x} \\ &= -2mgL \cos(\alpha/2) \sin \epsilon \hat{x}\end{aligned}$$

Sustituyendo las dos relaciones anteriores en la ecuación de movimiento $\vec{\tau} = d\vec{\ell}/dt$ encontramos

$$-2mgL \cos(\alpha/2) \sin \epsilon = 2mL^2 \ddot{\epsilon} .$$

Para pequeñas oscilaciones en torno de la posición de equilibrio podemos usar la aproximación $\sin \epsilon \simeq \epsilon$. De esta manera obtenemos

$$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{g}{L} \cos(\alpha/2) \right) \epsilon = 0 .$$

Ésta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico cuyo período es

$$T = 2\pi \left[\sqrt{\frac{g}{L} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right]^{-1} .$$

Solución al problema 11

Al chocar con la viga la velocidad de la masa m será $\vec{v}_0 = -\sqrt{2gh}\hat{z}$. El choque con la viga es elástico y el hilo que une ambas masas (que no puede ejercer fuerzas transversales a su orientación) no interviene para nada en ese proceso. Luego la masa m rebotará con la velocidad $\sqrt{2mg}\hat{z}$. La otra masa no modifica su velocidad mientras ocurre el choque. Por lo tanto, justo después de la colisión, la velocidad del centro de masas (respecto a un observador junto a la viga) será nula.

Para un observador junto a la viga (en el lugar donde ocurrirá la colisión), el momento angular antes de la colisión es

$$\ell_i = Lm\sqrt{2gh} .$$

Después de la colisión será

$$\vec{\ell}_f = \vec{L}_{\text{cm}} + \vec{\ell}'_f ,$$

donde \vec{L}_{cm} es el momento angular debido a la traslación del centro de masas y $\vec{\ell}'_f$ es el momento angular observado desde el centro de masas. Ya que justo después de la colisión el centro de masas está en reposo, $\vec{L}_{\text{cm}} = \vec{0}$. Denotemos por ω_0 la velocidad angular del hilo después de la colisión, entonces

$$\ell'_f = 2m \left(\frac{L}{2} \omega_0 \right) \frac{L}{2} = \frac{mL^2}{2} \omega_0 .$$

Como el impulso que ejerce la viga no cambia el momento angular del sistema respecto al punto en que se aplica esa fuerza de percusión, se tiene que el momento angular debe conservarse. Luego

$$\frac{mL^2}{2} \omega_0 = Lm\sqrt{2gh} ,$$

de donde

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{8gh}}{L} .$$

En este problema el mismo resultado también se puede obtener usando la conservación de la energía. Después de la colisión, como el centro de masas está en reposo, toda la energía cinética se debe a la rotación, siendo ésta

$$K_r = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \omega_0 \right)^2 = \frac{1}{4} m L^2 \omega_0^2$$

Por otra parte, el cambio de energía potencial es

$$\Delta U = 2mgh .$$

Igualando ambas expresiones obtenemos nuevamente que

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{8gh}}{L} .$$

Después de ciertos momentos de reflexión, es claro que la caída de las dos masas en un campo gravitatorio constante, no afecta la tensión del hilo. Por lo tanto, la tensión de la cuerda se debe sólo al movimiento rotacional de las dos masas. El radio de giro de ellas es $L/2$. La magnitud de la fuerza centrípeta (que es igual a la tensión del hilo) es

$$F_{\text{cent}} = m \omega_0^2 \frac{L}{2} = 4mg \frac{h}{L} .$$

Capítulo 9

Rotación de un cuerpo rígido

versión 2 enero 2012

En los capítulos 7 y 8 hemos introducido conceptos necesarios para estudiar el comportamiento de cuerpos no puntuales. En efecto, a través de los conceptos de torque y momento angular, hemos podido formular el equivalente a la Segunda Ley de Newton para rotaciones, punto de partida para comprender la dinámica de cuerpos con estructura. Sin embargo, hasta el momento hemos sido o bien demasiado particulares (estudiando sistemas compuestos por una partícula, Sec. 8.1) o demasiado generales (estudiando sistemas compuestos por muchas partículas, sin restricciones adicionales, Sec. 8.2).

En este capítulo estudiaremos un sistema específico: rotaciones de un cuerpo rígido, es decir, un sistema compuesto de muchas partículas, tales que las distancias entre ellas no cambian. En particular, nos restringiremos a estudiar rotaciones de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo (que no cambia su orientación a medida que transcurre el tiempo), suficiente para obtener una serie de resultados muy importantes. El caso general, de rotaciones en torno a un eje no fijo, también se puede resolver, pero requiere un formalismo matemático que en este momento no tenemos, y por lo tanto será tratado en cursos más avanzados.

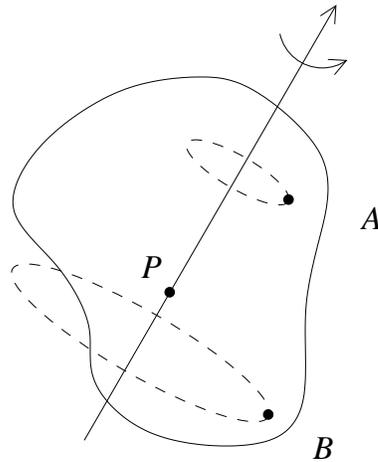
9.1. Las ecuaciones básicas

Estudiar en detalle la dinámica de un sistema de muchas partículas es un problema demasiado complejo, ya que cada una de las partículas tiene una ecuación de movimiento, y éstas en general están acopladas, de modo que el problema matemático consiste en resolver, digamos, N ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas, lo cual puede, o bien no tener solución analítica, o no ser soluble computacionalmente en un tiempo razonable.

Por ello, uno podría pensar que estudiar la dinámica de un cuerpo complejo como, por ejemplo, un lápiz, puede resultar una tarea titánica e inútil. Sin embargo, si

bien es cierto un lápiz está compuesto por muchísimas partículas, también es cierto que una buena aproximación es considerar que todas esas partículas mantienen distancias constantes entre sí. Es lo que llamamos un *sólido rígido*. Interesantemente, esta restricción simplifica enormemente la descripción del sistema, como veremos.

En efecto, recordemos primero que, para un sistema arbitrario, la segunda ley de Newton nos permite, conocidas las fuerzas externas, determinar completamente el movimiento del centro de masas. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos considerar que el centro de masas está en reposo. Esto, para un sistema genérico como una nube de gas o un fluido puede no ayudar mucho, porque aún las partículas tendrían una gran libertad de movimiento. Pero para un sólido rígido, la condición de que el centro de masas esté en reposo significa que el único movimiento posible que queda son rotaciones en torno al centro de masas, como muestra la siguiente figura:



En la figura anterior, P representa el centro de masas, y se ha dibujado también el *eje de rotación*. En primer lugar, debe ser claro que *existe* un eje de rotación, es decir, que para una rotación arbitraria siempre se puede encontrar un eje respecto a la cual dicha rotación se realiza. Lo segundo que debe ser claro es que el centro de masas *debe* estar sobre dicho eje de rotación. Esto sucede porque el centro de masas está en reposo, como ya hemos dicho. Así que la figura anterior representa una situación completamente general. El tercer punto a notar es que si escogemos un punto arbitrario del cuerpo, digamos A , entonces necesariamente, por tratarse el movimiento de una rotación, el punto A describe una trayectoria circular. Más aún, si escogemos cualquier otro punto, por ejemplo B , ambas trayectorias deben ser círculos en planos *paralelos* entre sí. Notemos cómo ésta es una consecuencia de que todas las partículas mantengan distancias constantes entre sí.

Ahora bien, es claro también que si el cuerpo es rígido, no importa cuán lejos estén del eje de rotación las partículas A , B , o cualquier otra, todas deben completar sus respectivas trayectorias circulares en *el mismo tiempo*. Ninguna puede retrasarse respecto a las demás. Todo el cuerpo completa un giro en un tiempo dado. Esto

es muy importante, porque nos permite observar que, no importa qué punto del cuerpo consideremos, hay una cantidad física que es común a todos: la magnitud de la frecuencia angular. Cada punto está a una distancia dada del eje, y por lo tanto sus radios de giro serán en general diferentes; consecuentemente, sus velocidades tangenciales serán en general diferentes, ya que deben completar un giro en el mismo tiempo, y por ende los puntos más lejanos al eje de rotación deben desplazarse más rápido. Pero la frecuencia angular es la misma: todos los puntos deben completar un giro, es decir, deben barrer un ángulo igual a 2π , o una fracción arbitraria de 2π , en el mismo tiempo.

Pero la frecuencia angular en realidad es un vector. Para un movimiento circular, recordemos, la dirección de la frecuencia angular se asigna de acuerdo a la regla de la mano derecha, y es perpendicular al plano de giro de la partícula. Y como hemos observado, todos los puntos del cuerpo describen trayectorias circulares en planos paralelos entre sí, por lo tanto concluimos que no sólo la magnitud de la frecuencia angular es la misma para todos los puntos, sino también su dirección, que de hecho es paralela al eje de rotación.

Éste es entonces el primer hecho significativo que podemos afirmar, con completa generalidad, para el movimiento de un sólido rígido: siempre se puede considerar que dicho movimiento consiste en una rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masas; dicha rotación puede ser caracterizada por una única frecuencia angular $\vec{\omega}$, cuya dirección está dada por la regla de la mano derecha (para determinarla se puede utilizar cualquier punto del cuerpo), y es paralela al eje de rotación.

Todo lo que hemos dicho hasta el momento es completamente general, una vez que decidimos que estamos trabajando con un sólido rígido, y que el centro de masas está en reposo. Sin embargo, el análisis de este movimiento aún puede ser bastante complicado, por dos razones: en primer lugar, sólo hemos observado que la trayectoria de cada punto debe ser circular, pero eso no significa que tenga que ser uniforme. En otras palabras, el módulo de la frecuencia angular no tiene por qué ser constante. Nosotros ya sabemos que si hay una aceleración angular, significa que hay un torque, de modo que, en principio, tenemos las herramientas analíticas para estudiar el caso de aceleración angular no nula, y lo haremos en este capítulo, si bien es cierto en muchos casos consideraremos sólo el caso en que la aceleración angular es cero. En segundo lugar, la frecuencia angular puede no ser constante no sólo en su magnitud, sino también en su dirección. Esto significa que el eje de rotación puede no ser constante. Cuando esto sucede, es necesario introducir conceptos adicionales como precesión y nutación, y el estudio analítico de las rotaciones de un cuerpo rígido se complica enormemente. Es posible hacerlo, pero ello será materia de cursos más avanzados.

En este capítulo, entonces, estudiaremos las rotaciones de un cuerpo rígido en torno a un eje constante.

Consideremos, pues, un cuerpo sólido, que gira con velocidad angular ω_0 en torno

a un eje fijo que elegiremos como el eje \hat{z} . El origen lo elegimos en algún lugar sobre el eje. (Observar que el origen de coordenadas no tiene que ser necesariamente el centro de masas.) El vector velocidad angular se puede escribir entonces en la forma:

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{z},$$

donde $\omega_0 = |\vec{\omega}_0|$. La dirección de $\vec{\omega}_0$ se elige usando la regla de la mano derecha: si los dedos curvados indican la dirección de rotación, entonces el pulgar muestra la dirección en que apunta $\vec{\omega}_0$. A esa dirección la hemos llamado \hat{z} , sin pérdida de generalidad.

Para ser concretos, supongamos que el sólido consta de N masas m_j ($j = 1, 2, \dots, N$), ubicadas en los puntos \vec{r}_j , unidas por varillas rígidas sin masa (ver figura 9.1).

El vector posición de cada partícula se puede descomponer como sigue:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_{\perp j} + z_j \hat{z}.$$

La magnitud $r_{\perp j} = |\vec{r}_{\perp j}|$ es la distancia de la masa m_j al eje de giro.

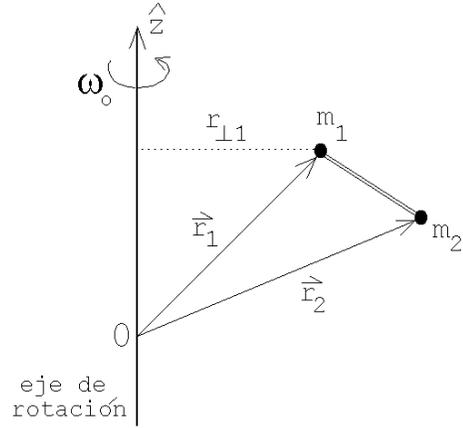


Figura 9.1

Para determinar la velocidad de cada masa, notamos nuevamente que cada una describe un movimiento circular en torno al eje \hat{z} , con frecuencia angular ω_0 . Por lo tanto, la rapidez de la masa j es

$$v_j = r_{\perp j} \omega_0.$$

En cuanto a la dirección, notamos que, para la figura anterior, \vec{v}_j apunta en la dirección que entra al plano de la hoja, y que por tanto es perpendicular tanto a $\vec{\omega}_0$ como a $\vec{r}_{\perp j}$. Se sigue entonces que, en general,

$$\vec{v}_j = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_j.$$

Ahora podemos evaluar la energía cinética del sólido y también la componente del momento angular que apunta a lo largo del eje de rotación.

La energía cinética (debido a la rotación del sólido) viene dada por la suma de

las energías cinéticas de cada una de las masas, o sea:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j v_{\perp j}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 \right) \omega_0^2 \end{aligned}$$

Observe que las coordenadas z_j de las distintas masas no intervienen en la expresión para la energía cinética. Algo similar ocurre al evaluar la componente z del momento angular. Para una sola partícula, el momento angular es

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ &= m\vec{r} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) \\ &= m\vec{\omega}_0 r^2 - m\vec{r}(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}) \\ &= m\omega_0 r^2 \hat{z} - m\vec{r}\omega_0 z \\ &= m\omega_0 r^2 \hat{z} - m(z\hat{z} + \vec{r}_{\perp})\omega_0 z \\ &= m\omega_0 (r^2 - z^2) \hat{z} - m\omega_0 z\vec{r}_{\perp} \\ &= m\omega_0 r_{\perp}^2 \hat{z} - m\omega_0 z\vec{r}_{\perp} . \end{aligned}$$

La componente z del momento angular es entonces

$$\ell_z = m r_{\perp}^2 \omega_0 .$$

La componente z del momento angular de todas las partículas que componen el sólido es, por lo tanto,

$$L_z = \left(\sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 \right) \omega_0 .$$

En dos ocasiones ya nos ha aparecido la expresión $\sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2$. Es útil definir explícitamente este concepto: Definiremos el *momento de inercia* del sólido en torno a un eje por

$$I \equiv \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 .$$

De esta manera la energía cinética y la componente del momento angular paralela al eje de rotación vienen dadas por

$$K = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

y

$$L_z = I \omega_0 .$$

Observemos que, gracias al concepto de momento de inercia, es posible escribir la energía cinética y el momento angular (en torno al eje de rotación) de modo análogo a la energía cinética y el momento lineal de una *única* partícula de masa m y velocidad v_0 , reemplazando la velocidad por velocidad angular, momento lineal por momento angular, y *reemplazando la masa por el momento de inercia*. En otras palabras, el momento de inercia es el equivalente al concepto de masa cuando estudiamos rotaciones de un cuerpo rígido.

Lo anterior también es cierto cuando la aceleración angular no es cero. En efecto, si sobre un sistema aplicamos un torque en la dirección z , entonces cambiará la componente z de su momento angular de acuerdo a la relación

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega_0}{dt} = I \dot{\omega}_0 .$$

Nuevamente, este resultado es equivalente al de una partícula, reemplazando las cantidades “lineales” por “rotacionales” (velocidad lineal por velocidad angular, fuerza por torque, masa por momento de inercia). Y lo importante es que ahora, dado el momento de inercia (que siempre se puede evaluar conocida la distribución de las partículas que forman el cuerpo), conociendo el torque sobre el cuerpo podemos evaluar su aceleración angular.

En el capítulo anterior demostramos que el momento angular de un sólido que se mueve en el espacio, respecto a un origen O se puede escribir como una suma de dos contribuciones: i) el momento angular debido a la traslación del sistema como un todo, es decir, el movimiento del centro de masas con toda la masa concentrada en ese lugar y, ii) el momento angular (rotacional intrínseco) del sistema, \vec{L}' , visto desde el centro de masas, es decir,

$$\vec{L} = \vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} + \vec{L}' .$$

Mostraremos a continuación que se tiene una expresión análoga para la energía cinética. Sea \vec{v}_j la velocidad de la partícula j medida desde un sistema de referencia O , \vec{v}_j' la velocidad de la misma partícula pero vista desde el sistema de referencia fijo al centro de masas y \vec{V}_{cm} la velocidad del centro de masas. Entonces se tiene que

$$\vec{v}_j = \vec{v}_j' + \vec{V}_{cm} .$$

La energía cinética (para el observador O) es

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j v_j^2 .$$

A partir de las dos últimas ecuaciones se encuentra que

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\vec{v}_j' + \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_j' + \vec{V}_{cm}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j'^2 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}_j' + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{V}_{cm}^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j'^2 + \vec{V}_{cm} \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j' \right) + \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 \quad (9.1)
\end{aligned}$$

El primer término al lado derecho de la última ecuación es la energía cinética del sólido vista desde el centro de masas, o sea, corresponde a la energía cinética debido a la rotación intrínseca del sólido. Como vimos al inicio de la presente sección, esta energía cinética la podemos escribir de la forma

$$K' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j v_j'^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2.$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (11.16) es nulo ya que $(\sum m_j \vec{v}_j')/M$ es la velocidad del centro de masas vista desde el centro de masas. Por último, el tercer término del lado derecho de la ecuación (11.16) es la energía cinética de traslación del sólido como un todo. Concluimos que la ecuación (11.16) se puede escribir de la forma

$$K = \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2.$$

9.2. Una notación útil

Al calcular el momento angular de una partícula apareció la expresión $\vec{r} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r})$, y de hecho aparece habitualmente en el estudio de rotaciones. En este caso particular, ya habíamos obtenido, en el Cap. 3, una expresión analítica para este producto, pero recordemos que obtenerla en coordenadas cartesianas fue un proceso bastante engorroso. Debido a que este tipo de expresiones vectoriales, y otras más complejas, aparecen con mucha frecuencia, es conveniente introducir un modo más expedito de obtener expresiones analíticas para ellas.

La clave de todo será introducir una nueva notación. Para ello, notemos primero que un vector es conocido si se conocen sus tres coordenadas cartesianas, cada una de las cuales podemos rotular con un índice i , donde $i = 1$ corresponde a la dirección \hat{x} , $i = 2$ a \hat{y} e $i = 3$ a \hat{z} . Si designamos como \hat{x}_i a los correspondientes vectores unitarios

($\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$ y $\hat{x}_3 = \hat{z}$), entonces podemos escribir un vector en la forma:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{x}_i .$$

Lo que proponemos ahora es que, si acordamos que siempre vamos a trabajar en coordenadas cartesianas, y que siempre trabajaremos en tres dimensiones, entonces indicar los vectores \hat{x}_i es “redundante” (porque esa información ya está en el subíndice de la coordenada A_i), y la suma también es “redundante” (porque siempre se entiende que un vector es una suma de tres términos, con $i = 1, 2$ y 3). Por lo tanto, la propuesta es representar un vector con sus coordenadas, de la siguiente forma:

$$\vec{A} \longrightarrow A_i .$$

Un vector, entonces, será representado como una cantidad con un índice. Esto es interesante, porque pone de manifiesto que un vector se puede considerar simplemente como una colección de tres números, A_1 , A_2 y A_3 . Pero además, permite una generalización inmediata a otros objetos matemáticos. Por ejemplo, una matriz será una colección de nueve números, ordenados en tres filas y tres columnas. En nuestra nueva notación, podemos representarlo como un objeto con dos índices, i y j , cada uno de los cuales va de uno a tres, como en el caso de los vectores:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow A_{ij} .$$

A la inversa, un objeto con ningún índice representará un único número, es decir, un escalar.

En resumen, en esta notación, tenemos las siguientes asociaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{escalar} & A \\ \text{vector} & A_i \\ \text{matriz} & A_{ij} \end{array}$$

Notemos ahora que el producto escalar se puede escribir:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i .$$

Aquí, tenemos un índice repetido (i) y una suma sobre él, desde 1 hasta 3. Como todas las sumas van desde 1 a 3, vamos a simplificar la notación del siguiente modo:

$$\sum_{i=1}^3 A_i B_i \equiv A_i B_i .$$

La convención será entonces la siguiente:

Cada vez que aparezcan índices repetidos en una expresión, se entenderá que hay una suma sobre dicho índice, y que en dicha suma el índice repetido recorre los valores 1, 2 y 3.

Esta convención puede parecer una trivialidad, pero el hecho es que resulta extraordinariamente útil para realizar cálculos complejos que involucran vectores o matrices. Fue introducida por Einstein, en el contexto de su Teoría de la Relatividad General, y se conoce por ello como *notación de Einstein* o *convención de suma de Einstein*.

A un índice repetido se dice que es un índice *contraído*. Así, la convención de suma de Einstein indica simplemente que *índices contraídos se suman*. A un índice que no está repetido se le denomina un índice *libre*.

Con la notación de Einstein, entonces, el producto escalar entre dos vectores se escribe:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i .$$

Notemos que el índice de suma (i) podría llamarse de cualquier otra manera, sin afectar el resultado final ($\sum_i A_i B_i = \sum_j A_j B_j$). En notación de Einstein:

$$A_i B_i = A_j B_j .$$

Técnicamente, se dice que un índice contraído o de suma es *mudo*, y podemos cambiarlo por cualquier otro (mientras el nuevo índice no se esté usando en otra parte de la misma expresión porque, recordemos, índices repetidos se deben sumar).

Observemos también que la expresión $A_i B_i$ involucra expresiones con un índice (vectores), pero el resultado es un escalar, un objeto que como sabemos no tiene índices. ¡Pero esto es perfectamente consistente dentro de nuestra notación! En efecto, los únicos índices vectoriales están contraídos (no son libres), y como eso implica que se debe sumar sobre ellos, pierden su identidad, al punto que podrían llamarse de cualquier otro modo y no importaría.

Entonces, podemos reformular las asociaciones que hicimos anteriormente:

- Un escalar, en realidad, será cualquier objeto sin índices libres (a , $a_i b_i$, $a_i b_i c_j d_j$, etc.).
- Un vector será cualquier objeto con sólo un índice libre (a_i , $a_i b_j c_j$, etc.).
- Una matriz será cualquier objeto con dos índices libres (a_{ij} , $a_i b_j$, $a_{ij} b_j c_k$, etc.).

Para escribir el producto cruz con notación de Einstein, necesitamos escribir una cantidad adicional:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j A_k .$$

ϵ_{ijk} es un objeto con tres índices, uno más que una matriz. Podemos imaginarlo como una matriz en tres dimensiones. A estos objetos con tres o más índices se les

denomina *tensores*. El objeto ϵ_{ijk} necesario para definir el producto cruz es el *tensor de Levi-Civita*, y se define como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación cíclica de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación anticíclica de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{en otro caso (i.e., si algunos de los índices son iguales entre sí)} \end{cases}$$

En general, la denominación de tensores se puede utilizar para objetos con cualquier número de índices, de modo que escalares, vectores y matrices se pueden considerar como casos particulares de tensores.

Ejercicio: Muestre que con la definición del tensor de Levi-Civita y la notación de Einstein, $\epsilon_{ijk}A_iB_j$ corresponde efectivamente a la coordenada i del producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$.

El producto de dos tensores de Levi-Civita (contraídos en su primer índice) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} ,$$

donde δ_{ij} es la *delta de Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j . \\ 0 & \text{si } i \neq j . \end{cases}$$

Ejercicio: Con las definiciones anteriores, recupere la expresión demostrada en el Cap. 3:

$$\left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i = \left[\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \right]_i .$$

9.3. Momento de inercia

Ya hemos observado, en la Sec. 9.1, que el momento de inercia es de vital importancia para describir las rotaciones de un sólido, ya que equivale al concepto de masa. Para un sólido constituido de N masas discretas (unidas rígidamente con varillas sin peso), el momento de inercia viene dado por

$$I = \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 .$$

Para distribuciones de masa continua, la expresión anterior debe sustituirse por una con integrales que adecuadamente describa la situación. Por ejemplo: si un cuerpo

sólido viene descrito por una densidad de masa $\rho(x, y, z) = \rho(\vec{r})$, entonces el momento de inercia en torno al eje \hat{z} viene dado por

$$I = \int_{\text{Sólido}} (x^2 + y^2) \rho(\vec{r}) \, dx \, dy \, dz \quad .$$

En la última expresión $(x^2 + y^2)$ es el cuadrado de la distancia al eje de la masa del volumen $d^3r = dx \, dy \, dz$ ubicado en el lugar \vec{r} .

A continuación evaluaremos algunos momentos de inercia sencillos, para cuerpos homogéneos y con al menos un eje de simetría. En varios casos, observaremos que podemos encontrar el momento de inercia fácilmente dividiendo un cuerpo complicado en cuerpos más sencillos con momento de inercia conocido.

Ejemplo 1:

Evaluemos el momento de inercia de una varilla de largo L y masa M en torno a un eje que pasa perpendicularmente por uno de sus extremos (ver figura 9.2).

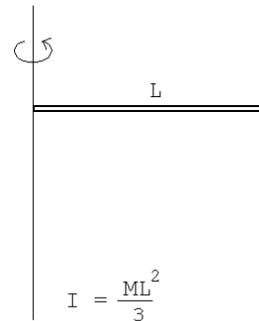


Figura 9.2

La densidad lineal de la varilla es $\lambda = M/L$. El trozo de varilla de largo dx que se encuentra a una distancia x del eje tiene una masa igual a λdx y su contribución al momento de inercia es $x^2 \lambda dx$. Sumando todas las contribuciones desde $x = 0$ hasta $x = L$ se obtiene

$$I = \int_0^L \lambda x^2 \, dx = \lambda \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L \right) = \frac{\lambda L^3}{3} \, ,$$

o sea

$$I = \frac{ML^2}{3} \, .$$

Ejemplo 2:

Evaluemos el momento de inercia de un anillo de radio R y masa M en torno a un eje que pasa perpendicularmente por el centro (ver figura 9.3).

Como toda la masa del anillo está a la distancia R del eje, el momento de inercia es simplemente

$$I = MR^2 .$$

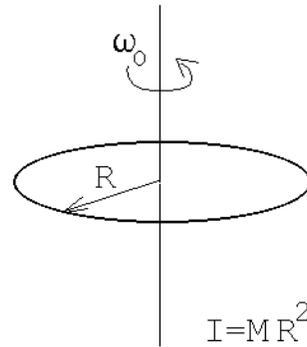


Figura 9.3

Ejemplo 3:

Evaluemos el momento de inercia de un disco uniforme de radio R y masa M en torno a un eje que pasa perpendicularmente por el centro (ver figura 9.4). La densidad superficial del disco viene dada por $\sigma = M/(\pi R^2)$. Para encontrar el momento de inercia subdividiremos el disco en anillos infinitesimales.

El momento de inercia dI de un anillo de radio r y ancho dr viene dado por (ver ejemplo anterior)

$$dI = (\text{masa del anillo}) \cdot r^2 .$$

Pero la masa de tal anillo es

$$(\text{masa del anillo}) = \sigma 2\pi r dr ,$$

luego

$$dI = 2\pi\sigma r^3 dr .$$

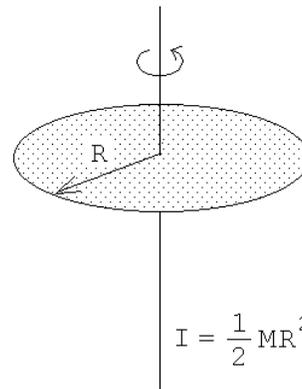


Figura 9.4

Sumando la contribución de todos los anillos desde $r = 0$ hasta $r = R$ se encuentra

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi\sigma}{2} R^4 .$$

Sustituyendo la expresión para σ se obtiene finalmente

$$I = \frac{MR^2}{2} .$$

Notemos que el momento de inercia es menor que en el caso del anillo, lo cual es esperable, ya que ahora la masa se encuentra distribuida a distancias menores o iguales que R .

Observemos que en todos los ejemplos estudiados, se repite una característica común: el momento de inercia siempre resulta tener, al menos para estos cuerpos sencillos, la siguiente forma: masa, multiplicada por el cuadrado de una longitud característica del cuerpo (longitud de la barra, radio del aro, etc.), por un factor numérico (que depende de la geometría del cuerpo).

Ejemplo 4:

Encontremos el momento de inercia de una esfera uniforme de radio R y masa M alrededor de un eje que pasa por el centro.

La densidad de masa de la esfera viene dada por

$$\rho_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} .$$

Para encontrar el momento de inercia de una esfera supongamos que ella está constituida por numerosos discos infinitesimales de grosor dz (ver figura 9.5). El radio del disco infinitesimal que se encuentra a una altura z viene dado por $\sqrt{R^2 - z^2}$. El área de tal disco es por lo tanto

$$A = \pi(R^2 - z^2) .$$

Para la masa dM (que es el volumen del disco infinitesimal multiplicado por su densidad) se obtiene

$$dM = \rho_0 \pi(R^2 - z^2) dz .$$

La contribución de tal disco al momento de inercia de la esfera es (ver ejemplo 3)

$$dI = \frac{1}{2}dM (R^2 - z^2) = \frac{\rho_0\pi}{2} (R^2 - z^2)^2 dz .$$

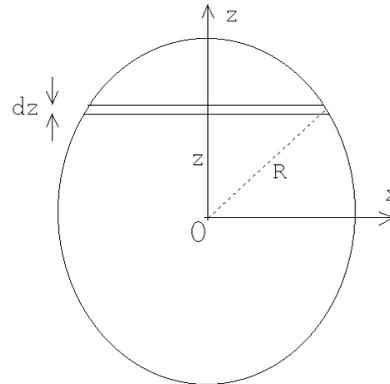


Figura 9.5

Sumando la contribución de todos los discos desde $z = -R$ hasta $z = R$ se encuentra

$$\begin{aligned}
 I = \int dI &= \int_{-R}^R dI = \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz \\
 &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz \\
 &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \left(R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{-R}^R \\
 &= \frac{\rho_0 \pi}{2} 2 \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) \\
 &= \rho_0 \pi R^5 \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para ρ_0 se obtiene finalmente

$$I = \frac{2}{5} M R^2 .$$

Nuevamente, el momento de inercia tiene la forma observada: la masa, por el cuadrado de una distancia característica (el radio de la esfera), por un factor numérico.

Ejemplo 5:

Evaluemos el momento de inercia de una esfera hueca de radio interno R_i y radio externo R_e , hecha de un material de densidad uniforme ρ_0 , para un eje que pasa por el centro.

Es fácil resolver este problema si se observa que la esfera hueca se puede pensar como dos esferas concéntricas sobrepuestas: una de radio R_e con densidad ρ_0 y otra de radio R_i con densidad negativa $-\rho_0$.

El momento de inercia de esta superposición (que coincide con la de la esfera hueca) viene dado por (ver ejemplo 4)

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho_0 R_e^5 + \frac{8}{15} \pi (-\rho_0) R_i^5 = \frac{8}{15} \pi \rho_0 (R_e^5 - R_i^5) .$$

Expresemos el resultado también en términos de la masa de la esfera hueca, que es:

$$M = \frac{4}{3} \pi (R_e^3 - R_i^3) \rho_0 .$$

Sustituyendo esta relación en la expresión para el momento de inercia se encuentra

$$I = \frac{2}{5} M \frac{(R_e^5 - R_i^5)}{(R_e^3 - R_i^3)} .$$

Para $R_i \rightarrow 0$, se recupera, tal como debe ser, el resultado del ejemplo anterior.

En este caso, el cuerpo no tiene una única longitud característica (hay un radio interno y uno externo), de modo que el momento de inercia no tiene exactamente la misma forma observada en los casos anteriores.

Ejemplo 6:

Evaluemos el momento de inercia de una cáscara esférica de radio R y masa M , para un eje que pasa por el centro.

Para resolver este problema usamos el resultado del ejemplo anterior, evaluándolo en el límite $R_i \rightarrow R_e$. Para encontrar este límite pongamos $R_i = R_e - \epsilon$ con ϵ muy pequeño. Se tiene:

$$\begin{aligned} R_e^3 - R_i^3 &= R_e^3 - (R_e - \epsilon)^3 \\ &= R_e^3 - R_e^3 \left(1 - \frac{\epsilon}{R_e}\right)^3 \\ &\simeq R_e^3 - R_e^3 \left(1 - 3\frac{\epsilon}{R_e}\right) \\ &\simeq 3R_e^2\epsilon. \end{aligned}$$

De la misma manera se encuentra que

$$R_e^5 - R_i^5 = 5R_e^4\epsilon.$$

Reemplazando estos resultados en la expresión para el momento de inercia, e igualando R_e con R , se encuentra (para el momento de inercia de una cáscara esférica)

$$I = \frac{2}{3}MR^2.$$

Ejemplo 7:

Evaluemos el momento de inercia de un anillo de radio r y masa M en torno a un eje que coincide con un diámetro del anillo (ver figura 9.6).

Para resolver este problema subdividamos el anillo en numerosos sectores angulares infinitesimales. La densidad lineal del anillo es $\lambda = M/(2\pi R)$. La masa del anillo del sector comprendido entre ϕ y $\phi + d\phi$ es $\lambda r d\phi$. Su contribución al momento de inercia del anillo es

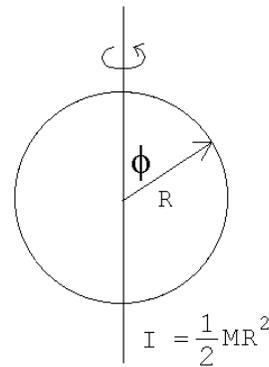


Figura 9.6

$$dI = \lambda R d\phi (R \sin \phi)^2 .$$

Sumando la contribución de todos los sectores (desde $\phi = 0$ hasta $\phi = 2\pi$) se obtiene

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \lambda R^3 \sin^2 \phi d\phi .$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi ,$$

luego

$$I = \lambda R^3 \pi = \frac{1}{2} MR^2 .$$

Notemos que, de acuerdo a lo observado anteriormente, el momento de inercia debía ser proporcional a MR^2 , igual que en el ejemplo 2. Sin embargo, ahora el eje en torno al cual se calcula el momento de inercia es distinto, y eso tiene el efecto de cambiar el factor numérico involucrado. Notemos, además, que en el ejemplo 2 toda la masa estaba a una distancia R del eje, y ahora toda la masa está a una distancia menor o igual que R . Por lo tanto, era esperable que el momento de inercia fuese menor que en el ejemplo 2.

Problema resuelto en clases: 9.1

Problema resuelto en clases: 9.15

(Generalizado para un péndulo físico arbitrario)

Problema resuelto en clases: 9.10

Problema resuelto en clases: 9.14

(No exactamente, sino discutir el problema del lanzamiento vertical de distintos objetos rotando, y cómo la energía rotacional crece a expensas de la traslacional.)

Discusión de la técnica de patinadoras y clavadistas para aumentar su velocidad de rotación.

Problema resuelto en clases: 9.35

9.4. Problemas

1. (Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos.) Demuestre que el momento de inercia I para las rotaciones de un cuerpo sólido alrededor de un eje L es

$$I = I_0 + M R^2 ,$$

donde I_0 es el momento de inercia para rotaciones del sólido alrededor del eje paralelo a L que pasa por el centro de masas y R es la distancia de separación de los dos ejes.

2. Encuentre el momento de inercia de las superficies, de densidad superficial uniforme σ_0 , mostrados en la figura 9.7 y en torno a los ejes ahí indicados.

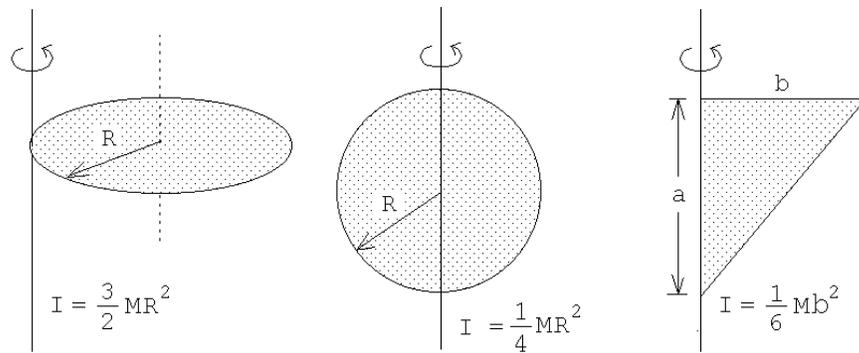


Figura 9.7

3. Considere un sistema de dos masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r . Demuestre que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masas en forma perpendicular a la línea que los une, viene dado por μr^2 , donde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema.
4. Encuentre el momento de inercia de los alambres, de densidad lineal uniforme λ_0 , mostrados en la figura 9.8 y en torno a los ejes ahí indicados.

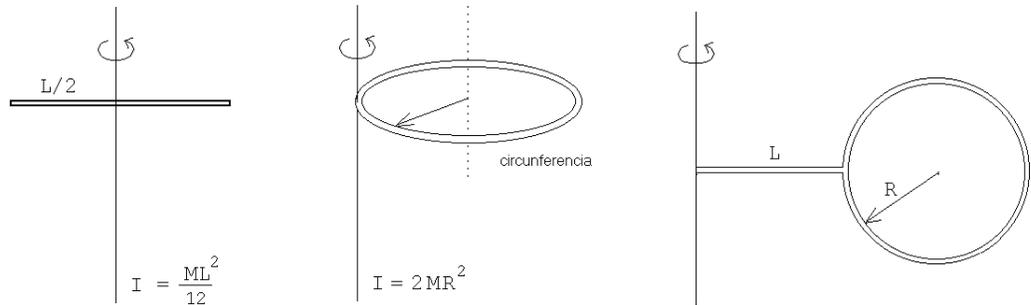


Figura 9.8

5. La molécula de metano consiste de un átomo de carbono localizado al centro de un tetraedro regular cuyos vértices están ocupados por 4 átomos de hidrógeno. La distancia C—H es de 1.08 Å. (1 Å= 10⁸ cm). ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula de metano para una rotación alrededor de un eje C—H? Las masas de los átomos de hidrógeno y carbono son: $m_H=1.68 \cdot 10^{-27}$ Kg y $m_C=19.9 \cdot 10^{-27}$ Kg, respectivamente.

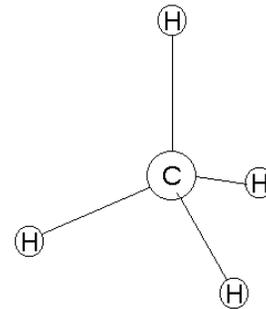


Figura 9.9

6. Una esfera sube rodando un plano inclinado en 30°. Cuando la esfera se encuentra al pie del plano, su centro de masas se traslada con una velocidad de 5 m/s. ¿Hasta dónde subirá la esfera por el plano inclinado? ¿Cuánto tiempo tardará en regresar al punto de partida?
7. Se enrolla una cuerda alrededor de la plataforma de un carrusel de radio $R = 2$ m para echarlo andar. Durante 10 s se tira de la cuerda con una fuerza de 200 N. Durante ese tiempo el carrusel da una vuelta completa. ¿Cuál es el momento de inercia del carrusel?

Respuesta: $I = 3183 \text{ kg m}^2$.

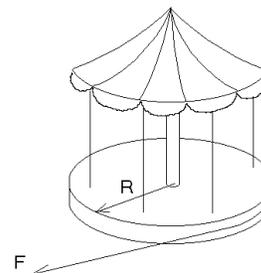


Figura 9.10

8. Los dos discos mostrados en la figura adjunta tienen masas m y radios R iguales. El disco superior puede rotar libremente alrededor de su eje. Una cuerda está enrollada alrededor de ambos discos. Encuentre:

- La aceleración del centro de masas del disco inferior.
- La tensión de la cuerda.
- La aceleración angular de cada disco alrededor de su centro de masas.

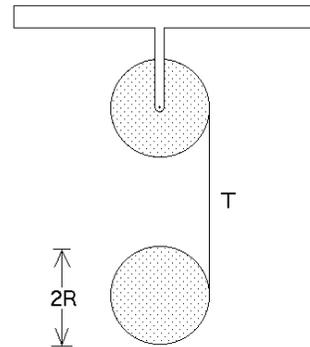


Figura 9.11

9. Una esfera de densidad uniforme ρ_0 y radio r rueda sin deslizarse a lo largo de una vía que posee una vuelta circular de radio R (ver figura 9.12). La esfera inicia su movimiento partiendo, del reposo, desde una altura h . ¿Cuál es la mínima altura h requerida para que la esfera no deje la vía? ¿Cuál sería la altura h si la bola en lugar de rodar se desliza resbalando?

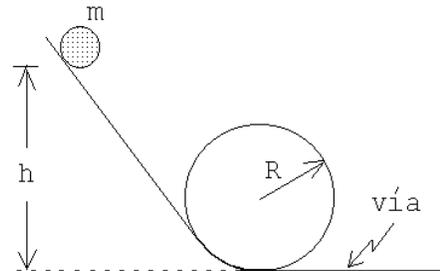


Figura 9.12

Respuesta: $h = 27(R - r)/10$.

10. Una bola de palitroque, de radio R y masa M , se lanza de manera que inicialmente resbale (sin que ruede) con velocidad v_0 . Si el coeficiente de roce entre el suelo y la bola es μ , ¿qué distancia recorrerá la bola antes de que ruede sin resbalar? ¿Cuál es su velocidad final?

Respuesta: $v_f = 5v_0/7$.

11. Considere dos poleas (discos) de masas m_1 , m_2 y radios R_1 , R_2 , respectivamente. Con estas poleas se realiza el montaje mostrado en la figura adjunta (la cuerda está enrollada en torno a la polea # 2). Encuentre la aceleración de la masa M .

Respuesta:

$$a = -g \frac{M + m_1}{M + \frac{3}{2}m_1 + 2m_2}.$$

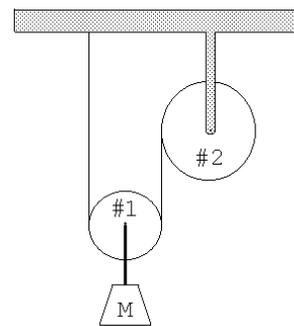


Figura 9.13

12. Una varilla de largo L y masa M puede rotar libremente alrededor de un pivote A . Una bala de masa m y velocidad v impacta contra la varilla en un punto P alejado una distancia a desde el pivote, quedando incrustada en ella.

- Encuentre el momento angular alrededor del punto A inmediatamente antes y después de la colisión.
- Determine el momento lineal del sistema inmediatamente antes y después de la colisión.
- ¿Cuál es el valor Q de la colisión, es decir, cuánta energía es disipada durante el proceso?

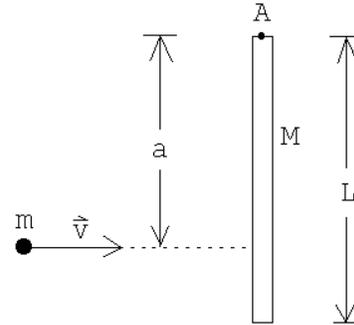


Figura 9.14

13. Dos niños, cada uno de masa M , están sentados en los extremos de una barra horizontal de largo L y masa m . La barra gira inicialmente con una velocidad angular ω_0 alrededor de un eje vertical que pasa por su centro.

- ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve una distancia d hacia el centro de la barra (sin tocar el suelo)?
- ¿En cuánto cambiará la energía cinética de rotación del sistema?

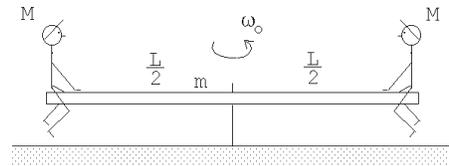


Figura 9.15

14. Una esfera, un disco y un aro, hechos de materiales homogéneos, tienen el mismo radio R y la misma masa M . Los tres objetos se dejan libres desde la parte superior de un plano inclinado. Los tres objetos parten desde el reposo y ruedan sin resbalar. El plano tiene un largo L y su inclinación respecto a la horizontal es α .

- ¿Cuáles son sus velocidades al llegar al pie del plano inclinado?
- Encuentre la fuerza de roce f_r en cada caso.
- ¿Cuánto tarda cada uno de los objetos en llegar a la parte inferior?

15. Un aro circular de radio R oscila en torno a un eje horizontal que pasa por A (ver figura). El eje es normal al plano del aro.

- a) ¿Cuál sería el largo de un péndulo simple con igual período de oscilación que el del aro? (Haga el análisis sólo para pequeñas oscilaciones.)
- b) Se desea que el aro dé una vuelta completa alrededor de A . ¿Cuál es la mínima velocidad angular que debe poseer el aro, en la parte inferior, para que esto sea posible?

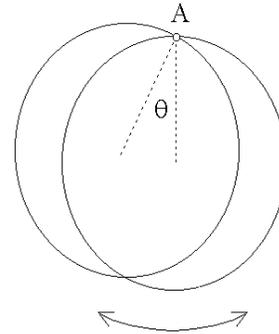


Figura 9.16

16. Un aro circular de masa m y radio R descansa sobre una superficie horizontal sin roce (ver figura, vista desde arriba). Contra el aro se dispara tangencialmente una bala con velocidad \vec{v}_0 , cuya masa también es m . La bala queda incrustada en el aro.

- a) Describa el movimiento del sistema después del choque.
- b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas del sistema antes y después del choque?
- c) ¿Cuál es el momento angular del sistema respecto a su centro de masas antes del choque?
- d) ¿Cuál es la velocidad angular con que gira el sistema después del choque?
- e) ¿Cuánta energía cinética se pierde en el choque?

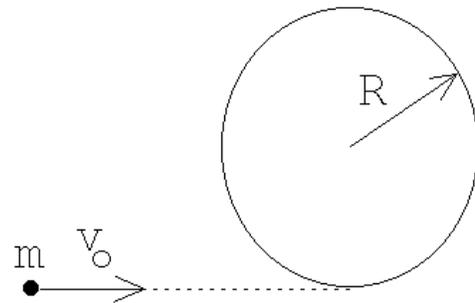


Figura 9.17

17. Un aro de masa M y radio r , rueda sin resbalar por la superficie interior de una cinta circular fija de radio R (ver figura 9.18). Encuentre el período de este movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la vertical.

Respuesta:

$$T = (2\pi)/\omega_0 \quad , \quad \text{con} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{2(R-r)} .$$

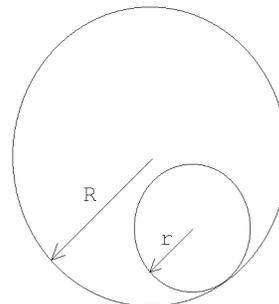


Figura 9.18

18. Considere la máquina de Atwood mostrada en la figura adjunta. La polea consta de un disco uniforme de masa m (que coincide con el valor de la masa más pequeña colgada de la máquina) y radio R . El momento de inercia para rotaciones en torno al eje de un disco es $I = mR^2/2$. El roce entre la cuerda y la polea hace que esta última gire mientras las masas estén en movimiento. Suponga que la cuerda no tiene masa y que no desliza sobre la polea. La masa $2m$ parte del reposo desde una altura h .

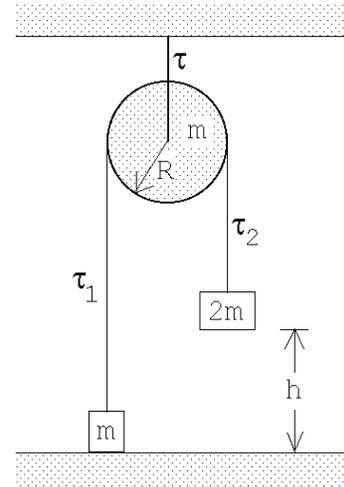


Figura 9.19

- Usando el teorema de conservación de la energía, encuentre la velocidad de la masa $2m$ cuando ésta llega al suelo.
 - Encuentre la tensión de la cuerda a ambos lados de la máquina de Atwood. Es decir, encuentre τ_1 y τ_2 en función de m , g y R . (Cuando el momento de inercia de la pulea no se puede despreciar (lo que es el caso del presente problema) entonces la tensión de la cuerda no es la misma a ambos lados de la pulea.)
 - Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la pulea mientras las masas están en movimiento.
 - Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la pulea después de que la masa $2m$ llegá al suelo (y todas las componentes de la máquina de Atwood están en reposo).
19. Considere dos poleas fijas unidas por una correa (o cadena) de transmisión tal como se muestra en la figura adjunta. Una masa M colgada por una cuerda enrollada en la polea #1 pone en movimiento el sistema. Suponga que las poleas son discos de radio R y tienen una masa también igual a M (es decir, el momento de inercia de las dos poleas coinciden, teniéndose $I = MR^2/2$). Note que una correa (o cadena) de transmisión sólo puede transmitir una fuerza de tracción. Para el presente problema sólo la parte superior de la correa transmite una fuerza entre las poleas.

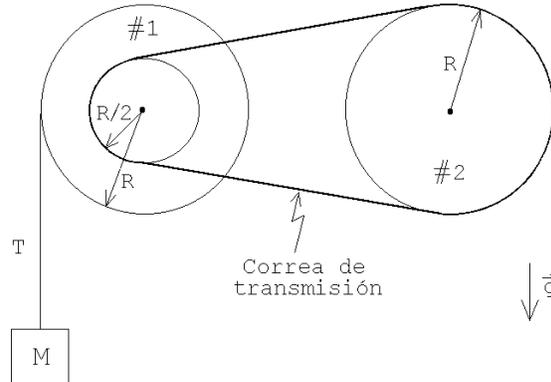


Figura 9.20

- a) Encuentre la tensión T de la cuerda.
 - b) Encuentre la aceleración angular de la polea #1.
 - c) Usando la *ley de conservación de la energía*, encuentre la velocidad v que tiene la masa M después de haber bajado una distancia h . (La masa M parte desde el reposo).
20. Una barra uniforme de largo L apoyada contra la pared comienza a resbalar (sin roce). Inicialmente el ángulo que forma con la pared es θ_0 . Encuentre la altura z para la cual el extremo A de la barra se separa de la pared vertical.

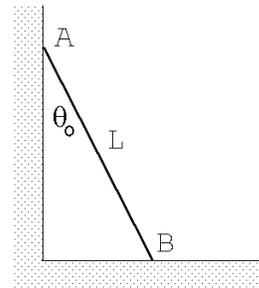


Figura 9.21

Respuesta: $z = \frac{2}{3}L \cos \theta_0$.

21. Una carretilla de hilo, formada de dos discos y un cilindro de las dimensiones indicadas en la figura 9.22a, se tira del hilo que tiene enrollado tal como se muestra en la figura 9.22b. Encuentre la aceleración de la carretilla de hilo si ésta rueda sin resbalar.

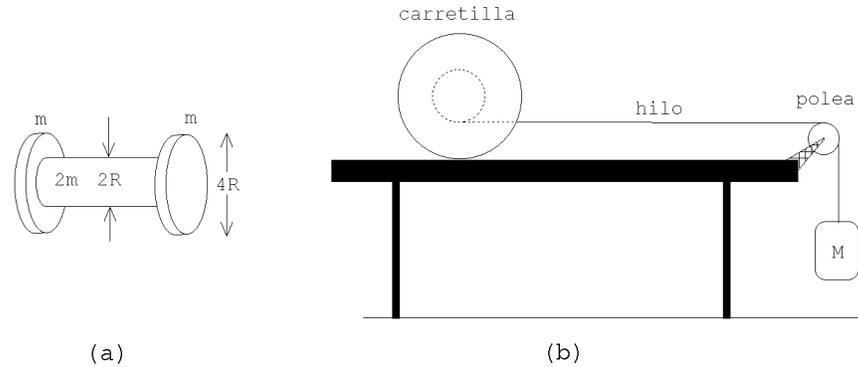


Figura 9.22

22. Considere un automóvil de masa M , cuya geometría se muestra en la figura adjunta, y que inicialmente se mueve con velocidad $-v_0 \hat{x}$. Suponga que en cierto instante el automóvil frena bloqueando las dos ruedas delanteras. Encuentre la distancia que el automóvil alcanza a recorrer durante el frenado si el coeficiente de roce cinemático entre el pavimento y las ruedas es μ_c . Asuma que durante el frenado, las ruedas traseras, en todo instante, están en contacto con el pavimento, situación que generalmente se da en la práctica.

Bajo ciertas condiciones extremas de frenado, el automóvil podría elevarse por la parte trasera y tumbarse. Encuentre la condición que debe satisfacerse para que el automóvil quede, en todo instante, con las cuatro ruedas sobre el pavimento. Haga también un análisis del proceso de aceleración del automóvil.

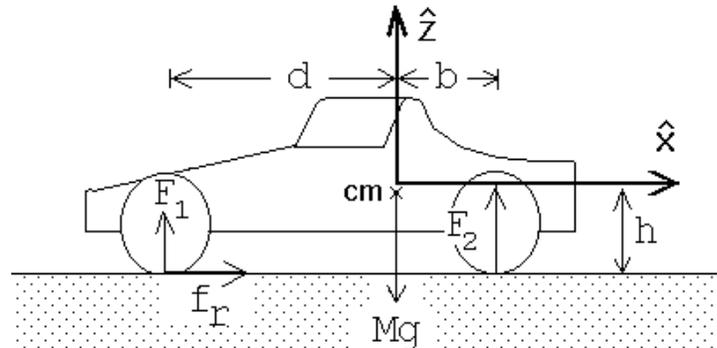


Figura 9.23

23. Considere una varilla rígida (de masa despreciable), que en cada uno de sus extremos tiene adosada una masa m . La varilla se desplaza inicialmente sin rotar sobre el plano (x, y) , con la velocidad del centro de masas $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ y con la varilla orientada de manera de formar un ángulo α con el eje \hat{x} , (ver figura). En cierto lugar una de las masas choca elásticamente con una pared rígida, tal como se muestra en la figura. Después de la colisión (el centro de masas de) la varilla con las masas se trasladará uniformemente, rotando simultáneamente con velocidad angular constante.

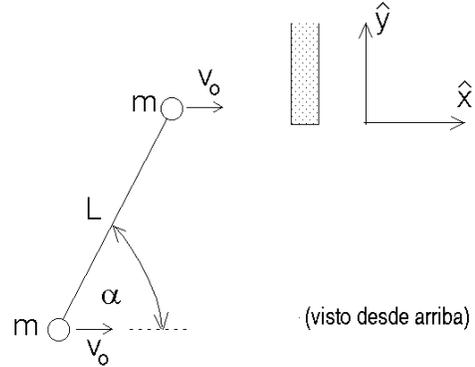


Figura 9.24

Desprecie el roce entre las masas m y el plano y suponga también que la pared está pulida, es decir, no hay fuerzas de roce entre la masa m y la pared cuando entran en contacto.

- Determine la velocidad angular de la varilla después de la colisión.
 - Encuentre el impulso transmitido al sistema por la pared durante la colisión.
 - Verifique que el resultado obtenido en la parte b) da los resultados correctos en los límites $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$.
24. Uno de los extremos de un resorte ideal de constante elástica k se fija a una pared. El otro extremo se fija al eje de una rueda cilíndrica de radio R y masa M . El resorte se comprime una distancia a , manteniendo su posición horizontal.

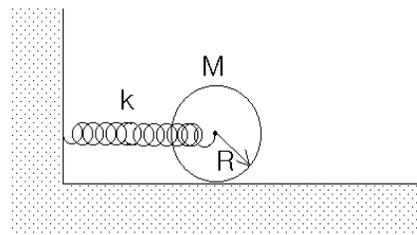


Figura 9.25

Estando el cilindro en contacto con el suelo (superficie rugosa) se suelta éste del reposo. Calcule la velocidad angular del cilindro cuando la elongación del resorte es nula. Suponga que el cilindro no resbala.

25. Cuatro bolitas idénticas, de masa m cada una, se unen mediante varillas de masa despreciable de largo a de tal forma que las bolas queden ubicadas en los vértices de un cuadrado.

- a) Calcule el momento de inercia con respecto a un eje a lo largo de la diagonal del cuadrado.
- b) Calcule el momento de inercia con respecto a un eje paralelo a uno de los lados y que pasa por el centro de éste.
- c) Si los dos cuadrados se hacen rotar, cada uno entorno a los ejes descritos anteriormente y con la misma velocidad angular, determine cual de ellos (y en que porcentaje) tiene mayor energía cinética.

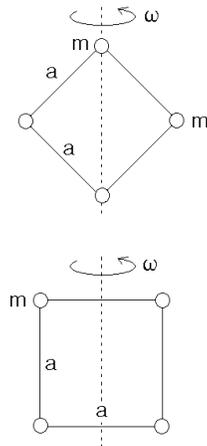


Figura 9.26

26. Un bloque rectangular y un cilindro se unen con una varilla como se muestra en la figura. El cilindro rueda sin resbalar mientras que el bloque desliza sobre el piso rugoso (μ_c). Si la masa del cilindro y del bloque es la misma ($M/2$) y el radio del cilindro es R , calcule el tramo recorrido por el sistema desde aquel instante en que el sistema se desplaza con rapidez v_0 . Compare con el resultado que obtendría si el cilindro se mantiene fuera de contacto con el piso.

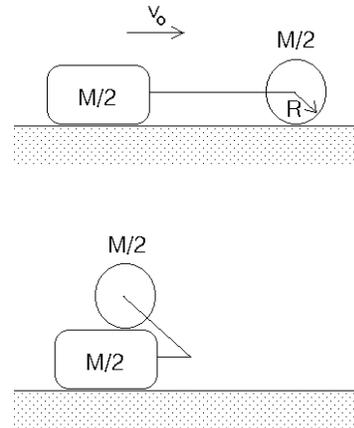


Figura 9.27

27. Considere un cubo de arista L y masa que se desliza con velocidad v_0 sobre un plano horizontal (sin roce). En cierto lugar el cubo se encuentra con un tope.
 - a) Demuestre que el momento de inercia del cubo respecto a un eje de rotación que coincide con una de sus aristas es $I = 2ML^2/3$.

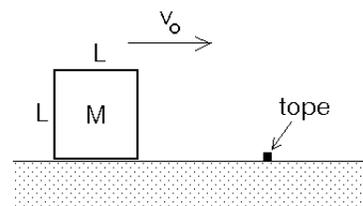


Figura 9.28

- (b) ¿Cuál es la mínima velocidad que debe tener el cubo para que se vuelque?

28. Una ardilla de masa m corre (aceleradamente) dentro de un cilindro hueco de radio R y masa M . La ardilla en ningún momento resbala y el cilindro posa sobre un plano rugoso horizontal (sobre el cual rueda sin resbalar). A consecuencia de su movimiento acelerado la ardilla se mantiene siempre a una altura h del suelo. Determinar la aceleración con que se traslada el centro de masas del cilindro (que es la misma con que se traslada la ardilla).

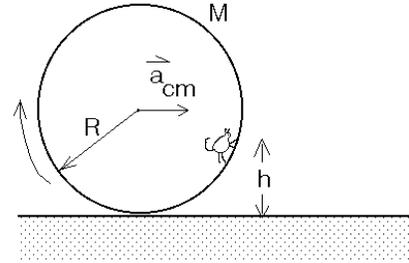


Figura 9.29

29. Un disco de radio R y masa M , inicialmente en reposo, puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo. Sobre ese disco se coloca otro disco, de radio r y masa m que inicialmente rota con una velocidad angular ω_0 . Debido al roce entre los dos discos el segundo disco eventualmente quedará en reposo respecto al primero. Si la separación entre los centros entonces es D , encuentre la velocidad angular final Ω con que girarán los dos disco entorno al eje.

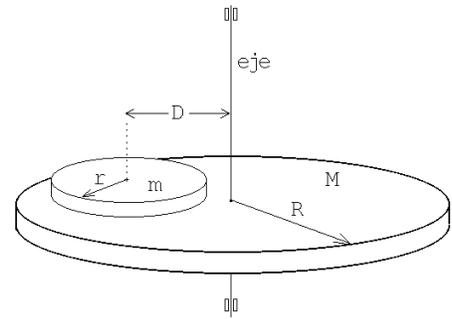


Figura 9.30

30. Una varilla de masa M y longitud L cuelga con uno de sus extremos fijo al techo. La varilla puede rotar libremente entorno a este punto. Sobre el piso un cuerpo pequeño de masa m choca elásticamente con el extremo inferior de la varilla.

- a) Determine la velocidad angular de la varilla inmediatamente después de la colisión.
- b) Determine la masa de la varilla si a consecuencia del choque la masa incidente queda detenida.

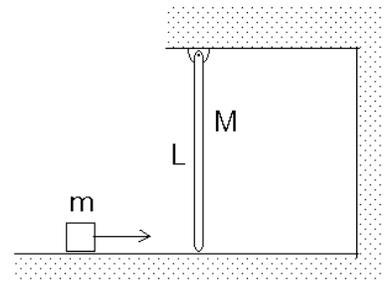


Figura 9.31

31. Una cuerda se enrolla entorno a un cilindro. El cilindro se ubica sobre un plano horizontal rugoso (μ) y en contacto con una pared vertical del mismo material del piso (ver figura). La cuerda se tira con una fuerza F hacia abajo. Calcular la razón entre las fuerzas normales experimentadas en el suelo y la pared, respectivamente.

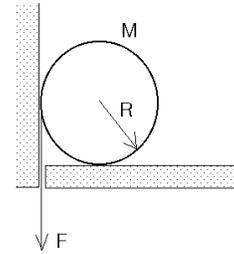


Figura 9.29

32. Considere la configuración experimental mostrada en la figura adjunta. Suponga que no hay roce entre la carretilla de hilo y el plano inclinado. Suponiendo conocidos el momento de inercia I de la carretilla para rotaciones alrededor de su eje, los radios R y r , el ángulo de inclinación α del plano inclinado, encuentre la aceleración a del eje de la carretilla.

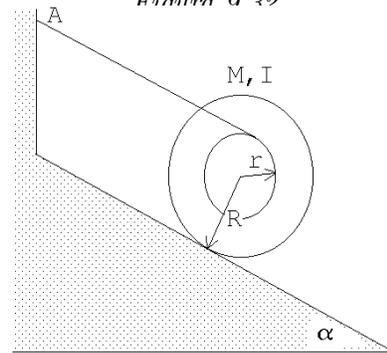


Figura 9.30

33. Un mono se encuentra sobre una plataforma que puede rotar (sin roce) alrededor de un eje. Inicialmente la plataforma y el mono se encuentran en reposo. ¿Qué debe hacer el mono para alcanzar los plátanos que están al otro lado. No hay nada a la mano del mono y supondremos que con sólo soplar no es posible poner en movimiento la plataforma.

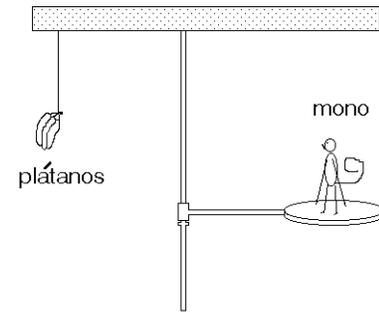


Figura 9.34

34. Considere un péndulo (físico) formado por una varilla de largo R y masa M en cuyo extremo está adosada una esfera de radio R y masa $2M$. El péndulo cuelga de uno de los extremos de la varilla.

- a) Determine el momento de inercia del péndulo para rotaciones en torno al punto de suspensión.
- b) Determine el período de este péndulo para pequeñas oscilaciones.

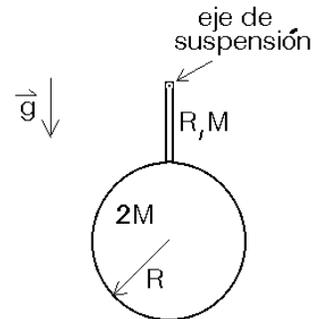


Figura 9.35

35. Una rueda de bicicleta se sostiene del eje con un hilo (amarrado a un solo lado). El punto de amarre se ubica a $D = 20$ cm del centro de la rueda. El neumático y la llanta pesan $M = 4$ kg y tienen un radio $R = 30$ cm. La rueda se hace girar a 10 rev/s. El eje se orienta (inicialmente) de manera horizontal.

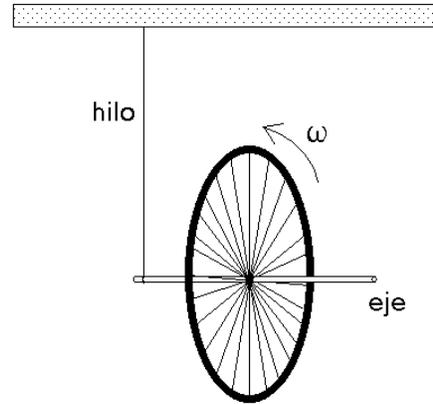


Figura 9.36

- a) Demuestre que el eje de la rueda se mantendrá en posición horizontal y que ésta realizará un movimiento circular (coincidiendo el eje de este movimiento con el hilo). Este movimiento se llama *precesión*.
- b) Encuentre la velocidad angular de precesión.
36. Un cubo, de lado h y masa m , está colocado sobre una cinta transportadora en la orientación que se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de roce estático entre el bloque y la cinta es $\mu_e = 0,5$ y el coeficiente de roce cinético es $\mu_c = 0,4$. En $t = 0$, la cinta comienza a moverse, aumentando linealmente su aceleración. En $t = 20$ s su aceleración es $\vec{a} = 3 \text{ m/s}^2 \hat{x}$ y en $t = 60$ alcanza $9 \text{ m/s}^2 \hat{x}$. Entre $t = 0$ y $t = 60$ s, se observa que el bloque se desplaza en la dirección \hat{x} manteniendo su orientación original (es decir, sin rotar con respecto a su centro de masa).



Figura 9.37

- a) Calcule la fuerza de roce que actúa sobre el bloque cuando la aceleración de la cinta transportadora es 3 m/s^2 .
- b) Haga un gráfico de la aceleración en función del tiempo.
- c) Considere un sistema de coordenadas solidario al bloque, con origen en su centro de masa y con el eje x paralelo a la dirección en que se mueve la cinta. ¿Cuál es la coordenada x del punto donde actúa la “fuerza normal efectiva” cuando la aceleración de la cinta transportadora es $6 \text{ m/s}^2 \hat{x}$?

9.5. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 8

Definamos el eje \hat{z} apuntando hacia arriba y concentrémonos primeramente en el disco inferior. Sea $\vec{a} = -a\hat{z}$ (con $a > 0$) la aceleración lineal del disco inferior. Para tal disco, usando la segunda ley de Newton, se encuentra la ecuación de movimiento

$$\vec{F}_{tot} = -mg\hat{z} + T\hat{z} = m\vec{a} ,$$

o sea,

$$mg - T = ma . \quad (9.2)$$

Sea $\alpha = \dot{\omega}$ la aceleración angular del disco inferior. El torque ejercido por el peso (respecto al centro de masas del disco) es nulo mientras que el torque ejercido por la cuerda es $\tau = TR$. Se tiene

$$\tau = TR = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\dot{\omega} = I\alpha .$$

Usando el valor del momento de inercia de un disco $I = mR^2/2$, se encuentra

$$T = \frac{1}{2}mR\alpha . \quad (9.3)$$

Siendo los dos discos iguales y siendo que el torque sobre el disco superior (respecto a su centro de masas) es igual al del disco inferior, se concluye que ambos discos se *desenrollarán* con la misma aceleración y velocidad angular.

La aceleración lineal a y la aceleración angular α (que es la misma para ambos discos) no son magnitudes independientes, sino que están correlacionadas. En efecto, se tiene que

$$2\alpha R = a . \quad (9.4)$$

A partir de las tres ecuaciones (9.2), (9.3) y (9.4), con las tres incógnitas T , a y α , se encuentra $a = 4g/5$, $T = mg/5$ y $\alpha = 2g/(5R)$.

Solución al problema 15

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de un problema en que la energía se conserva, en muchas ocasiones el método más fácil consiste en escribir una expresión para la energía y derivar ésta respecto al tiempo.

Por ejemplo, para una masa que cae bajo el efecto de la gravedad: la energía total viene dada por

$$E = mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 .$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo se encuentra

$$0 = mg\dot{z} + \frac{1}{2}m2\dot{z}\ddot{z} ,$$

o sea, la ecuación de movimiento para la caída libre $\ddot{z} = -g$.

Usemos esta idea para resolver el presente problema. Si θ es el ángulo de desviación del anillo respecto a la normal y $\dot{\theta}$ es su velocidad angular, la energía total del sistema vendrá dada por

$$E = mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 . \quad (9.5)$$

Aquí m es la masa del aro e I es el momento de inercia respecto al punto de suspensión A . El primer término al lado derecho representa el cambio de energía potencial del aro (respecto a su posición de equilibrio) mientras que el segundo es la energía cinética rotacional en torno a A .

Derivando (9.5) respecto al tiempo se obtiene

$$0 = mgR \sin \theta \dot{\theta} + I\dot{\theta}\ddot{\theta} ,$$

o sea,

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR}{I} \sin \theta .$$

Usando el teorema de Steiner y el resultado del ejemplo 2 de la segunda sección, deducimos que el momento de inercia del aro, en torno a A , es $I = 2mR^2$. Usando esta relación, y la aproximación $\sin \theta \simeq \theta$ para ángulos pequeños, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0 .$$

Esta ecuación de movimiento para el aro corresponde a la de un oscilador armónico y coincide con la de un péndulo de largo $L = 2R$. El período de oscilación es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} .$$

Para que el aro dé una vuelta completa la energía cinética en la parte inferior debe coincidir con $2mgR$, que es la diferencia de energía potencial que el aro debe sobreponer. Si denotamos por ω_0 a la velocidad angular en el mínimo, se tiene

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = 2mgR ,$$

o sea,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}} .$$

Solución al problema 18

- a) El cambio de energía potencial debe ser igual a la energía cinética final. La masa $2m$ baja una distancia h mientras que la masa m sube una distancia h . Luego

$$\Delta U = mgh .$$

Sea v_0 la rapidez final de la masa $2m$, justo antes de chocar con el suelo. Entonces la energía cinética, en ese instante, es

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 ,$$

donde $\omega_0 = v_0/R$ es la velocidad angular final de la polea. Usando el valor $I = mR^2/2$ para el momento de inercia se encuentra que

$$K = 2mv_0^2 .$$

Igualando K con ΔU se encuentra

$$v_0^2 = \frac{gh}{2} .$$

- b) Los diagramas de cuerpo libre de las dos masas nos dan las ecuaciones de movimiento

$$\tau_1 - mg = ma$$

y

$$(2m)g - \tau_2 = (2m)a ,$$

donde a es la aceleración (hacia arriba) de la masa m . Sea $\ddot{\theta}_0$ la aceleración angular de la polea. El hecho de que la cuerda no resbale sobre la polea nos da la relación

$$\ddot{\theta}_0 R = a .$$

Finalmente, evaluando el torque total que actúa sobre la polea se encuentra la ecuación de movimiento para la rotación

$$\tau_2 R - \tau_1 R = I\ddot{\theta}_0 .$$

Tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas τ_1 , τ_2 , a y $\ddot{\theta}_0$. Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra

$$a = \frac{2}{7}g ,$$

$$\tau_1 = \frac{9}{7}mg$$

y

$$\tau_2 = \frac{10}{7}mg .$$

- c) Mientras las masas están cayendo, como la polea no se desplaza, la fuerza total sobre ella debe ser nula. Por lo tanto, la tensión de la cuerda que sujeta la polea debe ser

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{19}{7}mg .$$

- d) Consideremos la situación que se tiene cuando la masa $2m$ ha tocado el suelo y todo está detenido. El torque total sobre la polea es nulo y, por lo tanto, la tensión de la cuerda que pasa por la polea debe ser la misma a ambos lados, siendo su valor mg . Concluimos que la tensión de la cuerda que sujeta la polea, en este caso, es

$$\tau = 2mg .$$

Solución al problema 19

Sólo la parte superior de la correa de transmisión transmite fuerza. Denotemos ésta por F . La ecuación de movimiento para la rotación de la polea #2 es

$$FR = I\ddot{\theta}_2 .$$

Para la polea #1 ésta es

$$TR - F\frac{R}{2} = I\ddot{\theta}_1 .$$

El diagrama de cuerpo libre para la masa M nos da la ecuación

$$Mg - T = Ma ,$$

donde a es la aceleración (hacia abajo) de la masa M . Los ángulos de rotación de ambas poleas no son independientes sino que están relacionados por

$$\theta_1 \frac{R}{2} = \theta_2 R .$$

Derivando dos veces respecto al tiempo y cancelando el radio R se obtiene

$$\ddot{\theta}_2 = 2\ddot{\theta}_1 .$$

Finalmente, también la aceleración a está relacionada con $\ddot{\theta}_1$. En efecto, $a = R\ddot{\theta}_1$. De las ecuaciones anteriores podemos despejar las cinco incógnitas a , T , F , $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$. De esta manera se encuentra

$$a = R\ddot{\theta}_1 = \frac{8}{13}g ,$$

$$T = \frac{5}{13}Mg$$

y

$$F = \frac{2}{13}Mg .$$

Después de bajar una distancia h la energía potencial disminuye en $\Delta U = Mgh$. Esta energía debe transformarse en energía cinética.

Si la velocidad de la masa M es v , entonces las velocidades angulares de las poleas #1 son $\omega_1 = v/R$ y $\omega_2 = v/(2R)$, respectivamente. La energía cinética es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{13}{16}Mv^2 . \end{aligned}$$

Igualando esto con la diferencia de energía potencial se encuentra para v la expresión

$$v = \sqrt{\frac{16}{13}gh} .$$

Solución al problema 21

El momento de inercia de la carretilla, para rotaciones alrededor de su eje de simetría, es

$$I = 2\left(\frac{1}{2}m(2R)^2\right) + \frac{1}{2}(2m)R^2 = 5mR^2 . \quad (9.6)$$

El diagrama de cuerpo libre para la masa M nos da la ecuación

$$Mg - T = Ma_M , \quad (9.7)$$

donde T es la tensión de la cuerda y a_M la aceleración (hacia abajo) de la masa M . Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento traslacional horizontal de la carretilla se encuentra la ecuación

$$T - f_r = (4m)a_C , \quad (9.8)$$

donde f_r es el roce estático entre la carretilla y la mesa y a_C la aceleración de la carretilla. (Este roce es el responsable de hacer que la carretilla ruede sin resbalar). Sea α la aceleración angular de la carretilla. El torque neto sobre la carretilla debe ser igual al momento de inercia multiplicado por α , o sea,

$$f_r(2R) - TR = I\alpha . \quad (9.9)$$

Por supuesto que hay una estrecha relación entre α y a_C , que viene dada por el hecho que la carretilla rueda sin resbalar. Esta relación es

$$2R\alpha = a_C . \quad (9.10)$$

También existe una relación que vincula A_M , a_C y α : La cuerda es inextensible y por lo tanto la diferencia entre la aceleración de la carretilla y la masa M debe coincidir con la aceleración con que la cuerda se enrolla, es decir,

$$a_C - a_M = \alpha R . \quad (9.11)$$

Las ecuaciones (9.6), (9.7), (9.8), (9.9), (9.10) y (9.11) resuelven el problema. Para la aceleración de la carretilla se obtiene

$$a_c = g \frac{2M}{M + 21m} .$$

Solución al problema 22

Introduzcamos el sistema de coordenadas mostrado en la figura 9.23. (El eje \hat{y} apunta hacia el interior del papel). Las distintas fuerzas que actúan sobre el automóvil durante el frenado son: Las fuerzas $\vec{F}_1 = F_1 \hat{z}$ y $\vec{F}_2 = F_2 \hat{z}$ que el pavimento ejerce sobre las ruedas delanteras y traseras, respectivamente; el peso $\vec{F}_p = -Mg \hat{z}$ y la fuerza de roce $\vec{f}_r = +\mu_c F_1 \hat{x}$.

Como el automóvil no se “eleva”, la fuerza total en la dirección \hat{z} debe ser nula, es decir,

$$0 = (F_1 + F_2 - Mg) \hat{z} . \quad (9.12)$$

Por otra parte, como el automóvil durante el frenado tampoco “gira” (en torno al eje \hat{y}), el torque total (respecto al centro de masas) debe ser nulo. Los torques que ejercen las cuatro fuerzas son:

$$\vec{\tau}_1 = +F_1 d \hat{y}$$

$$\vec{\tau}_2 = -F_2 b \hat{y}$$

$$\vec{\tau}_p = 0$$

y

$$\vec{\tau}_r = -f_r h \hat{y} = -F_1 \mu_c h \hat{y} .$$

La suma de estos torques debe ser nulo, condición que nos entrega la relación

$$F_1 d - F_2 b - F_1 \mu_c h = 0 . \quad (9.13)$$

De las ecuaciones (9.12) y (9.13) se pueden despejar F_1 y F_2 , obteniéndose

$$F_1 = Mg \frac{b}{b + d - \mu_c h}$$

y

$$F_2 = Mg \frac{d - \mu_c h}{b + d - \mu_c h} .$$

Las ecuaciones anteriores dejan de ser válidas si $\mu_c h > d$, ya que en ese caso, la fuerza F_2 se vuelve negativa, lo que significa que las ruedas traseras dejan de estar en contacto con el suelo. En otras palabras, las ecuaciones anteriores son válidas mientras $d > \mu_c h$, relación que favorece un diseño (del automóvil) en que el centro de masas se ubica en la parte trasera y cerca del suelo.

Conociendo F_1 podemos calcular la fuerza de roce f_r (que es la fuerza responsable de la (des)aceleración del automóvil). Para la la aceleración se obtiene

$$\vec{a} = \frac{f_r}{M} \hat{x} = \frac{F_1 \mu_c}{M} \hat{x} = g \frac{b \mu_c}{b + d - \mu_c h} \hat{x} = a_0 \hat{x} .$$

Finalmente, la distancia D que recorre el automóvil durante su frenado es

$$D = \frac{v_0^2}{2a_0} = v_0^2 \frac{b + d - \mu_c h}{2gb\mu_c} .$$

Observe que en este problema la fuerza neta sobre el automóvil no es nula y, por lo tanto, el torque neto respecto a otro origen no es nulo aun cuando lo sea respecto al centro de masas. Confirme la aseveración anterior evaluando el torque respecto al punto de contacto de la rueda delantera con el suelo.

Reiteramos: Para determinar si cambiará el estado rotacional de un cuerpo acelerado, debe evaluarse el torque total **respecto al centro de masas** (ver también capítulo siguiente).

Analicemos ahora el proceso de aceleración. Sea ésta $\vec{a} = -a_0 \hat{x}$. Supongamos que el motor ejerce la fuerza sobre las ruedas traseras y que estas no resbalan. En ese caso la fuerza de roce (estática) $\vec{f}_r = -f_r \hat{x}$ actuará sobre las ruedas traseras y en dirección $-\hat{x}$. Mientras el automóvil está con las cuatro ruedas sobre el suelo, el torque total respecto al centro de masas debe ser nulo, o sea,

$$F_1 d - F_2 b + f_r h = 0 .$$

La fuerza que acelera el automóvil es la fuerza de roce, es decir,

$$\vec{f}_r = M \vec{a} .$$

En la dirección vertical la suma de todas las fuerzas sobre el automóvil debe ser nula:

$$F_1 + F_2 = Mg .$$

Las tres últimas ecuaciones permiten determinar F_1 y F_2 :

$$F_1 = M \frac{gb - a_0 h}{b + d} ,$$

$$F_2 = M \frac{gd + a_0 h}{b + d} .$$

Observe que F_1 es mayor que cero sólo mientras $a_0 < gb/h$. Para aceleraciones mayores, las ruedas delanteras del automóvil pierden contacto con el suelo. La aceleración máxima (si el roce estático lo permite) viene dada por

$$a_{\max} = g \frac{b}{h} .$$

Solución al problema 29

El momento angular total debe conservarse. Inicialmente el momento angular es

$$L_i = I_1 \omega_0 = \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \omega_0 .$$

El momento angular una vez que el segundo disco este en reposo respecto al primero es

$$L_f = I \Omega ,$$

donde I es el momento de inercia de la configuración final para rotaciones alrededor del eje fijo. Se tiene

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} M R^2 + \left(\frac{1}{2} m r^2 + m D^2 \right) ,$$

donde para I_2 hemos usado el teorema de Steiner. Igualando los dos momentos angulares se deduce

$$\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 = \left[\frac{1}{2} M R^2 + \left(\frac{1}{2} m r^2 + m D^2 \right) \right] \Omega ,$$

o sea,

$$\Omega = \frac{m r^2 \omega_0}{m r^2 + M R^2 + 2 m D^2} .$$

Solución al problema 35

En la figura 9.38 la rueda gira en el plano (x, z) , moviéndose la parte superior de la rueda hacia el lector. El momento angular debido al giro de la rueda alrededor de su eje, por lo tanto, apunta en la dirección \hat{y} . Suponiendo que toda la masa de la rueda está concentrada en la periferia, su momento de inercia para rotaciones alrededor de su eje será

$$I_0 = M R^2 .$$

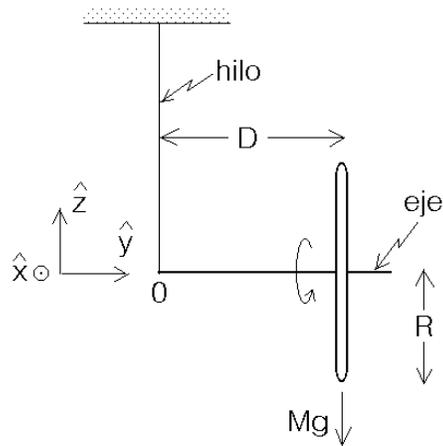


Figura 9.38

El momento angular asociado a este movimiento (para el instante mostrado en la figura 9.38), respecto al origen O , será

$$\vec{L}_0 = I_0 \omega \hat{y} ,$$

donde ω es la velocidad angular con que gira la rueda alrededor de su eje (esto es, $\omega = 2\pi \cdot 10 \text{ s}^{-1}$).

El torque total respecto a O es

$$\vec{\tau} = -MgD \hat{x} .$$

Pero, por otra parte,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} ,$$

luego el cambio de momento angular (para la situación mostrada en la figura 9.38) será

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -MgD \hat{x} .$$

Observe que \vec{L} y $\frac{d\vec{L}}{dt}$ son perpendiculares (ver también figura 9.39). Como \vec{L} y $d\vec{L}$ están en el plano (x, y) , el vector \vec{L} seguirá en ese plano, pero cambiará su orientación. En otras palabras, el eje de la rueda girará en el plano (x, y) , manteniéndose horizontal.

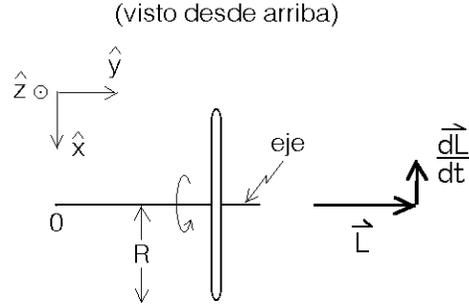


Figura 9.39

Para deducir la velocidad angular Ω con la cual el eje de la rueda gira alrededor del eje \hat{z} , recordemos algunos aspectos del movimiento circular uniforme: Sea \vec{r} un vector de largo R que gira en el plano (x, y) con velocidad angular uniforme. En ese caso $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ es siempre perpendicular a \vec{r} . Si conocemos el radio de giro y la rapidez con que gira podemos determinar la velocidad angular:

$$\Omega = \frac{v}{R} = \frac{|d\vec{r}/dt|}{|\vec{r}|} .$$

La situación en el presente problema es análoga. Tenemos un vector \vec{L} que gira en el plano (x, y) . Conocemos $L = |\vec{L}|$ y la rapidez $|d\vec{L}/dt|$, luego podemos encontrar la velocidad angular de *precesión* Ω con la que gira \vec{L} :

$$\Omega = \frac{|d\vec{L}/dt|}{|\vec{L}|} = \frac{MgD}{MR^2\omega} = \frac{gD}{R^2\omega} .$$

Tanto más rápido gira la rueda, tanto más lenta es la precesión.

Capítulo 10

Fuerzas ficticias

versión 1 noviembre 2010

Desde que introdujimos el concepto de fuerzas, siempre hemos sido cuidadosos en estudiar cualquier sistema físico en los llamados *sistemas de referencia inerciales*. La razón es clara: un sistema de referencia inercial es aquel en el cual se cumplen las tres leyes de Newton. En particular, en un sistema inercial los cuerpos aceleran sólo si sobre ellos actúa una fuerza.

Sin embargo, ya observamos, en el comienzo del Cap. 4, que no hay en principio ninguna razón para evitar describir el universo en un sistema de referencia no inercial. En el Cap. 4 utilizamos el ejemplo de un observador en el interior de un automóvil que acelera. En este caso, un árbol en la acera parece acelerar sin que se apliquen fuerzas sobre él, lo cual es inconsistente con las leyes de Newton. Lo mismo sucederá en cualquier sistema de referencia acelerado: vistos desde dicho sistema, todos los demás cuerpos estarán sujetos a aceleraciones que no se deben a ninguna fuerza debida a ningún otro cuerpo.

De hecho, nosotros mismos, día a día, estamos en esa situación: recordemos que estamos sobre la superficie del planeta Tierra, que gira en torno a su eje, y además gira en torno al Sol, el cual además gira en torno al centro de masas de la Vía Láctea. . . *Nunca* hemos vivido en un sistema de referencia inercial, y por lo tanto, en rigor, no podemos aplicar las leyes de Newton para describir el Universo tal como lo vemos nosotros.

¿Significa eso que nada de lo que hemos hecho hasta el momento tiene sentido? No, en absoluto. Primero, porque la Física es una ciencia experimental, y si las aceleraciones son suficientemente pequeñas, o si actúan durante un tiempo suficientemente pequeño, para que la “no inercialidad” de nuestro sistema de referencia no sea medible, entonces la aproximación de que nos encontramos en un sistema de referencia inercial es válida. Segundo, porque es posible, incluso en sistemas de referencia no inerciales, considerar que las leyes de Newton siguen siendo válidas. El costo es in-

roducir fuerzas “ficticias”, responsables de las aceleraciones “inexplicables” que los cuerpos tienen cuando son observados desde un sistema no inercial.

Esta segunda opción es la que exploraremos en el presente capítulo. Las fuerzas ficticias, entonces, son fuerzas que deben incluirse en la descripción de un sistema físico cuando la observación se realiza desde un sistema de referencia no inercial y, a pesar de ello, se insiste en usar las leyes de Newton. Estudiaremos dos casos: un sistema de referencia uniformemente acelerado (equivalente al caso del automóvil mencionado más arriba) y un sistema de referencia fijo a un cuerpo que rota uniformemente (equivalente al caso de nosotros sobre la superficie terrestre). El caso general, de un sistema de referencia sometido a una aceleración arbitraria es inmanejable con las herramientas de que disponemos hasta el momento, pero con los dos casos sencillos que revisaremos podremos encontrar algunos resultados importantes y adquirir algunas intuiciones básicas.

10.1. Referencial uniformemente acelerado

Sea $S : (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un sistema de referencia inercial y $S' : (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ un sistema de referencia que acelera con aceleración constante \vec{a}_0 respecto a S . El vector que une los orígenes O y O' de ambos sistemas de referencia es

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 .$$

Sean $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ los vectores de posición de una masa m en los sistemas de referencia S y S' , respectivamente. La relación entre \vec{r} y \vec{r}' es

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' .$$

Derivando dos veces respecto al tiempo se obtiene

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}' = \vec{a}_0 + \ddot{\vec{r}}' ,$$

o sea,

$$m \ddot{\vec{r}}' = m \ddot{\vec{r}} - m \vec{a}_0 . \quad (10.1)$$

Sea \vec{F} la fuerza real neta que actúa sobre la masa m , es decir, la fuerza que genera la aceleración $\ddot{\vec{r}}$ de la masa m observada desde un sistema de referencia inercial. En otras palabras

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} .$$

Si se insiste en usar la segunda ley de Newton, pero con las magnitudes observadas desde un sistema de referencia acelerado, se tiene

$$\vec{F}' = m \ddot{\vec{r}}' ,$$

pero la fuerza \vec{F}' ahora ya no es \vec{F} sino que, de acuerdo con la ecuación (10.1),

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 .$$

El término $-m\vec{a}_0 = \vec{F}_{\text{fict}}$ es la fuerza ficticia que hay que agregar a la fuerza real \vec{F} para poder seguir usando la segunda ley de Newton desde un sistema acelerado con aceleración \vec{a} .

Observe que esta fuerza ficticia actúa como un campo gravitacional constante (adicional al campo gravitacional \vec{g} que pudiese estar presente).

Ejemplo: Consideremos un péndulo sobre un carro que acelera con aceleración constante $\vec{a} = a_0\hat{x}$ (ver figura 10.1). Encontramos el ángulo α entre la normal y la posición de equilibrio del péndulo.

Resolveremos el problema de dos maneras: i) usando primero el sistema de referencia inercial del observador O y ii) el sistema de referencia acelerado fijo a O' .

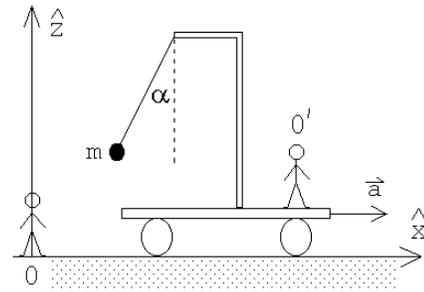


Figura 10.1

i) En el sistema de referencia inercial el diagrama de cuerpo libre de la masa m se muestra en la figura 10.2a. La fuerza neta que actúa sobre la masa m es

$$\vec{F} = \vec{\tau} + \vec{F}_g = \tau \cos \alpha \hat{z} + \tau \sin \alpha \hat{x} - mg \hat{z} .$$

En el sistema de referencia inercial la partícula acelera con una aceleración $\vec{a} = a\hat{x}$, luego

$$\vec{F} = \tau \cos \alpha \hat{z} + \tau \sin \alpha \hat{x} - mg \hat{z} = ma\hat{x} .$$

Igualando las componentes de esta ecuación vectorial se obtiene

$$\tau \cos \alpha = mg$$

y

$$\tau \sin \alpha = ma .$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera se deduce finalmente que

$$\tan \alpha = \frac{a}{g} .$$

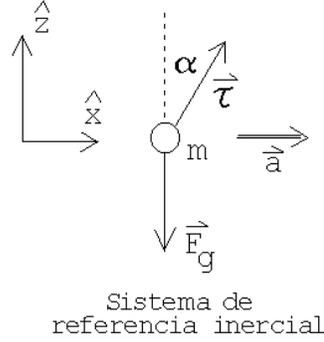


Figura 10.2a

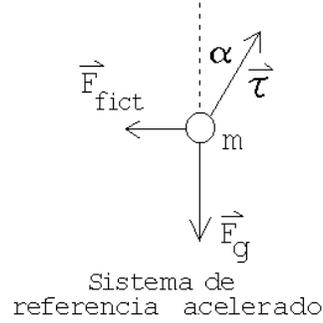


Figura 10.2b

ii) Para un observador sobre el carro la masa m no se mueve. Por eso, para O' la fuerza neta sobre la masa m debe ser nula. El diagrama de cuerpo libre en este caso se muestra en la figura 10.2b. Además de la fuerza ejercida por la tensión del hilo y de la gravedad, debemos agregar la fuerza ficticia $\vec{F}_{\text{fict}} = -ma \hat{x}$. Tenemos

$$\vec{F}' = \vec{\tau} + \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{fict}} = 0,$$

o sea

$$0 = \tau \cos \alpha \hat{z} + \tau \sin \alpha \hat{x} - mg \hat{z} - ma \hat{x}.$$

Nuevamente, igualando las componentes de esta ecuación vectorial se deduce que

$$\tau \cos \alpha = mg$$

y

$$\tau \sin \alpha = ma,$$

o sea, las mismas relaciones encontradas en la parte i).

Para el observador O' sobre el carro, también podríamos haber simplemente considerado un campo gravitacional efectivo (ver figura 10.3).

$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a} = -g \hat{z} - a \hat{x}.$$

Es evidente que el ángulo que \vec{g}_{eff} hace con la normal cumple con la relación $\tan \alpha = a/g$. Si el péndulo realiza pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio la frecuencia angular de las oscilaciones será

$$\omega = \sqrt{\frac{g_{\text{eff}}}{\ell}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{\ell}},$$

donde ℓ es el largo del péndulo.

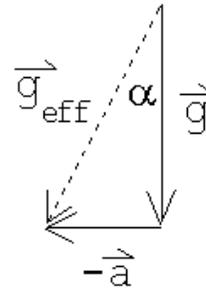


Figura 10.3

10.2. Referencial en rotación uniforme

Sea $S : (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un sistema de referencia inercial y $S' : (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ un sistema de referencia que coincide con el sistema S en cierto instante (por ejemplo, en $t = 0$), pero que rota con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ constante en torno al eje \hat{z} (ver figura 10.4).

Sea \vec{A} un vector con componentes A_x, A_y, A_z en el sistema de referencia S y componentes A'_x, A'_y, A'_z en el sistema de referencia S' , o sea,

$$\vec{A}(t) = A_x(t) \hat{x} + A_y(t) \hat{y} + A_z(t) \hat{z} .$$

y

$$\vec{A}(t) = A'_x(t) \hat{x}' + A'_y(t) \hat{y}' + A'_z(t) \hat{z}' .$$

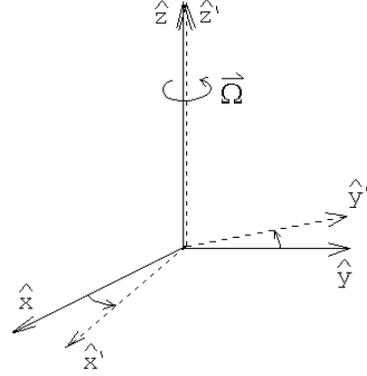


Figura 10.4

Los vectores unitarios del sistema de referencia inercial $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son fijos, sin embargo, los vectores unitarios del sistema de referencia rotatorio $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ rotan, teniéndose

$$\hat{x}' = \cos(\Omega t) \hat{x} + \sin(\Omega t) \hat{y}$$

$$\hat{y}' = -\sin(\Omega t) \hat{x} + \cos(\Omega t) \hat{y}$$

$$\hat{z}' = \hat{z} .$$

Derivando estos vectores respecto al tiempo se encuentra

$$\dot{\hat{x}}' = -\Omega \sin(\Omega t) \hat{x} + \Omega \cos(\Omega t) \hat{y} = \Omega \hat{y}'$$

$$\dot{\hat{y}}' = -\Omega \cos(\Omega t) \hat{x} - \Omega \sin(\Omega t) \hat{y} = -\Omega \hat{x}'$$

$$\dot{\hat{z}}' = 0 .$$

Evaluemos la derivada del vector \vec{A} en ambos sistemas de referencia. Por una parte se tiene

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z} ,$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \dot{A}'_x \hat{x}' + A'_x \dot{\hat{x}}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + A'_y \dot{\hat{y}}' + \dot{A}'_z \hat{z}' + A'_z \dot{\hat{z}}' \\ &= (\dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + \dot{A}'_z \hat{z}') + \Omega (A'_x \hat{y}' - A'_y \hat{x}') . \end{aligned}$$

Usando las relaciones anteriores y el hecho que

$$\vec{\Omega} \times \vec{A} = \Omega \hat{z}' \times (A'_x(t) \hat{x}' + A'_y(t) \hat{y}' + A'_z(t) \hat{z}') = \Omega (A'_x \hat{y}' - A'_y \hat{x}') ,$$

podemos escribir

$$\left(\dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z} \right) = \left(\dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + \dot{A}'_z \hat{z}' \right) + \vec{\Omega} \times \vec{A} ,$$

o sea

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{A} . \quad (10.2)$$

En la última expresión los ejes unitarios no aparecen explícitamente, por consiguiente, es una expresión que tiene una validez general (es decir, no sólo para rotaciones en torno al eje \hat{z}). La ecuación (10.2) relaciona la derivada temporal de cualquier vector en el sistema de referencia inercial S con la derivada temporal de ese mismo vector, pero observada desde un sistema de referencia S' que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto a S .

Aplicemos la ecuación (10.2) al vector posición \vec{r} de una partícula de masa m . Se tiene

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r} ,$$

o sea,

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r} .$$

Acá \vec{v}_S es la velocidad de la partícula m observada por el observador inercial S y $\vec{v}_{S'}$ es la velocidad de la misma partícula, pero observada desde el sistema de referencia rotatorio.

Aplicemos nuevamente la ecuación (10.2), pero ahora al vector \vec{v}_S . Se tiene

$$\left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_S . \quad (10.3)$$

Usando la ecuación (10.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_S &= \left(\frac{d(\vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{S'}}{dt} \right)_{S'} + \left(\frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{S'}}{dt} \right)_{S'} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) . \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la última ecuación es la aceleración de la partícula observada por el observador inercial S , denotémosla por \vec{a}_S . El primer término al lado derecho

es la aceleración de la misma partícula pero observada desde el sistema de referencia rotacional S' , denotémosla por $\vec{a}_{S'}$. De esta manera obtenemos

$$m\vec{a}_{S'} = m\vec{a}_S - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) . \quad (10.4)$$

Sea \vec{F} la fuerza real neta que actúa sobre la masa m , es decir, la fuerza que genera la aceleración \vec{a}_S de la masa m observada desde un sistema de referencia inercial. En otras palabras

$$\vec{F} = m\vec{a}_S .$$

Si se insiste en usar la segunda ley de Newton, pero con las magnitudes observadas desde un sistema de referencia acelerado, se tiene

$$\vec{F}' = m\vec{a}_{S'} ,$$

pero la fuerza \vec{F}' ahora ya no es \vec{F} sino que, de acuerdo con la ecuación (10.4),

$$\vec{F}' = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) .$$

Los términos

$$\vec{F}_{\text{fict}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (10.5)$$

son la fuerza ficticia que hay que agregar a la fuerza real \vec{F} para poder seguir usando la segunda ley de Newton desde un sistema de referencia que rota respecto a un sistema de referencia inercial con velocidad angular $\vec{\Omega}$.

El primer término de la fuerza ficticia dada por la ecuación (10.5) es la así llamada *fuerza de Coriolis*

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'}$$

mientras el segundo término se llama *fuerza centrífuga*

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) .$$

Lo interesante de la fuerza de Coriolis es que ella sólo aparece si, en el sistema de referencia rotacional S' , la masa se mueve, y en ese caso, es perpendicular a la dirección de movimiento. Cuando m está en reposo (es decir, $\vec{v}_{S'} = 0$) entonces la única fuerza ficticia que hay que agregar a la fuerza que se observa en un sistema inercial, es la fuerza centrífuga.

Cuando realizamos experimentos en la tierra (laboratorio) siempre asumimos que un sistema fijo al laboratorio representa un sistema de referencia inercial. Sin embargo, la rotación de la tierra en torno a su propio eje (con una frecuencia $\Omega = 2\pi/(24 \cdot 3600) = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) hace que el sistema de referencia no sea inercial y que, en la práctica, debamos en ocasiones agregar la fuerza ficticia (10.5) para obtener una descripción correcta del sistema. La fuerza de Coriolis es responsable de muchos

efectos (a veces sorprendentes) que se observan a nuestro alrededor. Por ejemplo, es la responsable de la rotación de los ciclones y de las corrientes marinas o del giro del plano de oscilación de un péndulo.

Problema resuelto en clases: 10.1

Problema resuelto en clases: 10.3

Problema resuelto en clases: 10.7

10.3. Problemas

1. Demuestre que la fuerza centrífuga que actúa sobre una masa m (si ésta es observada desde un sistema de referencia rotacional que gira con velocidad angular Ω respecto a un sistema de referencia inercial) viene dada por

$$\vec{F}_{\text{centrífuga}} = m \Omega^2 \rho \hat{\rho},$$

donde ρ es la distancia entre el eje de rotación y la masa m y $\hat{\rho}$ es un vector unitario que apunta el eje hacia la masa m y es perpendicular al eje de giro (ver figura 10.5). Observe que la fuerza centrífuga tiene la misma magnitud y dirección de la fuerza centrípeta sólo que apunta en el sentido opuesto.

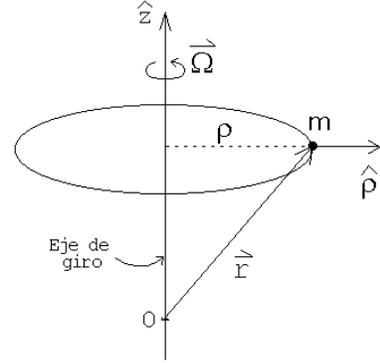


Figura 10.5

2. En un parque de diversiones, los participantes se sostienen contra la pared de un cilindro giratorio mientras el suelo se hunde. El radio del cilindro es $R = 3m$ y el coeficiente de roce entre las personas y la pared del cilindro es $\mu_e = 0,4$. Determine el número mínimo de revoluciones por minuto que se requiere para que el juego funcione.

Haga el cálculo de dos maneras distintas: i) usando un sistema de referencia inercial y ii) usando un sistema de referencia solidario al cilindro.

3. Considere el efecto de la rotación terrestre sobre el movimiento de un proyectil que se lanza desde la superficie terrestre con velocidad \vec{v}_0 . Suponga que el alcance del proyectil es tal que en todo instante se mueve en un campo gravitacional constante, es decir, $\vec{F}_g = m\vec{g}$.

- a) Demuestre que la velocidad del proyectil viene dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Todas las magnitudes están medidas respecto a un observador solidario con la tierra. Acá \vec{r} es el vector posición del proyectil medido desde el punto de lanzamiento y $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad angular de la tierra.

Al resolver el problema no se debe incluir la fuerza centrífuga ya que ésta está incluida en el valor local de \vec{g} que se está usando. Al rotar la tierra no sólo se modifica la magnitud g sino que también su dirección. La fuerza centrífuga incluso modifica la forma de la tierra; de hecho, la normal a la superficie terrestre usualmente no pasa por el centro de la tierra.

- b) Demuestre que, al despreciar términos del orden Ω^2 , para la aceleración se obtiene la ecuación

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 .$$

(Nuevamente todas las magnitudes medidas desde un sistema de referencia solidario a la tierra). Integre la última ecuación y demuestre que

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \frac{1}{3} \vec{\Omega} \times \vec{g} t^3 - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0 t^2 .$$

4. Desde un edificio de altura $h = 100$ m situado en el Ecuador terrestre, se suelta una piedra. Debido a la rotación terrestre, la piedra no caerá a lo largo de la normal sino que se desviará levemente de ella. Una vez que llega al suelo, encuentre la magnitud y dirección de la desviación. Desprecie efectos debido al roce viscoso con el aire. Indicación: use el resultado obtenido en el problema anterior.

Respuesta: La desviación es hacia el este y es de magnitud

$$\frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 2,19 \text{ cm} .$$

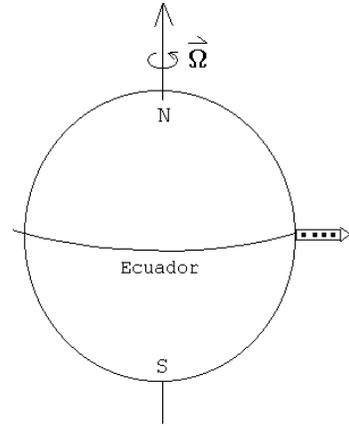


Figura 10.6

5. Desde el Ecuador se lanza un proyectil con velocidad $v_0 = 500$ m/s en la dirección este-oeste, con un ángulo de elevación $\alpha = 10^\circ$. Encuentre como cambia el tiempo que el proyectil tarda en volver a chocar con la tierra y el alcance del proyectil debido a la rotación terrestre. Para resolver este problema no hay que incluir la fuerza centrífuga ya que el efecto de ella ya se incluyó en el vector la aceleración de gravedad \vec{g} , que supondremos constante en magnitud y dirección sobre toda la trayectoria. Ignore cualquier efecto debido al roce con el aire y desprecie correcciones del orden Ω^2 .

Respuesta: El alcance disminuye en

$$\Delta D = \frac{4v_0^3 \Omega}{g^2} \sin \alpha \left(\frac{1}{3} \sin \alpha - \cos^2 \alpha \right) \simeq 62,9 \text{ m} .$$

¿Qué pasa si en lugar de dispararlo de este a oeste se dispara de oeste a este o de sur a norte?

6. Considere un canal de ancho a ubicado sobre la tierra a una latitud $\lambda > 0$, en dirección paralela al Ecuador. Por el canal fluye agua con una velocidad v_0 . Demuestre que, para un observador mirando en la misma dirección del flujo del canal, el nivel del agua al lado derecho del canal es superior a la del lado izquierdo en una cantidad

$$\Delta h = \frac{2a\Omega v_0 \sin \lambda}{g},$$

donde Ω es la velocidad angular de la tierra.

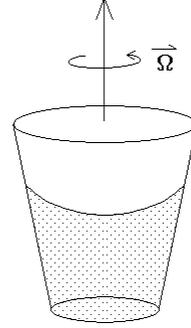


Figura 10.7

7. Un balde con agua gira en torno a su eje de simetría con velocidad angular Ω . Debido a la rotación, la superficie del agua no será plana. Encuentre su forma.

8. Considere un péndulo cónico de largo ℓ , cuya masa gira en el plano horizontal en un círculo de radio R . Si se ignora la fuerza de Coriolis, la frecuencia angular del péndulo cónico es $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, siendo esta independiente del sentido del giro. Demuestre que al incluir la fuerza de Coriolis, las frecuencias en ambos sentidos ya no son iguales, teniéndose

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda$$

y

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda,$$

donde λ es la latitud del lugar en que se encuentra el péndulo.

9. (Péndulo de Foucault)

Al superponer (sumar) las dos soluciones de un péndulo cónico correspondientes al mismo radio de giro, pero rotando en sentidos opuestos, se obtiene la solución de un péndulo simple.

- a) Demuestre lo anterior en forma explícita para un péndulo cónico ignorando la fuerza de Coriolis.
- b) Al realizar el mismo cálculo, pero ahora incluyendo el efecto de Coriolis (ver problema anterior), se encuentra que debido a la rotación terrestre, el plano de oscilación del péndulo simple no se mantendrá invariante sino que girará paulatinamente. Demuestre que la velocidad angular con que gira el

plano de oscilación del péndulo viene dado por $\omega_F = \Omega \sin \lambda$, donde Ω es la velocidad angular de la tierra en torno a su propio eje y λ es la latitud del lugar en que se encuentra el péndulo.

Foucault fue el primero en demostrar experimentalmente, con un péndulo muy largo, que el plazo de oscilación efectivamente gira a medida que transcurre el tiempo. Observe que en el Ecuador el plano de oscilación no gira, mientras que en los polos da una vuelta completa en 24 horas (después de 6 horas el plano de oscilación habrá girado en 90°).

10. Considere una cuña de masa M y ángulo de elevación α que puede deslizarse sobre un plano horizontal sin roce. Sobre el plano inclinado se encuentra otra masa m , que a su vez también puede deslizarse sobre el plano sin roce. Encuentre la aceleración del plano inclinado M .

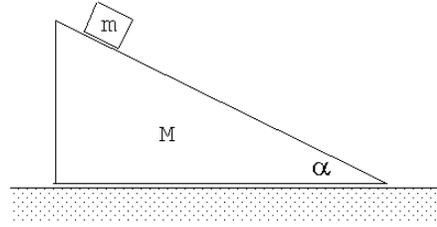


Figura 10.8

10.4. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 3

Como la tierra está girando en torno a su propio eje, la fuerza *efectiva* que actúa sobre el proyectil será

$$\vec{F}_{\text{eff}} = m \vec{g} - 2 m \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

(La fuerza centrífuga $\vec{F}_{\text{centrífuga}} = m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ no debe incluirse ya que su efecto está considerado en el valor local de la aceleración de gravedad \vec{g}). Todas las magnitudes en la ecuación anterior se refieren a variables medidas en un sistema fijo a la Tierra, es decir, respecto a un sistema de referencia que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto a un sistema de referencia inercial. ($\vec{\Omega}$ es la velocidad angular de la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje.)

Al incluir la fuerza efectiva podemos seguir usando la segunda ley de Newton. Se tiene

$$\vec{F}_{\text{eff}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - 2 m \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

o sea,

$$m d\vec{v} = m \vec{g} dt - 2 m \vec{\Omega} \times d\vec{r}.$$

Integrando (sumando) desde un instante inicial a uno final se obtiene

$$\int_i^f d\vec{v} = \int_i^f \vec{g} dt - 2 \vec{\Omega} \times \int_i^f d\vec{r}.$$

Sea $t_i = 0$, $t_f = t$, $\vec{v}_i = \vec{v}_0$, $\vec{v}_f = \vec{v}$, $\vec{r}_i = 0$ y $\vec{r}_f = \vec{r}$. Entonces, evaluando las integrales de la última ecuación se obtiene

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (10.6)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo se encuentra la aceleración

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Reemplacemos \vec{v} en esta ecuación por la expresión dada por (10.6), entonces

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_0 + \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 - 2(\vec{\Omega} \times \vec{g})t + O(\Omega^2) \end{aligned}$$

Integrando estas expresiones respecto al tiempo se encuentra la velocidad y luego la posición en función de t :

$$\begin{aligned} \int_i^f \vec{a} dt &= \int_i^f \vec{g} dt - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 \int_i^f dt - 2\vec{\Omega} \times \vec{g} \int_i^f t dt \\ \vec{v} - \vec{v}_0 &= \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 t - \vec{\Omega} \times \vec{g}t^2 \\ \int_i^f \vec{v} dt &= \int_i^f \vec{v}_0 dt + \int_i^f \vec{g}t dt - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 \int_i^f t dt - \vec{\Omega} \times \vec{g} \int_i^f t^2 dt \\ \vec{r}(t) &= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - (\vec{\Omega} \times \vec{v}_0)t^2 - \frac{1}{3}(\vec{\Omega} \times \vec{g})t^3. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Solución al problema 5

Definamos los ejes del sistema referencia solidario con la Tierra tal como se muestra en la figura adjunta. El proyectil se dispara desde P en la dirección este-oeste con un ángulo de elevación α , luego la velocidad inicial del proyectil viene dada por

$$\vec{v}_0 = -v_0 \cos \alpha \hat{y} + v_0 \sin \alpha \hat{x} .$$

Los vectores correspondientes a la aceleración de gravedad (local) y la velocidad angular de la Tierra vienen dados por

$$\vec{g} = -g \hat{y}$$

y

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z} .$$

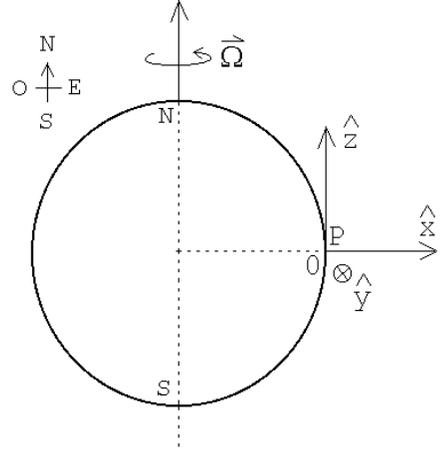


Figura 10.9

Reemplazando estas relaciones en (10.7) se obtiene la posición del proyectil a medida que transcurre el tiempo (medido desde el lugar de lanzamiento):

$$\vec{r}(t) = -v_0 t \cos \alpha \hat{y} + v_0 t \sin \alpha \hat{x} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{x} + \frac{1}{3} g t^3 \Omega \hat{y} - v_0 t^2 \Omega \cos \alpha \hat{x} - v_0 t^2 \Omega \sin \alpha \hat{y} .$$

Sea t^* el instante en que el proyectil vuelve a caer sobre la Tierra. En ese instante se tiene que

$$\vec{r}(t^*) = -D \hat{y} ,$$

donde D es el alcance del proyectil. Evaluando $\vec{r}(t)$ en el instante t^* e igualando el resultado con la expresión anterior, se puede despejar t^* y D obteniéndose

$$t^* = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g + 2 \Omega v_0 \sin \alpha} \simeq \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha - \Omega \left(\frac{2 v_0}{g} \right)^2 \sin \alpha \cos \alpha + O(\Omega^2) .$$

(Estamos despreciando todas las correcciones del orden Ω^2). Para D se obtiene la expresión

$$D = v_0 t^* \cos \alpha - \frac{1}{3} t^{*3} g \Omega + v_0 t^{*2} \Omega \sin \alpha .$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión para t^* se encuentra (despreciando nuevamente todos los términos de orden $O(\Omega^2)$) que

$$D = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha + 4 \frac{v_0^3 \Omega}{g^2} \sin \alpha \left(\frac{1}{3} \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \right) .$$

El primer término del lado derecho de la última ecuación es el alcance del proyectil si se ignora la fuerza de Coriolis; el segundo término es la corrección (a primer orden en Ω), que sufre el alcance debido a la rotación terrestre.

Solución al problema 9

a) La posición en función del tiempo de un péndulo cónico de largo ℓ que recorre un círculo de radio R viene dada por

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \hat{x} + R \sin(\omega t) \hat{y},$$

con $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Esta solución corresponde a un péndulo cónico que gira en la dirección contraria al reloj. Una solución que gira en el mismo sentido que el reloj viene dada por

$$\vec{r}_2(t) = R \cos(\omega t) \hat{x} + R \sin(-\omega t) \hat{y}.$$

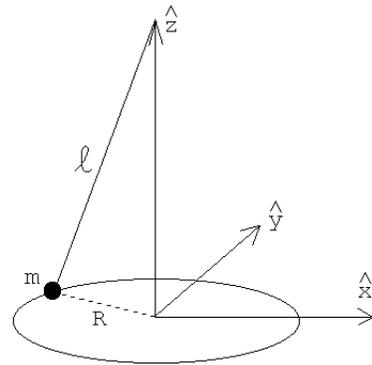


Figura 10.10

Al ignorar la rotación de la Tierra (es decir, al despreciar la fuerza de Coriolis) las frecuencias angulares para ambos sentidos es la misma.

Al sumar las dos soluciones se obtiene la proyección sobre el plano x - y de la solución correspondiente a un péndulo lineal. En efecto:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = 2R \cos(\omega t) \hat{x}.$$

El lado derecho corresponde al movimiento de un oscilador a lo largo del eje \hat{x} con amplitud $2R$ (esto es, la proyección de la posición del péndulo sobre el plano horizontal).

b) Al incluir el efecto de la fuerza de Coriolis, los vectores posición (en el plano $x-y$) de los péndulos cónicos, a medida que transcurre el tiempo, vienen dados por

$$\vec{r}_1(t) = R \cos(\omega_1 t) \hat{x} + R \sin(\omega_1 t) \hat{y} ,$$

y

$$\vec{r}_2(t) = R \cos(\omega_2 t) \hat{x} + R \sin(\omega_2 t) \hat{y} ,$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda$$

y

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda ,$$

donde λ es la latitud del lugar en que se encuentra el péndulo (ver problema 10.8). Al sumar las dos soluciones y usar las relaciones

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right)$$

y

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right)$$

se encuentra

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = 2R \cos\left(\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \lambda + \frac{g}{\ell}} t\right) \cdot [\cos(\Omega t \sin \lambda) \hat{x} - \sin(\Omega t \sin \lambda) \hat{y}] .$$

La expresión delante del paréntesis cuadrado corresponde a un movimiento oscilatorio de amplitud $2R$ y con esencialmente la frecuencia $\sqrt{g/\ell}$. El término en paréntesis cuadrado es un vector unitario que indica la dirección de oscilación. Observe, sin embargo, que ese vector unitario rota lentamente en el plano $x-y$ a medida que transcurre el tiempo. O sea, la dirección de oscilación de este oscilador (el plano de oscilación del péndulo) rotará a medida que avanza el tiempo, siendo la velocidad angular de rotación de este movimiento

$$\omega_F = \Omega \sin \lambda .$$

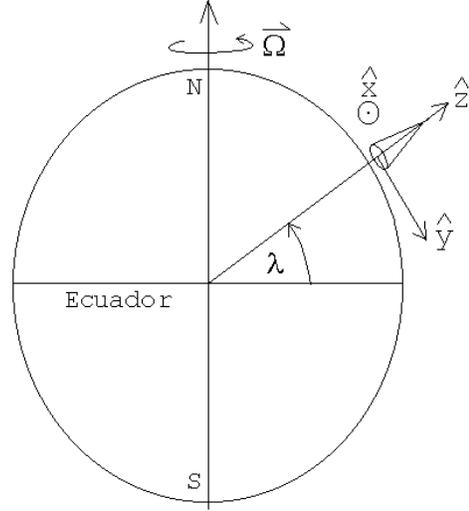


Figura 10.11

Solución al problema 10

Resolvamos el problema usando un sistema solidario a la cuña. Sea $\vec{a} = -a\hat{x}$ la aceleración de la cuña. Al graficar los diagramas de cuerpo libre en el sistema de referencia acelerado, debemos agregar las fuerzas ficticias. Los diagramas de cuerpo libre de la masa m y de la cuña se muestran en la figura siguiente.

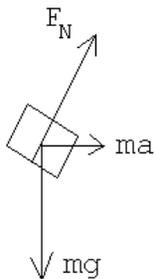


Figura 10.12a

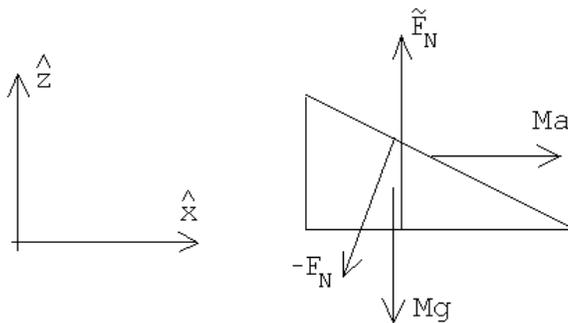


Figura 10.12b

En el sistema solidario a la cuña, la aceleración de la masa m es $\vec{a}_m = a_x\hat{x} - a_z\hat{z}$, donde

$$\frac{a_z}{a_x} = \tan \alpha , \tag{10.8}$$

y la aceleración de la cuña M es nula. De los diagramas de cuerpo libre se deducen las ecuaciones de movimiento

$$-mg\hat{z} + F_N \cos \alpha \hat{z} + F_N \sin \alpha \hat{x} + ma \hat{x} = m\vec{a}_m$$

y

$$-F_N \sin \alpha \hat{x} + Ma \hat{x} - Mg\hat{z} + \tilde{F}_N \hat{z} = 0 .$$

De la segunda ecuación se encuentra que $F_N = Ma/\sin \alpha$, y de la primera se obtienen las componentes a_z y a_x de la aceleración de m :

$$a_z = mg - F_N \cos \alpha$$

$$a_x = ma + F_N \sin \alpha .$$

Usando estas relaciones y (10.8), se encuentra

$$\tan \alpha = \frac{mg - F_N \cos \alpha}{ma + F_N \sin \alpha} ,$$

de donde, finalmente,

$$a = \frac{mg}{M \cotg \alpha + (m + M) \tan \alpha} .$$

Capítulo 11

Gravitación

versión 2 enero 2012

Las contribuciones de Isaac Newton a la Física y la Matemática son numerosas, y en los capítulos anteriores y los que siguen exploramos sólo algunas de ellas. La sistematización de conocimientos previamente adquiridos gracias a cuidadosas observaciones, la formalización a través de las herramientas matemáticas adecuadas, muchas de ellas desarrolladas por el propio Newton, como el Cálculo Diferencial, y la extracción de nuevas consecuencias y predicciones a partir de dicha formalización, son sin duda logros mayores. Sin embargo, de todas estas contribuciones, probablemente la que es mayormente reconocida fuera de los círculos científicos es la Teoría de la Gravitación Universal. Gracias a ella, Newton nos entregó un modelo preciso para explicar una variedad abismante de fenómenos. Fenómenos que durante siglos fueron considerados completamente desconectados (la caída de una manzana, las mareas, el movimiento de los planetas), o para los cuales no se tenía un modelo que los explicara (las órbitas elípticas de los planetas, la aceleración constante con la que caen los cuerpos cerca de la superficie terrestre), y otros que ni siquiera se sospechaban (el retorno de los cometas, la existencia de planetas más allá de Saturno), todos no eran sino consecuencia de una sola y simple ecuación para la fuerza entre dos masas.

La Teoría de la Gravitación Universal de Newton es una de las teorías más importantes con las que contamos, y su inmensa fama es, sin duda, merecida. En este capítulo estudiaremos algunos aspectos de la misma. Comenzaremos con un complemento matemático sobre elipses, ya que una de las consecuencias de esta teoría es que los planetas describen, en torno al Sol, órbitas elípticas (o, en general, cónicas: elipses, parábolas o hipérbolas). Con estos elementos matemáticos a mano seremos capaces, en las páginas siguientes, de reconocer rápidamente la predicción de que las órbitas debidas a la atracción gravitacional son siempre cónicas, y podremos caracterizar los parámetros geométricos de las órbitas en términos de cantidades físicas (energía, momento angular). Observaremos también que es posible describir el complejo problema de la trayectoria de dos cuerpos masivos sujetos a su mutua atracción gravitacional

como un problema de un solo cuerpo orbitando en torno a un cuerpo en reposo, y además como un problema unidimensional, lo que permitirá realizar muchos análisis de manera muy sencilla. Finalmente, definiremos el campo gravitatorio, nuestro primer acercamiento al concepto de *campo*, un concepto fundamental, ampliamente utilizado en muchas áreas de la Física.

11.1. Elipses

Como indicamos en la introducción, una de las predicciones importantes de la teoría de la gravitación es que las órbitas de los planetas en torno al Sol serán cónicas (elipses, parábolas o hipérbolas). Por ello, comenzaremos este capítulo recordando algunos resultados matemáticos relevantes para estas curvas.

Consideremos dos puntos, f_1 y f_2 ubicados en un plano. Consideremos adicionalmente un tercer punto P (en el mismo plano), y denotemos por r y r' a las distancias de este punto y f_1 y f_2 , respectivamente. Por definición, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano para los cuales $r + r' = 2a$, en que $2a$ es una constante (mayor que la separación entre f_1 y f_2).

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesiano, con el origen en el centro de la figura geométrica y el eje \hat{x} a lo largo de la recta que une los dos *focos* f_1 y f_2 . Es claro que el *semieje mayor* de la elipse es a . Sea $2c$ la distancia entre los dos focos, entonces

$$\text{semieje menor} = b = \sqrt{a^2 - c^2} .$$

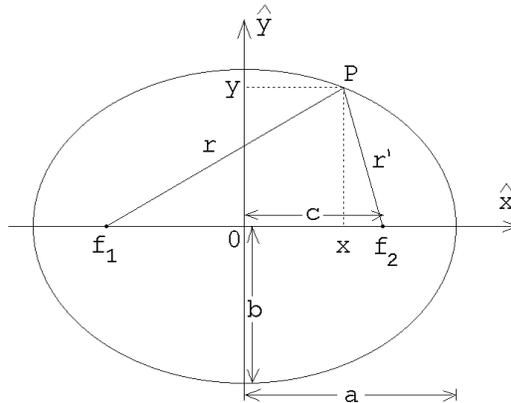


Figura 11.1

Elipse en coordenadas cartesianas

De la figura 11.1 se deduce que

$$\begin{aligned} 2a &= r + r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) + 2cx} + \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) - 2cx} . \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$2(c^2 + x^2 + y^2) + 2\sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) + 2cx} \cdot \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) - 2cx} = 4a^2 ,$$

o sea,

$$\begin{aligned} 2a^2 - (c^2 + x^2 + y^2) &= \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) + 2cx} \cdot \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) - 2cx} \\ &= \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} . \end{aligned}$$

Elevando nuevamente al cuadrado queda

$$4a^4 - 4a^2(c^2 + x^2 + y^2) + (c^2 + x^2 + y^2)^2 = (c^2 + x^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 ,$$

o sea,

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 .$$

Usando la relación $c^2 = a^2 - b^2$ se deduce finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{11.1}$$

Elipse en coordenadas polares

Otra representación útil y común de la elipse es en términos de coordenadas polares (r, ϕ) , tomando como origen a uno de los focos (ver figura 11.2).

Se tiene que

$$x = r \cos \phi - c ,$$

$$y = r \sin \phi$$

y

$$y^2 = r^2 (1 - \cos^2 \phi) .$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas dada por la ecuación (11.1), se obtiene

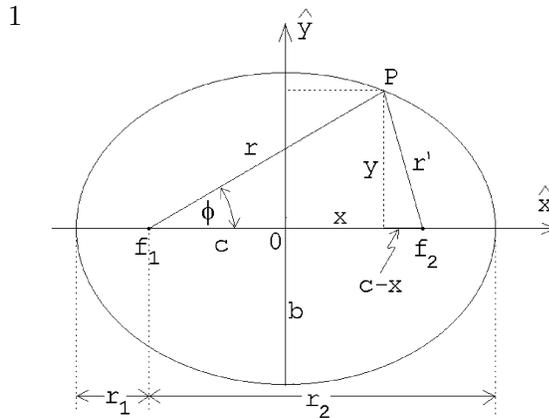


Figura 11.2

$$\begin{aligned} b^2 (r \cos \phi - c)^2 + a^2 r^2 (1 - \cos^2 \phi) &= a^2 b^2 , \\ b^2 r^2 \cos^2 \phi - 2b^2 r c \cos \phi + b^2 c^2 + a^2 r^2 - a^2 r^2 \cos^2 \phi &= a^2 b^2 , \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} a^2 r^2 &= (a^2 - c^2) b^2 + 2b^2 c r \cos \phi + (a^2 - b^2) r^2 \cos^2 \phi \\ &= b^4 + 2b^2 \sqrt{a^2 - b^2} r \cos \phi + (a^2 - b^2) r^2 \cos^2 \phi \\ &= \left[b^2 + \sqrt{a^2 - b^2} r \cos \phi \right]^2 . \end{aligned}$$

Extrayendo la raíz, se deduce que

$$ar = b^2 + \sqrt{a^2 - b^2} r \cos \phi . \quad (11.2)$$

Introduciendo los parámetros

$$r_0 \equiv \frac{b^2}{a} \quad (11.3)$$

y

$$\epsilon \equiv \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} . \quad (11.4)$$

la ecuación (11.2) se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} (1 - \epsilon \cos \phi) . \quad (11.5)$$

Al parámetro ϵ se le denomina *excentricidad* de la elipse. Observemos que siempre se tiene que $\epsilon < 1$. Un caso particular es la circunferencia, en cuyo caso $b = a$, es decir, la circunferencia tiene excentricidad nula.

Resumen: Las dos formas más usuales para representar una elipse son:

i) Coordenadas cartesianas x, y (con el origen al centro):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \quad (11.6)$$

donde los parámetros a y b representan a los semi-ejes mayor y menor, respectivamente.

ii) Coordenadas polares r, ϕ (con el origen en uno de los focos):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} (1 - \epsilon \cos \phi) . \quad (11.7)$$

Las ecuaciones (11.3) y (11.4) relacionan los parámetros a, b con r_0, ϵ .

Si colocamos ahora el origen en uno de los focos, se denomina *perigeo* a la distancia mínima entre la elipse y dicho foco, y *apogeo* a la distancia máxima (¡no deben confundirse con los semiejes menor y mayor de la elipse!). Denominemos r_1 y r_2 al perigeo y al apogeo, respectivamente. Entonces podemos encontrar relaciones entre los semiejes menor, mayor, y la excentricidad, por un lado, con el apogeo y el perigeo, por otro. En efecto:

$$r_1 = a - c$$

y

$$r_2 = a + c ,$$

de donde se deduce que

$$r_1 + r_2 = 2a$$

y

$$r_1 r_2 = a^2 - c^2 = b^2.$$

En otras palabras, el semieje mayor es el promedio aritmético

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

y el semieje menor el promedio geométrico

$$b = \sqrt{r_1 r_2}$$

del apogeo y perigeo.

La excentricidad, en términos de r_1 y r_2 , es

$$\epsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}.$$

Ejercicio: Conociendo el área de un círculo y las ecuaciones en coordenadas cartesianas de un círculo y de una elipse, demuestre que el área A de una elipse viene dada por

$$A = \pi ab,$$

donde a y b son sus semiejes.

Una propiedad muy interesante de las elipses es que si desde uno de sus focos emerge un rayo de luz, y éste se refleja especularmente en la elipse, entonces el rayo pasa necesariamente por el otro foco.

Para demostrar esta propiedad consideremos dos puntos P y P' sobre la elipse, infinitesimalmente cercanos. Sean R_1 y R'_1 los rayos que unen los puntos P y P' con el foco f_1 y R_2 y R'_2 los rayos que unen los puntos P y P' con el foco f_2 (ver figura 11.3). Como $R_1 + R_2 = R'_1 + R'_2 = 2a$, se deduce que $\overline{PA} = \overline{P'B}$. Los triángulos PAP' y $P'BP$ son equivalentes, luego los ángulos β y δ son iguales. Pero $\delta = \alpha$, luego $\beta = \alpha$. Esta última relación implica que los rayos R_1 y R'_1 corresponden a rayos reflejados en forma especular por la elipse.

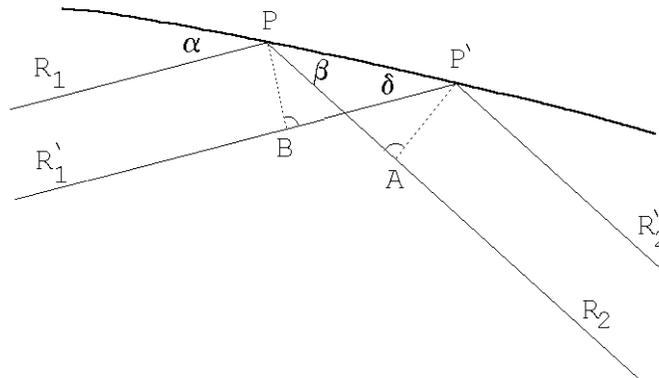


Figura 11.3

Ejercicio: Considere la función siguiente (en coordenadas polares):

$$\frac{1}{r} = 1 - \epsilon \cos \phi.$$

Grafique $r(\phi)$ para $\epsilon = 0, 0.5, 1.0$ y 1.5 .

11.2. Las leyes de Kepler

Basándose en precisas mediciones de la posición de los planetas realizadas por Tycho Brahe, Johannes Kepler (1571–1630) pudo establecer las siguientes leyes para describir el movimiento de los planetas alrededor del Sol:

1. Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos.
2. Cada planeta “barre” áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de su trayectoria.

Estas leyes empíricas se conocen como *Leyes de Kepler*.

A continuación mostraremos cómo la ley de gravitación universal de Newton se puede deducir a partir de dichas leyes.

Primero, debemos notar que, por lo que sabemos, la primera ley de Kepler no puede ser completamente correcta. Si dos cuerpos son libres excepto por la fuerza de interacción que existe entre ellos, entonces éstos deben moverse de manera que el centro de masas se mantenga en reposo (o en movimiento uniforme). O sea, el Sol necesariamente también tiene que estar moviéndose. Sin embargo, siendo la masa del

Sol muy superior a la de los planetas, el centro de masas Sol-planeta esencialmente coincide con la posición del Sol y en ese caso resulta ser una muy buena aproximación suponer que el Sol está en reposo en uno de los focos de la elipse. (La masa del Sol es de $1.99 \cdot 10^{30}$ kg mientras que la de la Tierra es de $5.98 \cdot 10^{24}$ kg.)

Ahora bien, tal como se demostró en la Sec. 8.2, el hecho de que un planeta “barre” áreas iguales en tiempos iguales es equivalente a decir que el momento angular $\vec{\ell}$ no varía en función del tiempo. Esto a su vez implica que el torque ejercido por el Sol sobre el planeta es nulo, lo que a su vez implica que la fuerza entre los dos cuerpos debe ser a lo largo de la línea que los une. En otras palabras, la segunda ley de Kepler implica que la fuerza entre el Sol y el planeta debe ser radial, en dirección \hat{r} . Más aún, si la energía se conserva, entonces debe existir una energía potencial $U(\vec{r})$, tal que la fuerza gravitacional es el gradiente de $U(\vec{r})$. Por lo tanto, para que la fuerza esté en la dirección \hat{r} , necesariamente U debe depender sólo de $r = |\vec{r}|$, y por lo tanto la fuerza gravitacional es de la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = -f(r)\hat{r},$$

con $f(r)$ alguna función que depende sólo de la distancia entre las partículas.

Hasta el momento, hemos usado la segunda ley de Kepler, en conjunto con las leyes de conservación del momento angular y de la energía, para encontrar la forma que debería tener la fuerza de gravedad entre dos cuerpos. Para encontrar la función $f(r)$ debemos fijarnos en más datos observacionales. La tabla adjunta muestra algunos de los parámetros orbitales para los planetas pertenecientes al sistema solar.

Planeta	Semieje mayor u.a.	Período [s]	Excentricidad	Inclinación	Masa [kg]
Mercurio	0.387	$7.60 \cdot 10^6$	0.205	7° 00'	$3.28 \cdot 10^{23}$
Venus	0.723	$1.94 \cdot 10^7$	0.006	3° 23'	$4.83 \cdot 10^{24}$
Tierra	1.000	$3.16 \cdot 10^7$	0.016	—	$5.98 \cdot 10^{24}$
Marte	1.523	$5.94 \cdot 10^7$	0.093	1° 51'	$6.37 \cdot 10^{23}$
Júpiter	5.202	$3.74 \cdot 10^8$	0.048	1° 18'	$1.90 \cdot 10^{27}$
Saturno	9.554	$9.30 \cdot 10^8$	0.055	2° 29'	$5.67 \cdot 10^{26}$
Urano	19.218	$2.66 \cdot 10^9$	0.046	0° 46'	$8.80 \cdot 10^{25}$
Neptuno	30.109	$5.20 \cdot 10^9$	0.008	1° 46'	$1.03 \cdot 10^{26}$
Plutón	39.60	$7.82 \cdot 10^9$	0.246	17° 07'	$5.4 \cdot 10^{24}$

(Los astrónomos, para medir distancias, frecuentemente usan la *unidad astronómica* (u.a.). Una unidad astronómica es igual al semieje mayor de la órbita terrestre, 1 u.a. = $1,495 \cdot 10^{11}$ m.)

De la tabla anterior se sigue que la excentricidad $\epsilon = (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)$ de la mayoría de los planetas es bastante pequeña, siendo sus órbitas, por lo tanto, casi circulares. (Al dibujar una elipse con una excentricidad $\epsilon = 0,05$ es difícil, sólo mirándola, darse cuenta de que difiere de un círculo.)

Si suponemos que, en primera aproximación, las órbitas de los planetas son circulares, entonces, a partir de la tercera ley de Kepler, podemos encontrar una expresión para la magnitud de la fuerza gravitacional. En efecto:

La tercera ley de Kepler dice que

$$T^2 = Kr^3,$$

donde K es una constante (la misma para todos los planetas) y r es el radio de la órbita “circular”. El radio r de la órbita, la velocidad v y el período T están relacionados por

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Por otra parte la magnitud de la fuerza gravitacional debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$f(r) = \frac{mv^2}{r},$$

donde m es la masa del planeta. Usando estas tres ecuaciones, despejando v y T , se encuentra

$$f(r) = \frac{4\pi^2 m}{K} \frac{1}{r^2}.$$

La constante K , de acuerdo a la tercera ley de Kepler, no depende de ninguna propiedad de los planetas, pero si podría depender de alguna propiedad del Sol. Es más o menos evidente, por razones de simetría, que si la fuerza gravitacional depende de la masa m del planeta, entonces debe tener la misma dependencia de la masa del Sol M . Esta última observación sugiere escribir

$$\frac{4\pi^2}{K} = GM,$$

donde G es una nueva constante que ahora es independiente de las masas del Sol y del planeta. De esta manera se deduce que la fuerza gravitacional entre dos masas m y M , separadas por una distancia r , es

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}.$$

La última ecuación precisamente es la *ley de gravitación universal de Newton* siendo G la así llamada *constante gravitacional*. Usando una balanza de torsión (ver figura 11.4), Cavendish en el año 1798 midió G en el laboratorio. El dispositivo experimental fue el siguiente: dos masas m se colocan en los extremos de una barra rígida y se cuelgan desde el centro de un alambre (hilo de torsión) que se sujeta firmemente del cielo. El sistema puede girar libremente en el plano horizontal, pero tiene una orientación para la cual está en equilibrio.

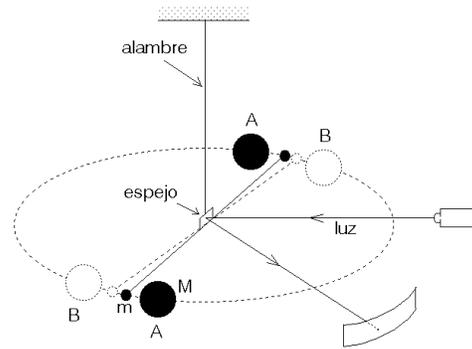


Figura 11.4

Si las masas m se sacan del equilibrio, por ejemplo, dándoles una pequeña velocidad de rotación, entonces el sistema comenzará a oscilar teniéndose un *péndulo de torsión*. A partir del período de este movimiento oscilatorio se puede deducir la constante de restitución de torsión (o sea, el torque que ejerce el hilo de torsión cuando este se gira en una magnitud α).

La orientación del péndulo se detecta con un rayo de luz que es reflejado por un pequeño espejo adosado a la varilla.

El experimento mismo se realiza en dos etapas. Primero se colocan dos masas M en las posiciones A y se registra la orientación de la varilla. Luego se rotan las masa M a las posiciones B y se vuelve a registrar la orientación de la varilla. A partir de la variación de la orientación de la varilla en estas dos mediciones se puede deducir la fuerza entre m y M .

El experimento es bastante difícil ya que la fuerza de atracción de las dos masas es muy pequeña. Por ejemplo, una masa $m = 20$ kg es atraída por otra de masa $M = 150$ kg con una fuerza de sólo $2,35 \cdot 10^{-5} \cdot g$ N (esto es, el peso de una masa de 23 miligramos) cuando la separación de sus centros es de 30 cm.

El valor actualmente aceptado para el valor de G es:

$$G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} .$$

Ejercicio: Conocidos el período y el radio de la órbita terrestre alrededor del Sol y usando el valor de G recién dado, determine la masa del Sol.

11.3. Satélites

En esta sección analizaremos algunos aspectos del movimiento de *satélites* que orbitan gravitacionalmente entorno a un objeto masivo. Algo es un satélite si su masa m es mucho menor que la masa M del objeto alrededor del cual orbita. En particular, los resultados de la presente sección podrán aplicarse al movimiento de los planetas alrededor del Sol, de las lunas alrededor de los planetas y de los satélites artificiales alrededor de la Tierra. Las trayectorias de todos estos objetos corresponden a elipses (y círculos), o sea, a cónicas con excentricidades $0 \leq \epsilon < 1$.

En la sección 11.1 se relacionaron los parámetros r_0 y ϵ de una elipse con el semieje mayor a y el semieje menor b y también con el perigeo $r_1 = r_{\min}$ y el apogeo $r_2 = r_{\max}$ de ella. A continuación estudiaremos la dependencia de estos parámetros de las *constantes de movimiento* de la órbita; específicamente del momento angular orbital ℓ y de la energía total E .

La condición $m \ll M$ implica que la masa mayor esencialmente se mantendrá en reposo en uno de los focos de la elipse, lugar en que ubicaremos el origen.

La fuerza sobre la partícula m (el satélite) viene dada por

$$\vec{F}(r) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r} .$$

Esta fuerza, que es conservativa, da origen a una energía potencial

$$U(r) = -G \frac{mM}{r} .$$

Si en cierto instante la posición y velocidad de la partícula m es \vec{r} y \vec{v} , entonces la energía total del sistema será

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} .$$

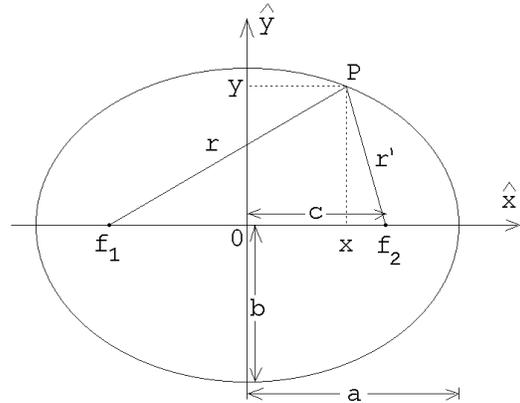


Figura 11.1

Sean P_1 y P_2 los puntos correspondientes al perigeo y apogeo, respectivamente (ver figura 11.5). Como la energía total se conserva ésta debe ser igual a E tanto en el apogeo como en el perigeo, o sea,

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{r_2} . \quad (11.8)$$

Como la fuerza que actúa sobre m es central se tiene que también el momento angular (respecto al origen) se conserva. Evaluando el momento angular en el apogeo

y perigeo, se encuentra

$$\ell = mr_1 v_1 = mr_2 v_2 . \quad (11.9)$$

De esta ecuación se obtiene

$$v_1 = \frac{\ell}{mr_1}$$

y

$$v_2 = \frac{\ell}{mr_2} .$$

Sustituyendo esto en (11.8) se encuentra

$$E = \frac{1}{2m} \frac{\ell^2}{r_1^2} - G \frac{mM}{r_1} \quad (11.10)$$

y

$$E = \frac{1}{2m} \frac{\ell^2}{r_2^2} - G \frac{mM}{r_2} . \quad (11.11)$$

De estas dos ecuaciones se deduce

$$2mEr_1^2 = \ell^2 - 2Gm^2Mr_1$$

y

$$2mEr_2^2 = \ell^2 - 2Gm^2Mr_2 .$$

Restándolas se obtiene

$$E(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = -GmM(r_2 - r_1)$$

$$E = -G \frac{mM}{r_1 + r_2} = -G \frac{mM}{2a} ,$$

o sea, el semieje mayor de la órbita viene determinado sólo por la energía E :

$$a = -G \frac{mM}{2E} . \quad (11.12)$$

Encontremos ahora una relación entre b (el semieje menor de la órbita) y el momento angular y energía del satélite. Esta se obtiene restando las ecuaciones (11.11) de (11.10):

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{2mr_1^2} - \frac{\ell^2}{2mr_2^2} - G \frac{mM}{r_1} + G \frac{mM}{r_2} &= 0 \\ \ell^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) &= 2Gm^2M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \ell^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} &= 2Gm^2M \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

$$\ell^2 \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} = 2Gm^2 M$$

$$\ell^2 \frac{2a}{b^2} = 2Gm^2 M ,$$

o sea,

$$b^2 = \frac{a\ell^2}{Gm^2 M} = -\frac{\ell^2}{2Em} . \quad (11.13)$$

La importancia de las ecuaciones (11.12) y (11.13) radica en que son éstas las que relacionan las constantes de movimiento de la órbita con su forma geométrica.

Otra relación importante se obtiene usando la segunda Ley de Kepler: como el momento angular se conserva se tiene que la partícula m “barre” áreas iguales en tiempos iguales. La cantidad de área que el satélite “barre” en un intervalo de tiempo dt lo podemos evaluar cuando éste se encuentra en el apogeo:

$$dA = \frac{1}{2} r_2 v_2 dt = \frac{\ell}{2m} dt .$$

De esta relación se deduce que el área total, $A = \pi ab$, la partícula m lo barre en un tiempo T dado por

$$\pi ab = \frac{\ell}{2m} T ,$$

es decir,

$$T^2 = \frac{4m^2 \pi^2 a^2 b^2}{\ell^2} .$$

Usando (11.13) se obtiene, finalmente,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 , \quad (11.14)$$

resultado que no es otro que la tercera ley de Kepler. Pero observe que ahora conocemos la constante de proporcionalidad entre T^2 y a^3 .

Deseamos recalcar que las ecuaciones (11.13) y (11.14) son sólo válidas en el límite $m \ll M$. Cuando las dos masas son del mismo orden las ecuaciones deben corregirse).

Ilustremos el uso de las ecuaciones anteriores resolviendo un problema:

Problema:

Si la Tierra conservara su energía total, pero perdiera la mitad de su cantidad de momento angular respecto al Sol (por ejemplo, cambiándole bruscamente la dirección de su velocidad),

- a) ¿Qué tanto se acercaría al Sol?
- b) ¿Cuál sería la distancia de alejamiento máxima (apogeo) de la Tierra en su nueva órbita?
- c) ¿Cuál sería el largo del año en ese caso?
- d) ¿Cuál tendría que ser el ángulo en que se varía bruscamente la dirección de la Tierra?

Suponga que inicialmente la órbita es circular.

Solución:

Sea R el radio de la órbita circular en torno al Sol (estamos suponiendo que el centro de masas del sistema coincide con la posición del Sol). La órbita circular es un caso particular de elipse para la cual $a = b = R$. Sean a' y b' los semiejes mayor y menor de la elipse final (después de haberle cambiado bruscamente su dirección).

Como la energía de la Tierra no cambia, se tiene que $a' = a = R$. De la ecuación (11.13) se deduce que el semieje menor disminuirá a la mitad, o sea, $b' = b/2 = R/2$. Para el perigeo y apogeo se encuentra

$$r_1 = a' - \sqrt{a'^2 - b'^2} = R - \sqrt{R^2 - R^2/4} = R \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

y

$$r_2 = a' + \sqrt{a'^2 - b'^2} = R \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

Como el período sólo depende de a (tercera ley de Kepler) y a no cambia, se encuentra que el año de la Tierra en su nueva órbita seguiría siendo de 365 días.

La magnitud del momento angular viene dada por la magnitud del momento lineal por el brazo. Como el momento lineal no cambia, para disminuir el momento angular a la mitad debemos disminuir el brazo a la mitad. De la figura 11.6 se desprende inmediatamente que el ángulo debe ser $\alpha = 60^\circ$.

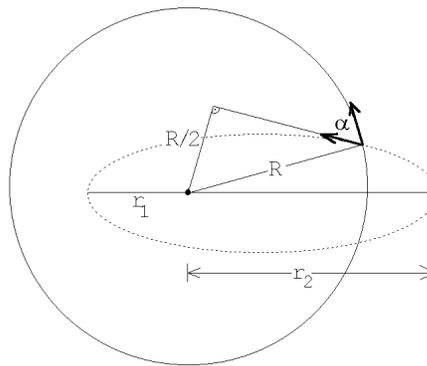


Figura 11.6

11.4. Potencial efectivo

Sea \vec{r} el vector posición de m . La fuerza que actúa sobre m es

$$\vec{F}(r) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}, \quad (11.15)$$

y la energía potencial asociada a esta fuerza es

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}. \quad (11.16)$$

A continuación mostraremos que cuando la energía potencial es central, es decir, sólo depende de la magnitud del vector \vec{r} y no de su dirección, entonces el problema de determinar la trayectoria del satélite se puede reducir a un problema unidimensional.

Es evidente que si la energía potencial de una partícula es central, entonces el campo de fuerzas generador del potencial, es radial. Por otra parte, una fuerza radial no ejerce torque respecto al origen. Si el torque respecto al origen es nulo, el momento angular $\vec{\ell}$ de la partícula no puede alterarse, luego el momento angular (para una partícula moviéndose en un potencial central) es una constante de movimiento (igual que, por ejemplo, la energía total). Que el momento angular sea una constante de movimiento significa que ni la magnitud ni la dirección del momento angular cambian a medida que transcurre el tiempo. También sabemos que la velocidad de la partícula es siempre perpendicular al momento angular. Como la dirección del momento angular no cambia se concluye que el movimiento de la partícula necesariamente debe transcurrir en un plano.

Debido a la importancia de este resultado lo volvemos a remarcar:

En un potencial central la fuerza siempre es solamente radial. Un potencial central no ejerce un torque sobre la partícula respecto al origen, lo que a su vez implica que el momento angular de la partícula respecto a tal origen nunca varía (es una constante de movimiento). Una consecuencia de lo anterior es que el movimiento de una partícula en un potencial radial siempre transcurre en un plano.

El papel que juega el momento angular como constante de movimiento es similar al papel de constante de movimiento que juega la energía total; ambos son magnitudes que, de alguna manera, están determinadas por las condiciones iniciales del problema. Supongamos, por consiguiente, que conocemos la energía total E , la magnitud del momento angular ℓ del sistema y el plano en el que transcurre el movimiento.

Descompongamos la velocidad $\vec{v}(\vec{r})$ de la partícula, cuando ella se encuentra en el lugar \vec{r} , en una componente radial y una componente perpendicular a \hat{r} (ver figura 11.7):

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi} . \quad (11.17)$$

Acá \hat{r} y $\hat{\phi}$ son vectores unitarios; el primero en la dirección radial, el segundo perpendicular a \hat{r} , pero en el plano de la trayectoria.

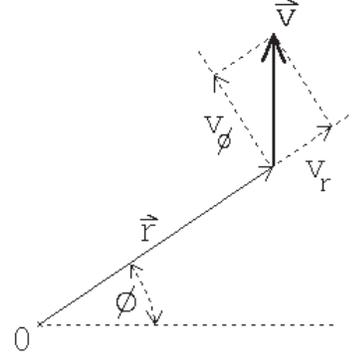


Figura 11.7

El módulo del momento angular de la partícula es

$$\ell = r m v_\phi ,$$

o sea, una vez conocido ℓ la velocidad v_ϕ queda determinada por la distancia r de la partícula al centro:

$$v_\phi(r) = \frac{\ell}{mr} . \quad (11.18)$$

De lo anterior concluimos que el problema queda esencialmente resuelto si logramos establecer cómo varía la distancia r en función del tiempo. Una vez conocido $r(t)$, no sólo se conoce la velocidad radial $v_r = \dot{r}$, sino que también, usando la ecuación (11.18), la velocidad v_ϕ . A su vez, conocida la velocidad en función del tiempo podemos, integrando, obtener la posición $\vec{r}(t)$ de la partícula en todo instante.

De la discusión anterior se desprende que debemos centrar la atención en resolver el movimiento radial de la partícula de masa m .

Sabemos que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = K + U . \quad (11.19)$$

Por otra parte, la energía cinética viene dada por

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\phi^2) , \quad (11.20)$$

que, usando $\dot{r} = v_r$ y la ecuación (11.18), queda de la forma

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2} \right) . \quad (11.21)$$

Sustituyendo este resultado en (11.19) se obtiene

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(\frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) \right) . \quad (11.22)$$

Esta es una ecuación que sólo depende del radio r , de la velocidad radial \dot{r} y constantes de movimiento. Esta ecuación, por lo tanto, se puede reinterpretar como la correspondiente al problema de una partícula de masa m y energía total E , que se mueve en una dimensión (dada por la coordenada r) en un potencial dado por

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} . \quad (11.23)$$

De esta manera hemos reducido el problema original a un problema unidimensional: el de una partícula de masa m afectada por una fuerza

$$F_{\text{eff}}(r) = -\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} . \quad (11.24)$$

$U_{\text{eff}}(r)$ se llama el *potencial efectivo*, mientras que $\ell^2/(2mr^2)$ es el así llamado *potencial centrífugo*. Cuando el momento angular es cero, el potencial efectivo coincide con el potencial original.

La ecuación (11.22) podemos escribirla como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) .$$

Derivándola respecto al tiempo se obtiene

$$0 = m\dot{r}\ddot{r} + \frac{dU_{\text{eff}}}{dr}\dot{r} , \quad (11.25)$$

de donde, dividiendo por \dot{r} y usando (11.24), encontramos una ecuación de movimiento para $r(t)$:

$$m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} . \quad (11.26)$$

Es esta la ecuación que resolveremos en la próxima sección para encontrar las trayectorias de los satélites.

De acuerdo a lo discutido más arriba, para establecer cómo se comporta el vector \vec{r} , debemos resolver el problema de una partícula de masa m moviéndose en el potencial dado por la ecuación (11.23):

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} . \quad (11.27)$$

La energía total $E = K + U$ y el momento angular ℓ son constantes de movimiento, es decir, para un problema físico en particular, tienen valores fijos bien determinados.

A Caso $\ell = 0$.

Consideremos brevemente el caso de momento angular $\ell = 0$. Este valor para el momento angular implica que la partícula nunca tiene una velocidad tangencial, o sea, la partícula siempre se mueve a lo largo de la recta que une M con m .

La figura 11.8 muestra el potencial $U_{\text{eff}}(r)$ que, en este caso, coincide con $U(r)$. Si la energía de la partícula es $E < 0$, entonces la máxima distancia a la que se puede alejar es r_0 .

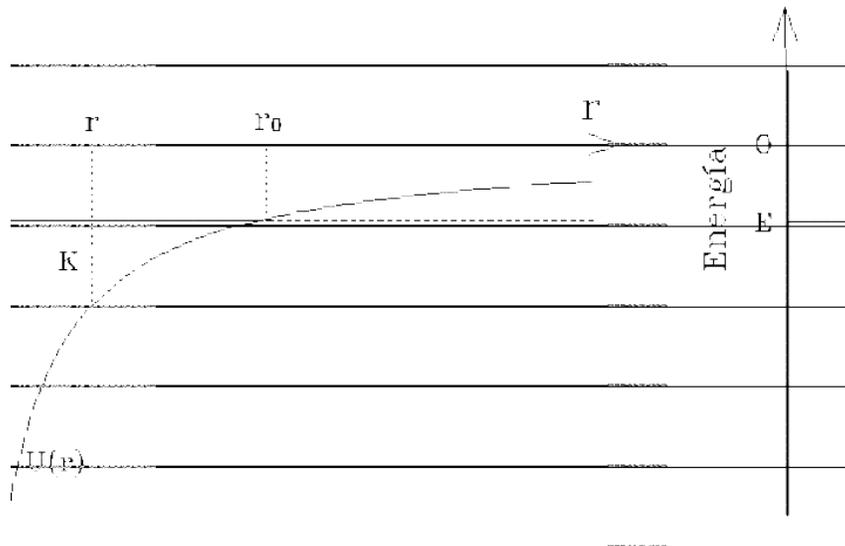


Figura 11.8 : Potencial efectivo para $\ell = 0$.

Si la partícula en un instante está en r_0 , entonces su energía total E coincide con la energía potencial $U(r_0)$ y la energía cinética, por lo tanto, es nula — la partícula se encuentra en reposo. Sin embargo, sobre la partícula actúa una fuerza ya que la pendiente de la energía potencial en r_0 no es nula. De hecho, la pendiente es positiva, luego sobre m actúa una fuerza negativa que la hace acelerar hacia el origen. A medida que transcurre el tiempo la distancia entre m y M disminuirá progresivamente. La energía cinética de m (y por consiguiente el módulo de la velocidad radial), como también la fuerza atractiva irán aumentando. Finalmente, después de transcurrido un tiempo finito, la masa m llegará al origen, teniendo una energía cinética infinita. (No debemos preocuparnos demasiado por este infinito que apareció. Obviamente ningún potencial físico es de la forma $-GmM/r$ hasta $r = 0$. Todos los objetos físicos tienen un

tamaño, y a más tardar cuando la distancia entre los objetos es menor que la suma de sus “radios”, la interacción cambia de carácter.)

B Caso $\ell \neq 0$.

La figura 11.9 muestra el potencial $U(r)$, el potencial centrífugo $\ell^2/(2mr^2)$ y el potencial efectivo $U_{\text{eff}}(r)$ para dos valores del momento angular ($\ell_1 > \ell_2$). Es este último, el potencial efectivo, el que es útil para analizar el comportamiento de la variable $r = |\vec{r}|$ en función del tiempo.



Figura 11.9: Potencial centrífugo y efectivo para dos valores del momento angular distintos (no nulos).

Consideremos nuevamente una partícula con energía $E < 0$ (ver figura 11.10). La partícula, en este caso, está restringida a moverse entre r_1 y r_2 . (Para el caso del movimiento de la tierra alrededor del sol el vector \vec{r} recorre una trayectoria elíptica y las magnitudes r_1 y r_2 corresponden a la distancia mínima y máxima de esa elipse). La energía cinética de la partícula es $K = E - U(r)$, siendo $K_r = E - U_{\text{eff}}(r)$ la energía cinética radial y $K_t = U_{\text{eff}}(r) - U(r)$ la energía cinética tangencial. Cuando la partícula se encuentra en el perigeo r_1 o en el apogeo r_2 , ella no tiene energía cinética radial, pero sí tiene una energía cinética

tangencial. Note que la energía cinética tangencial es mayor en el perigeo que en el apogeo.

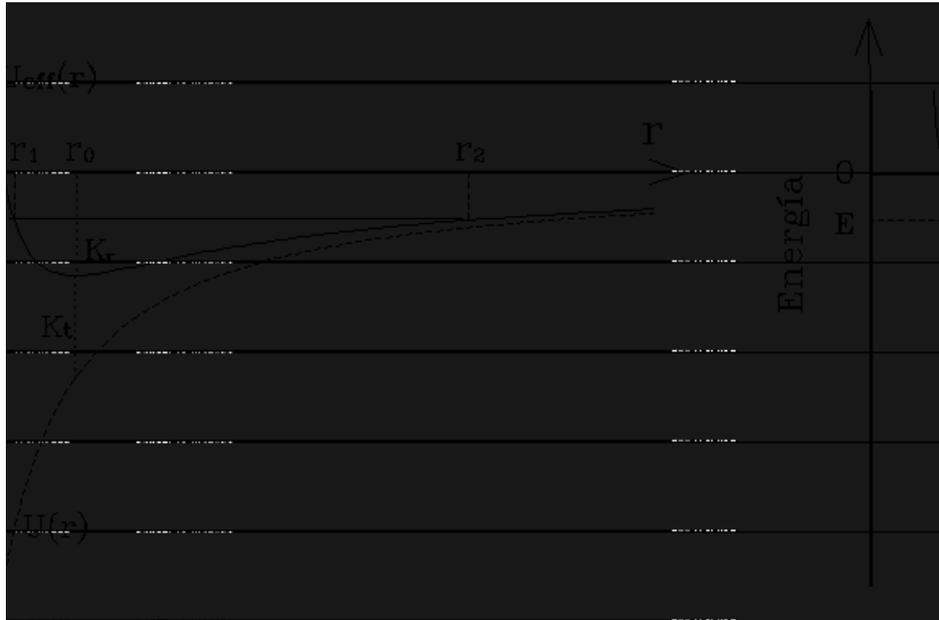


Figura 11.10: Potencial efectivo para $\ell \neq 0$.

Si la energía es positiva ($E > 0$), entonces la partícula no está ligada; la partícula se acerca hasta una distancia mínima y luego se aleja indefinidamente, para no volver. (Estas trayectorias corresponden a las soluciones hiperbólicas del problema; los cometas que provienen de fuera del sistema solar son un ejemplo de tales trayectorias.) Cuando la energía total es exactamente cero, la trayectoria tampoco es acotada y la trayectoria, como veremos en la siguiente sección, corresponde a una parábola.

Cuando la energía total es igual al mínimo del potencial efectivo, entonces la partícula no tiene energía cinética radial, pero sí una energía cinética tangencial; tal trayectoria corresponde a la solución circular del problema gravitatorio.

11.5. Trayectorias de los satélites

En esta sección analizaremos las posibles trayectorias de un satélite de masa m cuando es atraído gravitacionalmente por un cuerpo masivo de masa M de acuerdo a la ley de gravitación universal.

Del análisis hecho en la sección anterior (ver ecuación 11.26) se desprende que debemos estudiar la ecuación de movimiento

$$m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3}. \quad (11.28)$$

El momento angular ℓ es una constante de movimiento y viene determinada por las condiciones iniciales del problema, es decir, para un problema en particular no cambia su valor a medida que transcurre el tiempo.

Sabemos que al menos algunas de las soluciones de esta ecuación deben ser elipses. En coordenadas polares la ecuación de una elipse es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} (1 - \epsilon \cos \phi) .$$

Esto sugiere que, en lugar de analizar una ecuación para r en función de t , sería mejor buscar una ecuación para $w = w(\phi) \equiv 1/r$ en función de ϕ , pues tal ecuación probablemente sea simple.

Realicemos esos cambios de variable. Tenemos

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} r = \frac{d}{dt} \frac{1}{w} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw(\phi)}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} .$$

Pero

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{\ell w^2}{m} ,$$

luego

$$\dot{r} = -\frac{\ell}{m} \frac{dw}{d\phi} .$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo se obtiene

$$\ddot{r} = -\frac{\ell}{m} \left(\frac{d}{dt} \frac{dw}{d\phi} \right) = -\frac{\ell}{m} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{dw}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\ell}{m} \frac{d^2 w}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\ell^2}{m^2} w^2 \frac{d^2 w}{d\phi^2} .$$

Sustituyendo esta expresión en (11.28) y usando que $w = 1/r$, se obtiene

$$-\frac{\ell^2}{m} w^2 \frac{d^2 w}{d\phi^2} = -GmMw^2 + \frac{\ell^2}{m} w^3 ,$$

o sea,

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + w = \frac{1}{r_0} . \quad (11.29)$$

En la ecuación anterior se introdujo r_0 definido por

$$r_0 \equiv \frac{\ell^2}{GMm^2} .$$

Tal como sospechábamos, la ecuación diferencial para w en función de ϕ , efectivamente es muy simple. Si el lado derecho fuese nulo, la solución sería

$$w(\phi) = A \cos(\phi) ,$$

donde A es una constante. (Elegir la función *seno* en lugar *coseno* sólo redefine el lugar desde el cual estamos midiendo los ángulos.) Es claro que al agregarle la constante $1/r_0$ a la última expresión, se encuentra una solución de (11.29). Por último, si en lugar de A introducimos ϵ dado por

$$\epsilon = -A r_0 ,$$

entonces la expresión para $r(\phi) = 1/w(\phi)$ queda de la forma

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{r_0} (1 - \epsilon \cos(\phi)) . \quad (11.30)$$

Hemos encontrado una expresión para la distancia r en función del ángulo polar. Como es usual para ecuaciones diferenciales de segundo grado, la solución general tiene dos constantes (en este caso r_0 y ϵ) que deben determinarse a partir de las condiciones iniciales.

La ecuación (11.30), de acuerdo al valor de ϵ , corresponde a las distintas secciones cónicas:

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 & \quad \text{corresponde a un círculo} \\ 0 < \epsilon < 1 & \quad \text{corresponde a una elipse} \\ \epsilon = 1 & \quad \text{corresponde a una parábola} \\ 1 < \epsilon & \quad \text{corresponde a una hipérbola} \end{aligned}$$

11.6. El campo y potencial gravitacional

La ley de gravitación universal de Newton nos da la fuerza de atracción debido a la gravedad que actúa entre dos masas, en efecto,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

es la fuerza que actúa sobre la masa m debido a la masa M donde r es la separación entre las masas y \hat{r} es un vector unitario que apunta de M a m .

Es conveniente introducir el concepto de campo gravitacional para describir el efecto que una masa M introduce en su entorno. Definimos el *campo gravitacional de la masa M* por

$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv -G \frac{M}{r^2} \hat{r} .$$

Si en el lugar \vec{r} de este campo gravitacional generado por la masa M colocamos una masa m , entonces sobre m actuará una fuerza

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r}) .$$

Un campo es un ente que está definido en todos los puntos del espacio que nos interesa. Como \vec{g} es un vector, el campo gravitacional se dice que es un *campo vectorial*.

No sólo existen campos vectoriales, también existen campos escalares, tensoriales, etc.. Un ejemplo de un campo escalar es la temperatura. Supongamos que en todos los puntos de una pieza puedo medir la temperatura T , entonces $T(\vec{r})$ define un campo escalar (el campo de temperatura) de la pieza. Que un campo sea vectorial significa que en cada punto no sólo tiene una magnitud sino que también una dirección.

El campo gravitacional satisface el principio de superposición: si distintas masas m_1, m_2, \dots, m_N ubicados en los lugares $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ generan campos gravitacionales $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_N$, entonces el campo gravitacional en el punto \vec{r} será

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_j \vec{g}_j(\vec{r} - \vec{r}_j) = -G \sum_j \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) .$$

Cuando se tiene un campo de fuerzas conservativo, resulta muy conveniente introducir el concepto de energía potencial. El campo gravitacional es conservativo y en un capítulo anterior demostramos que la energía potencial de dos masas M y m , separadas por una distancia r , viene dado por

$$U(r) = -G \frac{mM}{r} .$$

La constante aditiva arbitraria se ha elegido de manera que la energía potencial sea nula cuando las dos masas están separadas por una distancia infinita ($r \rightarrow \infty$). La relación anterior sugiere definir otro campo, un campo escalar, por

$$\phi(r) = -G \frac{M}{r} .$$

$\phi(\vec{r})$ se llama el *potencial gravitatorio* de la masa M . Si se coloca una masa m en el potencial gravitatorio ϕ de una masa M , entonces la energía potencial del sistema es

$$U(r) = m\phi(r) ,$$

donde r es la separación entre las masas m y M .

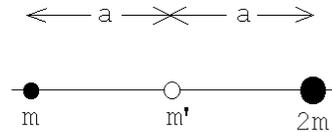
El potencial gravitacional también satisface el principio de superposición: si distintas masas m_1, m_2, \dots, m_N ubicados en los lugares $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ generan potenciales gravitacionales $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$, entonces el potencial gravitacional total en el punto \vec{r} será

$$\phi(\vec{r}) = \sum_j \phi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) = -G \sum_j \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} .$$

Ilustremos los conceptos anteriores con dos problemas.

Problema 1:

Considere dos masas, de valor m y $2m$, que se encuentran separados por una distancia $2a$ (ver figura adjunta).



a) Calcule el valor de la energía potencial gravitacional de una masa m' ubicada en el punto medio entre las dos.

Figura 11.11

b) ¿Cuál es la fuerza gravitacional ejercida sobre m' ?

c) ¿Cuál es la *velocidad de escape* v_e ? ¿Dependerá ésta de la dirección ?

Solución

La energía potencial de una masa m' ubicada en el punto central es

$$U = m'\phi = -G\frac{mm'}{a} - G\frac{2mm'}{a} = -G\frac{3mm'}{a} .$$

La fuerza que actúa sobre m' es

$$\vec{F} = m'\vec{g} = m' \left[-G\frac{m}{a^2}\hat{x} + G\frac{2m}{a^2}\hat{x} \right] = -G\frac{mm'}{a^2}\hat{x} .$$

La velocidad de escape es la mínima velocidad que debe darse a la partícula para que se aleje llegando hasta infinito (se escape del sistema). Para que la masa m' escape su energía debe ser no negativa. La mínima energía que debe tener es por lo tanto $E = 0$, o sea, la energía cinética debe ser de igual magnitud que la energía potencial pero de signo contrario:

$$K = \frac{1}{2}m'v_e^2 = G\frac{3mm'}{a} .$$

Finalmente, para la velocidad de escape, que no depende de la dirección, se encuentra

$$v_e = \sqrt{\frac{6Gm}{a}} .$$

Problema 2:

Considere dos partículas, de masas m y M , que inicialmente están en reposo y separadas por una distancia muy grande (infinita). Demuestre que en cualquier instante su velocidad relativa de acercamiento atribuible a la atracción gravitacional es

$$v = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{D}},$$

donde D es la distancia que las separa.

Solución

Situémonos en el sistema del centro de masas. Si en cierto instante las velocidades de las dos masas (observadas desde el centro de masas) son \vec{v}_m y \vec{v}_M , estas cumplen con

$$m\vec{v}_m = -M\vec{v}_M.$$

Para la energía cinética de ambas partículas se obtiene

$$K = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Inicialmente tanto la energía potencial (la separación es grande) como la cinética son nulas. Como la energía total se conserva, esta deberá ser nula en todo instante. Cuando las partículas están separadas por una distancia D la energía potencial es

$$U = -G\frac{mM}{D},$$

y, por lo tanto, la energía cinética debe ser de la misma magnitud pero de signo contrario:

$$K = \frac{1}{2}mv_m^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) = G\frac{mM}{D}.$$

Despejando v_m se obtiene

$$v_m^2 = \frac{2GM^2}{D(m+M)}.$$

La velocidad relativa es igual a $v = v_m + v_M$, luego

$$v = \sqrt{\frac{2GM^2}{D(m+M)}} + \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2GM^2}{D(m+M)}} = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{D}}.$$

11.7. El caso eléctrico: la ley de Coulomb

Resulta conveniente, en este punto, mostrar brevemente la gran analogía existente entre la fuerza de gravedad entre dos masas y la fuerza eléctrica entre dos cargas q_1 y q_2 .

Caso gravitatorio

La fuerza gravitatoria sobre la masa # 2, debido a la masa # 1 viene dada por la *ley universal de gravitación de Newton*:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

donde \hat{r} es un vector unitario que apunta de la partícula # 1 a la # 2.

El campo y potencial gravitacional asociado a una masa M es

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

y

$$\phi(\vec{r}) = -G \frac{M}{r} .$$

La relación entre \vec{g} y ϕ es:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{r_0}^r \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} .$$

Al colocar una masa m en el campo gravitacional de una masa M , entonces la fuerza sobre m y su energía potencial vienen dadas por

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r})$$

y

$$U(\vec{r}) = m\phi(\vec{r}) .$$

Caso electrostático

La fuerza electrostática sobre la carga # 2, debido a la carga # 1 viene dada por la *ley de Coulomb*:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

donde \hat{r} es un vector unitario que apunta de la partícula # 1 a la # 2.

El campo y potencial electrostático asociado a una carga Q es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

y

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} .$$

La relación entre \vec{E} y ϕ es:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{r_0}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} .$$

Al colocar una carga q en el campo gravitacional de una carga Q , entonces la fuerza sobre q y su energía potencial vienen dadas por

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

y

$$U(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}) .$$

Observaciones:

- a) Las ecuaciones electrostáticas se han dado en el sistema de unidades MKS. La unidad de la carga en este sistema de unidades es el *Coulomb* [C].

- b) En la electrostática el factor $1/(4\pi\epsilon_0)$ juega el rol que G juega en la gravitación.
- c) Una diferencia entre la gravitación y la electrostática es que la fuerza de gravitación entre dos masas iguales es atractiva mientras que la de dos cargas iguales es repulsiva. Esto se refleja en un cambio de signo en algunas de las ecuaciones.
- d) Otra diferencia importante e interesante es que en la electrostática las cargas pueden ser positivas y negativas. Este hecho da origen a numerosas situaciones y fenómenos interesantes que no pueden darse en el caso gravitatorio (por ejemplo, el concepto de *dipolo puntual*).

11.8. Campo gravitacional de una cáscara esférica

Ejercicio: Demuestre que

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{a + bx}) = \frac{b}{2\sqrt{a + bx}},$$

donde a y b son constantes. Como corolario de este ejercicio se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a + bx}} dx = \frac{2}{b} \sqrt{a + bx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{2}{b} [\sqrt{a + bx_2} - \sqrt{a + bx_1}].$$

Considere una cáscara esférica de radio R de densidad de masa uniforme. Si la masa total de la cáscara es M , entonces su densidad superficial de masa será

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

Deseamos encontrar el potencial gravitacional ϕ en el punto P debido a la cáscara esférica. Para ello primero evaluamos la contribución de un anillo de ancho $R d\theta$ que forma un ángulo θ con la línea que une P con el centro de la esfera. La masa del anillo es

$$dm = \sigma (2\pi R \sin \theta) R d\theta.$$

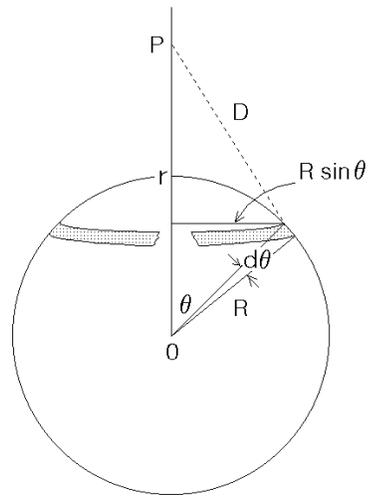


Figura 11.12

Todos los puntos del anillo están a la misma distancia $D = \sqrt{(R \sin \theta)^2 + (r - R \cos \theta)^2}$ del punto P , luego la contribución del anillo al potencial gravitatorio es

$$\begin{aligned} d\phi &= -G \frac{dm}{D} = -2\pi G \sigma R^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(R \sin \theta)^2 + (r - R \cos \theta)^2}} \\ &= -2\pi G \sigma R^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}}. \end{aligned}$$

Sumando la contribución de todos los anillos obtenemos el potencial total:

$$\phi = \int_0^\pi d\phi = -2\pi G \sigma R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}}.$$

La integral la podemos evaluar con un cambio de variable. Denotemos $\cos \theta$ por s . Entonces

$$\begin{aligned} s &= \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} &= -\sin \theta, \end{aligned}$$

o sea

$$\sin \theta d\theta = ds.$$

Observando que si $\theta = 0$ entonces $s = 1$ y si $\theta = \pi$, entonces $s = -1$, podemos reescribir la integral:

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}} = - \int_1^{-1} \frac{ds}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rRs}}.$$

Usando ahora el resultado del ejercicio propuesto al iniciar la presente sección (con $a = R^2 + r^2$, $b = -2rR$, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$), se obtiene

$$\begin{aligned} I &= - \int_1^{-1} \frac{ds}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rRs}} \\ &= - \frac{2}{-2rR} \left[\sqrt{R^2 + r^2 + (-2rR)(-1)} - \sqrt{R^2 + r^2 + (-2rR) \cdot 1} \right] \\ &= \frac{1}{rR} [(R + r) - |R - r|] \end{aligned}$$

Distinguiendo con cuidado los dos casos $r > R$ y $R < r$, se obtiene que

$$I = \begin{cases} \frac{2}{R} & \text{si } r < R \\ \frac{2}{r} & \text{si } r > R \end{cases}.$$

De esta manera, para el potencial de una cáscara esférica de radio R y masa M se encuentra la expresión

$$\phi(r) = \begin{cases} -G \frac{M}{R} & \text{para } R > r \\ -G \frac{M}{r} & \text{para } r > R \end{cases}.$$

Algunas observaciones importantes respecto a este resultado:

- a) Para $r > R$, o sea, cuando el punto P se encuentra fuera de la cáscara esférica, el potencial gravitacional que ésta ejerce es idéntica a la que se hubiese obtenido si toda la masa de la cáscara se ubica en el origen.
- b) Si el potencial afuera es el mismo al de una masa puntual, entonces también el campo gravitacional lo será, o sea, la fuerza que la cáscara esférica ejercerá sobre una masa m (si ésta se encuentra en el exterior) será

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r} .$$

- c) En el interior de la cáscara esférica el potencial gravitacional es constante (no depende de la posición). Esto significa que el campo gravitacional ahí es nulo, o sea, si colocamos una masa m en el interior, sobre ella la cáscara esférica no ejercerá ninguna fuerza gravitacional.

Resumen:

Para una cáscara esférica de radio R y masa M se tiene

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2} \hat{r} & (\text{para } r > R) \\ 0 & (\text{para } r < R) \end{cases}$$

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & (\text{para } r > R) \\ -\frac{GM}{R} & (\text{para } r \leq R) \end{cases}$$

La figura 11.13 muestra un gráfico de la intensidad del campo gravitacional y el potencial para una cáscara esférica.

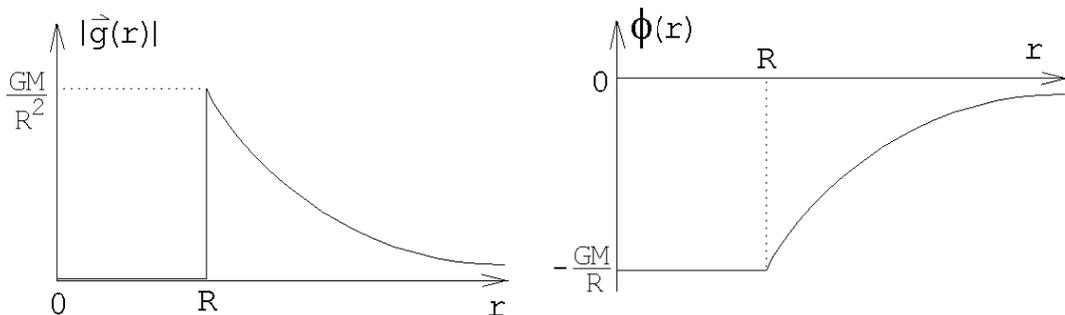


Figura 11.13

A continuación presentaremos una demostración alternativa de que una cáscara esférica no ejerce ningún campo gravitacional al interior de ella.

Algunos preliminares: Al intersectar un ángulo (infinitesimal) $d\theta$ con un círculo de radio r , el largo del arco es $ds = r d\theta$ (ver figura 11.14). Si tal arco se “inclina” en un ángulo β , el largo del arco (línea segmentada) ahora es $ds = rd\theta / \cos \beta$.

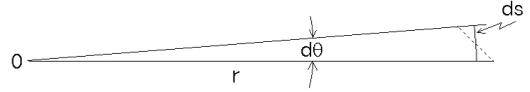


Figura 11.14

Estos conceptos se pueden generalizar para ángulos sólidos en tres dimensiones. Para ellos tomemos una esfera de radio r y consideremos un área A (que puede tener forma irregular) sobre la superficie. Si unimos todos los puntos del perímetro del área con el centro obtenemos un ángulo sólido.

En forma análoga a lo que ocurre para ángulos en un plano, definimos el ángulo sólido por $\Omega \equiv A/r^2$. El ángulo sólido completo (en el espacio tridimensional) es, por lo tanto, 4π . A la inversa, si tenemos un ángulo sólido infinitesimal $d\Omega$ e interceptamos este con una esfera de radio r , el área definido por la intersección será $dA = r^2 d\Omega$. Si el área la inclinamos en un ángulo β , su área será $dA = r^2 d\Omega / \cos \beta$.

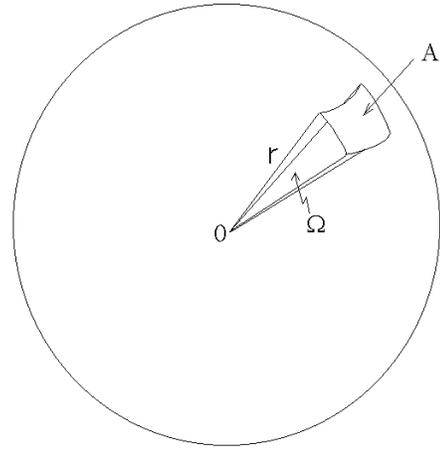


Figura 11.15

Volviendo a la cáscara esférica de radio R y masa M , evaluemos el campo gravitacional en un punto P que se encuentra en su interior (ver figura 11.16).

Consideremos un ángulo sólido $d\Omega$ desde el punto P y hacia los dos lados. El ángulo sólido intersecta a la cáscara esférica en los lugares A y B (ver figura 11.16). La inclinación de las áreas en A y B es en el mismo ángulo β ya que ABO es un triángulo isósceles. El área que el ángulo sólido intersecta en A es $r_1^2 d\Omega / \cos \beta$ mientras que en B es $r_2^2 d\Omega / \cos \beta$. Sea σ la densidad superficial de masa de la cáscara esférica.

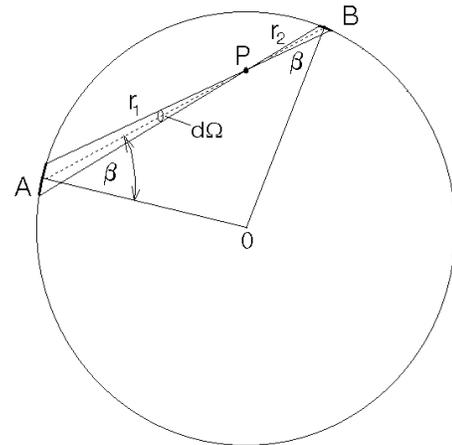


Figura 11.16

El campo gravitacional que el área A genera en P es

$$\vec{g}_A = \left[\sigma \frac{r_1^2 d\Omega}{\cos \beta} \right] \frac{1}{r_1^2} \hat{n} = \frac{\sigma d\Omega}{\cos \beta} \hat{n}.$$

Acá \hat{n} es un vector unitario que apunta de P a A . En forma análoga se obtiene que el campo gravitacional que el área B genera en P es

$$\vec{g}_B = \left[\sigma \frac{r_2^2 d\Omega}{\cos \beta} \right] \frac{1}{r_2^2} (-\hat{n}) = -\frac{\sigma d\Omega}{\cos \beta} \hat{n}.$$

Se observa que el campo gravitacional de las áreas A y B se cancela exactamente. Lo mismo ocurre con cualquier otro ángulo sólido. De la discusión anterior se concluye que al interior, el campo gravitacional generado por una cáscara es necesariamente nulo.

11.9. Campo gravitacional de una esférica sólida

Evaluemos el campo gravitacional en algún punto al exterior de una esfera sólida de masa M y radio R . Para ello es conveniente pensar que la esfera está compuesta de muchas cáscaras esféricas (como una cebolla). Ya sabemos que el campo gravitacional de cada cáscara es el mismo que el que se obtiene al concentrar toda la masa de la cáscara en el centro. La suma de todas las cáscaras (que es la esfera sólida), por lo tanto, generará un campo gravitacional igual al de una masa (equivalente a la suma de las masas de todas las cáscaras) concentrada en el centro. O sea, si el punto P está al exterior de la esfera, a una distancia r del centro, el campo gravitacional será

$$\vec{g}(r) = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}.$$

Un razonamiento análogo permite encontrar el potencial gravitacional (para un punto en el exterior): $\phi(r) = -GM/r$.

Si el punto P se encuentra al interior de la esfera se puede proceder de una manera parecida. Dividamos nuevamente la esfera en numerosas cáscaras esféricas. Todas las cáscaras esféricas con un radio mayor que r no contribuyen al campo gravitacional en P (pues P está al interior de ellas). Las capas con radio menor que r las podemos concentrar en el centro. El campo gravitacional por lo tanto será

$$\vec{g}(r) = -G \frac{m}{r^2} \hat{r},$$

donde m es la masa de las cáscaras interiores, esto es,

$$m = M \frac{r^3}{R^3}.$$

De manera análoga se procede para encontrar el potencial gravitatorio al interior de una esfera sólida.

Resumen: Para una esfera sólida homogénea, de radio R y masa M , se tiene

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2} \hat{r} & \text{(para } r > R) \\ -\frac{GMr}{R^3} \hat{r} & \text{(para } r < R) \end{cases}$$

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & \text{(para } r > R) \\ -\frac{GM}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{(para } r \leq R) \end{cases}$$

La figura 11.18 muestra un gráfico de la intensidad del campo gravitacional y el potencial para una cáscara esférica

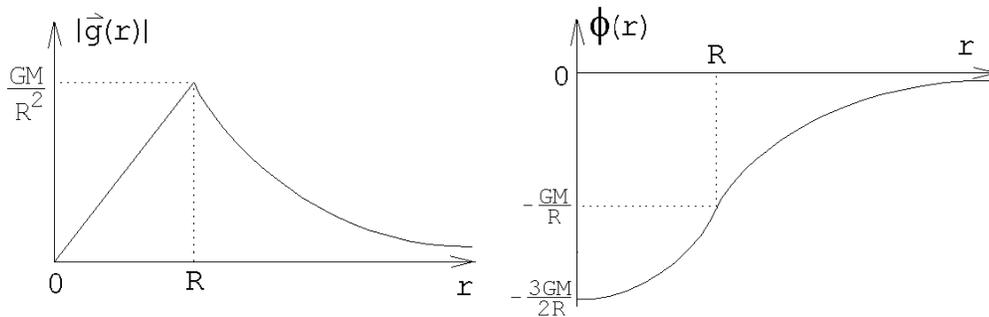


Figura 11.18

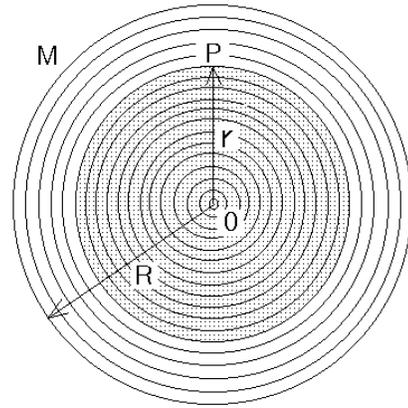


Figura 11.17

Densidad media de la Tierra

Problema: Determinar la densidad media de la Tierra suponiendo conocidos el valor de la constante de la gravitación G , la aceleración de la gravedad g y el radio terrestre R .

Solución: Sobre una masa m colocada en la superficie de la Tierra actúa una fuerza igual a mg . Por otra parte, el campo gravitacional de la Tierra para un punto sobre su superficie se puede evaluar suponiendo que toda la masa de la Tierra está en el centro, es decir,

$$|\vec{g}(R)| = \frac{GM}{R^2},$$

donde M es la masa total de la tierra. Conociendo el campo gravitacional podemos evaluar la fuerza que actúa sobre una masa m ; esta es

$$m|\vec{g}(R)| = \frac{GMm}{R^2}.$$

Igualando las dos expresiones para la fuerza se obtiene para g la expresión

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Esta ecuación relaciona la aceleración de la gravedad $g=9,81 \text{ m/s}^2$ con la constante gravitacional G y la masa y radio terrestre M y R , respectivamente.

La densidad media de la Tierra viene dada por

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR} \\ &= \frac{3 \cdot 981,0}{4 \pi 6,67 \cdot 10^{-8} 6,4 \cdot 10^8} \simeq 5,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \end{aligned}$$

(Para referencia: la densidad del hierro, que es el principal elemento del núcleo terrestre, es de $7,86 \text{ g/cm}^3$.)

11.10. Problemas

1. Júpiter tiene doce lunas conocidas, cuatro de las cuales fueron descubiertas por Galileo. Estos son los radios y períodos de las primeras cuatro:

R (Km)	T (días)
180.000	0,498
422.000	1,769
671.000	3,551
1.072.000	7,155

- a) ¿Obedecen estos cuatro satélites a la tercera ley de Kepler?
 b) Con estos datos y el valor de G , encuentre la masa de Júpiter.
 c) El diámetro de Júpiter es de 142.900 Km. ¿Cuál es su densidad media?
2. Las órbitas de dos satélites terrestres A y B son elípticas, siendo R y $4R$, respectivamente, sus ejes mayores.
- a) ¿Cuál es el cociente entre sus energías mecánicas totales?
 b) ¿Cuál es el cociente entre sus períodos?
 c) ¿Qué puede decirse del cociente entre sus momentos angulares?
3. Un satélite artificial recorre una trayectoria circular 320 Km por encima de la superficie terrestre.
- a) ¿Cuál será su velocidad?
 b) ¿Con qué frecuencia girará alrededor de la Tierra?
4. Dos satélites artificiales de igual masa orbitan alrededor de un planeta. S_1 se mueve en una órbita circular de radio 10^8 [m] y período de 5 días, S_2 se mueve en una órbita elíptica de radios $r_{min} = 10^8$ [m] y $r_{max} = 2 \cdot 10^8$ [m].
- a) A partir de los datos para la órbita circular, calcule la masa del planeta.
 b) Encuentre el período de S_2 .
 c) ¿Cuál satélite es más veloz al pasar por B ? ¿Cuál tiene mayor energía?
 d) Calcule el cociente entre las velocidades que S_2 tiene en B y en A .
 e) ¿Qué maniobra debería ordenar el puesto de mando para poner S_2 en la órbita de S_1 ?

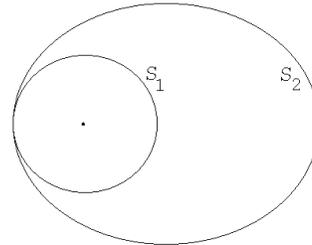


Figura 11.19

Respuesta: $R \simeq 42.000$ km.

6. ¿A qué distancia de la Tierra debe colocarse un cuerpo en la línea dirigida hacia el Sol de tal manera que la atracción gravitacional solar contrarreste a la atracción de la Tierra? El Sol está a $15 \cdot 10^7$ Km de distancia y su masa es de $M_S = 3,24 \cdot 10^5 M_T$ (M_T es la masa de la Tierra = $5,97 \cdot 10^{24}$ Kg). Analice el problema incluyendo el efecto introducido por la rotación de la Tierra alrededor del Sol (o sea, tanto la Tierra como el cuerpo giran alrededor del Sol una vez al año).

Para encontrar la solución (aproximada) use el hecho de que $M_T/M_S \ll 1$.

Respuesta:

$$r \simeq R \left(1 - \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}} \right)$$

es la solución que se tiene si el cuerpo se encuentra entre la Tierra y el Sol. Hay dos soluciones adicionales si se permite que r sea mayor que R . Convéznase de ésto y encuéntrelas.

7. Dos satélites A y B giran alrededor de la Tierra en la misma órbita circular (de radio R), pero uno al lado opuesto de la Tierra respecto al otro. Se desea interceptar el satélite B con un proyectil lanzado desde A . Estudie el problema e indique velocidad y dirección en que debe lanzarse el proyectil para lograr su objetivo. Dé al menos 3 soluciones distintas.
8. El perigeo, punto más próximo de la órbita de un satélite, se halla a 320 Km de la superficie terrestre, y el apogeo, punto más alejado, a 2400 Km.
- ¿Cuál es el semieje mayor de la órbita del satélite?
 - ¿Cuál es la excentricidad de su órbita?
 - Si el satélite tiene una masa de 15 Kg, ¿cuál es su energía total?
 - ¿Cuál es su velocidad en el apogeo?
 - ¿Cuál es su velocidad en el perigeo?
 - ¿Cuál es su momento angular?
9. Una pequeña masa m cae hacia el Sol partiendo del reposo desde una distancia igual al radio de la órbita terrestre. Determine el tiempo de caída usando sólo las leyes de Kepler.
10. Se dice que la órbita de un satélite es *heliosincrónica* si pasa diariamente por los mismos lugares a la misma hora. Suponiendo que la altura mínima de un

satélite es de 200 km por sobre la superficie terrestre, encuentre los radios de todas las orbitas heliosincrónicas circulares.

11. Considere la parábola $y = ax^2$.
 - a) Encuentre su foco.
 - b) Traslade el sistema de coordenadas de manera que el nuevo origen coincida con el foco calculado en la parte a).
 - c) Introduzca coordenadas polares (r, ϕ) , midiendo ϕ desde el mínimo de la parábola y demuestre que la ecuación de la parábola queda de la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s}(1 - \epsilon \cos \phi)$$

con $\epsilon = 1$ y s algún valor constante.

12. Un satélite gira sobre el Ecuador, en el mismo sentido que la Tierra, en una trayectoria elíptica con $r_{min} = 200$ Km y $r_{max} = 500$ Km. Se desea poner este satélite en órbita geoestacionaria. El cohete del satélite es capaz de acelerarlo con una aceleración $a = 50$ m/s². ¿En qué instantes y durante cuánto tiempo se deben prender los motores para lograr el propósito?
13. Calcule el período de rotación de la Luna entorno a la Tierra sabiendo que el radio de su órbita es 60,3 veces el radio de la Tierra.

14. Un cometa de masa αm se dirige (“cae”) radialmente hacia el sol. Observaciones astronómicas permiten establecer que la energía mecánica total del cometa es nula, es decir, $E = 0$. El cometa se estrella contra Venus, cuya masa es m . Supongamos además que la trayectoria de Venus es circular, de radio R_0 . A consecuencia del choque, el cometa y Venus forman un solo astro que llamaremos Vennus.

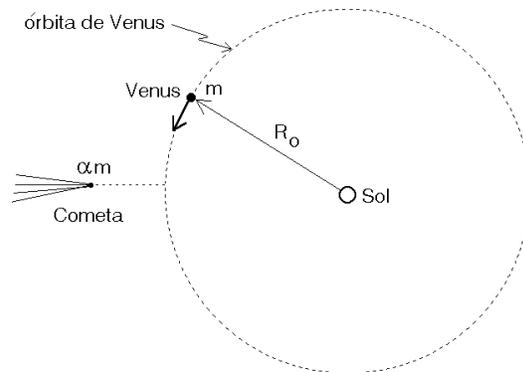


Figura 11.20

- a) Calcule la rapidez v_0 y el período de Venus antes de la colisión.
- b) Calcule la energía mecánica de Venus en su órbita antes de chocar con el cometa.

- c) Calcule la velocidad radial y el momento angular de “Venus” inmediatamente después de la colisión.
- d) Determine la energía mecánica de Venus y exprese la en términos de m , α y v_0 .
- e) Demuestre que la órbita de Venus es elíptica y determine el semieje mayor de la órbita.
- f) Determine si el año para los “venusianos” se ha acortado o alargado a causa del choque con el cometa.

Respuesta parte f): La razón del período de Venus y Venus es

$$\frac{T'}{T} = \left[\frac{1 + \alpha}{1 + 4\alpha} \right]^{3/2} .$$

- 15. Un proyectil de masa m se lanza tangencialmente a la superficie de la Tierra. Suponiendo que no hay resistencia del aire (como en la Luna), calcular la rapidez v_0 con que el proyectil debiese ser lanzado para que orbite en forma circular y tangente a la Tierra. Compare esta velocidad con la velocidad de escape. Calcule el momento angular y la energía del proyectil en esta situación.
- 16. El proyectil del problema anterior ahora es lanzado horizontalmente de la Tierra con una rapidez αv_0 , con $1, \alpha < \sqrt{2}$. Calcule el perigeo y apogeo y la excentricidad de la órbita.
- 17. Dos partículas de igual masa se unen mediante una cuerda ideal de longitud h . El par es atraído gravitacionalmente por un planeta de masa M . La distancia entre el planeta y la partícula más cercana es R , con $h \ll R$.
 - a) Despreciando la fuerza de atracción entre las dos partículas, calcule la tensión de la cuerda si ellas caen sobre el planeta con la cuerda estirada y dispuesta radialmente.
 - b) Ahora tome en cuenta la atracción gravitacional entre las dos masas. Demuestre que para que la cuerda no esté tensa la masa de cada partícula debe ser $m = M(h/R)^3$.

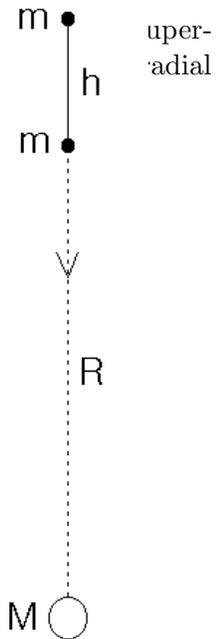


Figura 11.21

18. Marte tiene un diámetro medio de 6.800 Km, la masa de Marte es $0.107 M_T$.
- ¿Cuál es la densidad media de Marte comparada con la de la Tierra?
 - ¿Cuál es el valor de g en Marte?
 - ¿Cuál es la velocidad de escape en Marte?
19. La estrella enana Sirio B tiene un radio que es $1/50$ del radio solar, a pesar de tener aproximadamente la misma masa que el sol.
- ¿Cuál es el valor de g en la superficie de Sirio B?
 - ¿Cuál será la densidad media de Sirio B?
20. Una esfera uniforme de densidad ρ_o y radio R_1 tiene una cavidad esférica de radio R_2 . Encuentre el potencial en el punto \vec{r} (ver figura 11.22).
21. ¿Cuál sería el peso suyo si el radio de la Tierra doblara su valor,
- manteniéndose la masa de la Tierra igual a la actual?
 - manteniéndose la densidad promedio de la Tierra igual a la actual?
22. Dos esferas de plomo, de 1 m de radio, están en contacto.
- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de atracción mutua?
 - ¿Qué velocidad tendrían en el instante de contacto si partieran de posiciones muy separadas en el espacio y “cayeran” una contra la otra? ($\rho_{plomo} = 11.3 \text{ g/cm}^3$).
23. Un satélite de masa $m = 5 \text{ kg}$ es lanzado a una órbita circular cuyo período es de 120 minutos. Ignore la rotación de la Tierra y también cualquier efecto del roce viscoso del satélite con el aire.
- Calcule la razón entre el radio de la órbita del satélite y el radio terrestre.
 - Calcule la energía mínima requerida para poner al satélite en dicha órbita. De esta energía ¿qué fracción se usó para “subirlo” y qué fracción para darle la velocidad requerida?

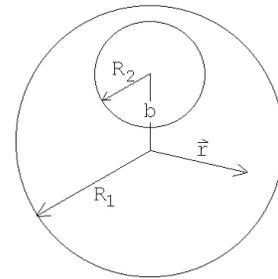


Figura 11.22

24. Una nave cósmica se dirige hacia la Luna a lo largo de una trayectoria parabólica que casi toca a la superficie lunar. En el momento de máxima aproximación un motor de frenado, en un breve lapso, modifica la velocidad de la nave de manera que esta entre en una órbita circular alrededor de la Luna. Encuentre la velocidad de la nave justo antes y después del frenado. La masa y el radio lunar son $M = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg y $R = 1,74 \cdot 10^6$ m, respectivamente.

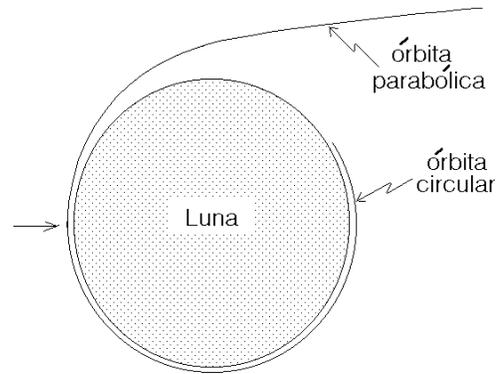


Figura 11.23

25. Se taladra un túnel liso y recto a través de un planeta esférico cuya densidad de masa ρ_o es constante. El túnel pasa por el centro del planeta y es perpendicular al eje de rotación del mismo. El planeta rota con una velocidad angular determinada de modo que los objetos dentro del túnel no tienen aceleración relativa al túnel. Hallar la relación entre ρ_o y ω para que esto sea cierto.
26. Demuestre que en un conducto excavado en la Tierra, siguiendo una cuerda cualquiera, (no siguiendo necesariamente un diámetro), el movimiento de un objeto será armónico simple. (Desprecie efectos de roce y de la rotación de la Tierra). Encuentre el período del movimiento.
27. Discuta el origen de las mareas. ¿Por qué se presentan dos mareas y no una sola?

28. Encuentre la órbita de una partícula que se mueve en un campo central que genera una fuerza

$$F(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} + \frac{\alpha^2}{\mu r^3} .$$

Si α es pequeño con respecto al momento angular ℓ muestre que la órbita corresponde a una elipse cuya orientación precesa lentamente. Encuentre el ángulo $\Delta\Phi$ en que cambia la orientación del semi-eje mayor en un período. (Indicación: Repita lo hecho en la sección 11.5 pero con la nueva expresión para \vec{F}).

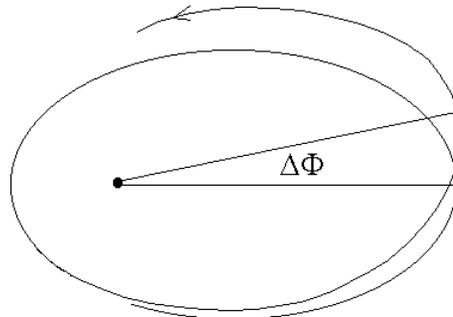


Figura 11.24

29. a) Demuestre que para escapar de la atmósfera de un planeta una condición que debe cumplir una molécula es que tenga una velocidad tal que $v > \sqrt{2GM/r}$, siendo M la masa del planeta y r la distancia de la molécula al centro del planeta.
 b) Determine la velocidad de escape para una partícula atmosférica a 1000 Km sobre la superficie de la Tierra.
 c) Haga lo mismo para la Luna.
30. Considere una esfera de radio a y hecha de materia homogénea y que al interior tiene una cavidad esférica concéntrica de radio b .
- Haga un gráfico de la fuerza de gravitación F ejercida por la esfera sobre una partícula de masa m , localizada a una distancia r del centro de la esfera.
 - Haga un gráfico de la energía potencial gravitacional $U(r)$ de la masa m en función de r .
 - Demuestre que en el límite $b \rightarrow a$ vuelve a obtener el resultado correspondiente a una cáscara esférica.
 - Demuestre que en el límite $b \rightarrow 0$ vuelve a obtener el resultado correspondiente a una esfera sólida.

31. Considere un recipiente (cascarón) semiesférico. Demuestre que en cualquier punto del plano que pasa por el borde del recipiente (a modo de tapa, región punteada), el campo gravitatorio es perpendicular a dicho plano.

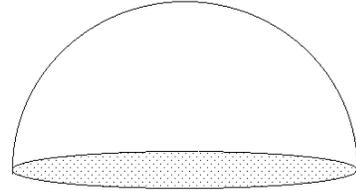


Figura 11.25

32. Considere una semiesfera sólida de masa M y radio R , fija. ¿Cuál es el trabajo que se debe realizar para llevar una pequeña masa m desde el centro de la base hasta el infinito?
33. Una partícula de masa m se encuentra situada sobre el eje de simetría de un anillo de masa M y radio R , a la distancia d del plano del anillo.
- Encontrar la fuerza con que el anillo atrae a la masa m , en términos de G , M , m , R y d .
 - Discuta en particular los casos $d = 0$ y $d \rightarrow \infty$, y convéncese de que se obtiene lo que uno espera intuitivamente.
 - Si la masa m se mueve a lo largo del eje y parte del infinito (desde una distancia muy grande) con velocidad nula, ¿con qué velocidad pasará por el centro del anillo? (Suponga que el anillo no se mueve, es decir, hay una fuerza externa que lo mantiene fijo).
34. Considere un satélite de masa m que gira en una órbita circular de radio R alrededor de un planeta de masa $M \gg m$.
- Determine la velocidad del satélite.
 - Suponga que el satélite es interceptado por un proyectil, también de masa m , que se desplace radialmente hacia el planeta. Sea $\vec{v}_1 = -v_1 \hat{r}$ la velocidad del proyectil justo antes del impacto. Suponga que el choque es completamente inelástico (es decir, el proyectil y el satélite forman un solo cuerpo después de la colisión). Encuentre la velocidad que tiene el proyectil-satélite justo después del choque.
 - Determine la mínima rapidez v_1 que debe tener el proyectil justo antes del choque para que el cuerpo proyectil-satélite logre escapar del campo gravitacional del planeta.

35. Considere un casquete esférico fijo, muy delgado, de densidad uniforme, radio R y masa M , que posee dos orificios que lo perforan en posiciones diametralmente opuestas. Una masa puntual m se encuentra inicialmente en reposo a una distancia $3R$ de su centro sobre la línea que une las perforaciones. Encuentre el tiempo que tarda la masa m en cruzar el casquete de un extremo al otro.

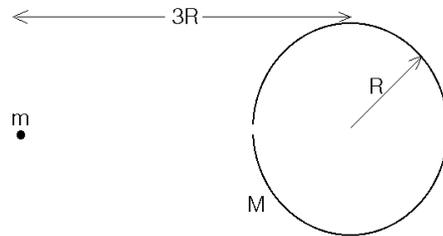


Figura 11.26

36. Dos cáscaras esféricas del mismo radio R y masa M se encuentran separados (sus centros) por una distancia r .

a) Haga un gráfico esquemático de la energía potencial gravitatoria a lo largo de la recta A, B .

b) Si una partícula de masa m se suelta en reposo desde el centro de la esfera #1, ¿con qué velocidad llega a la superficie de la esfera #2?

(c) ¿Cuál es la máxima separación r a la que pueden estar las esferas para que la masa m llegue a la superficie de la cáscara esférica #2?

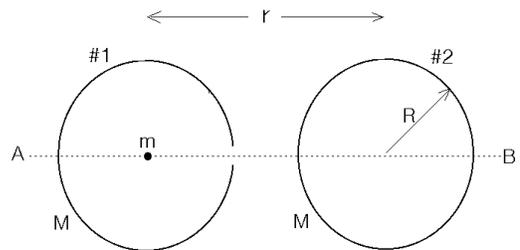


Figura 11.27

11.11. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 4

- (a) La fuerza gravitacional debe coincidir con la fuerza centrípeta. Sea M la masa del planeta y m la masa del satélite, entonces

$$-G \frac{Mm}{R^2} \hat{r} = -\frac{mv^2}{R} \hat{r},$$

donde $v = 2\pi R/T$ es la velocidad del satélite en su órbita circular. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{24}}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (5 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \text{ kg} \simeq 3,2 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

(b) De acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{3/2},$$

donde a_1 y a_2 son los semiejes mayores de las trayectorias elípticas de los satélites. De acuerdo al enunciado $a_1 = 10^8$ [m] y $a_2 = (r_{\min} + r_{\max})/2 = 1,5 \cdot 10^8$ [m], luego $a_1/a_2 = 2/3$. Para T_2 se obtiene

$$T_2 = T_1 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{3/2} = 5 \cdot (1,5)^{1,5} \text{ días} \simeq 1,19 \text{ días}.$$

(c) La energía total y el semieje mayor de un satélite están relacionados por la ecuación

$$E = -G \frac{mM}{2a}.$$

La energía es inversamente proporcional al semieje mayor, pero observe que debido al signo menos, la órbita que tiene el mayor a tiene también mayor energía (es menos negativa). Concluimos que el satélite S_2 es el que tiene mayor energía. En el punto B ambos satélites tienen la misma energía potencial, luego la energía cinética de S_2 es mayor que la de S_1 . El satélite S_2 es más rápido que S_1 cuando pasan por B .

(d) Se tiene que (todo evaluado en el punto B)

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}.$$

Por otra parte, para la órbita circular $U = -2K_1$, o sea,

$$E_1 = U + K_1 = U - \frac{U}{2} = \frac{U}{2} = -G \frac{Mm}{2R^2}.$$

Se tiene

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{U + K_2}{U/2} = \frac{2}{3}.$$

De aquí se deduce que $K_2 = -2U/3$. Luego

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{-2U/3}{-U/2} = \frac{4}{3} = \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

- (e) Para pasar de la órbita elíptica a la circular, el satélite S_2 debe, cuando se encuentra pasando por el punto B , prender los motores y "frenar" hasta bajar la velocidad de v_2 a v_1 .

Solución al problema 9

La trayectoria de la masa m que cae hacia el Sol es el límite de una elipse en que el semieje menor b tiende a cero. En ese caso la trayectoria es una línea recta estando el Sol en uno de los extremos. El semieje mayor de tal elipse es $a = R/2$, donde $R = a_T$ es el radio (igual al semieje mayor) de la trayectoria circular de la Tierra. De acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_m}{T_T} = \left(\frac{a}{a_T}\right)^{3/2} = 2^{-3/2} = 0,3536 .$$

El tiempo t_0 que demora la masa m en llegar al sol es la mitad del período de su órbita, o sea,

$$t_0 = \frac{T_m}{2} = \frac{T_T}{2} \cdot 0,3536 \simeq 64,5 \text{ días} .$$

Solución al problema 14

- (a) Sea M la masa del Sol, entonces, igualando la fuerza gravitacional con la fuerza centrípeta

$$-\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r} = -\frac{mv_0^2}{R_0}\hat{r}$$

se obtiene

$$v_0^2 = \frac{GM}{R_0} .$$

- (b) La energía mecánica de Venus (antes de la colisión) es

$$E_i = -\frac{GMm}{R_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GMm}{2R_0} .$$

- (c) Como el cometa (cuando está lejos) se mueve radialmente hacia el sol, no tiene momento angular (respecto al origen en el Sol). Luego el momento angular de Venus es el mismo que el de Venus

$$L = R_0mv_0 .$$

Esto nos permite encontrar la componente $\hat{\theta}$ de la velocidad de Vennus justo después de la colisión. El momento angular justo después de la colisión es

$$L = R_0(m + \alpha m)v_\theta .$$

Como el momento angular se conserva se deduce que

$$v_\theta = \frac{v_0}{1 + \alpha} .$$

La conservación del momento lineal en la dirección radial hay que darse cuenta que la interacción entre Venus y el cometa son fuerzas internas y, por lo tanto, para calcular la velocidad del cometa podemos ignorar el efecto introducido por la interacción entre el cometa y Venus. El cometa tiene energía nula, luego,

$$K = -U = +\frac{GM\alpha m}{R_0} = \frac{1}{2}\alpha m v_C^2 .$$

(v_C es la velocidad del cometa justo antes de la colisión ignorando el efecto introducido por Venus). Se deduce que

$$v_C^2 = \frac{2GM}{R_0} .$$

Aplicamos ahora la conservación del momento lineal a lo largo de la dirección radial

$$\alpha m v_C = (m + \alpha m)v_r ,$$

donde v_r es la velocidad de Vennus justo después de la colisión. Se deduce que

$$v_r = \frac{\alpha}{1 + \alpha}v_C .$$

(d) La energía mecánica de Vennus (la evaluamos justo después del choque) es

$$\begin{aligned} E_f &= U + K = -\frac{GMm(1 + \alpha)}{R_0} + \frac{1}{2}m(1 + \alpha)(v_\theta^2 + v_r^2) \\ &= -(1 + \alpha)\frac{GMm}{R_0} + \frac{1}{2}(1 + \alpha)\left[2\left(\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)^2 + \frac{1}{(1 + \alpha)^2}\right]\frac{GMm}{R_0} \\ &= -\frac{GMm}{2R_0}\left(\frac{1 + 4\alpha}{1 + \alpha}\right) = E_i\left(\frac{1 + 4\alpha}{1 + \alpha}\right) . \end{aligned}$$

(e) la órbita de Vennus obviamente ya no es un círculo. Como la energía es negativa debe, por lo tanto, ser elíptica. Se tiene que

$$\frac{E_i}{E_f} = \frac{a_f}{a_i} = \frac{a_f}{R_0} .$$

Aquí a_i y a_f son los semiejes mayores de las órbitas de Venus y Vennus, respectivamente. Se deduce que

$$a_f = R_0 \frac{E_i}{E_f} = R_0 \frac{1 + \alpha}{1 + 4\alpha} .$$

- (f) Usando la tercera ley de Kepler podemos calcular la razón del período de Vennus y Venus:

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{a_f}{r_0} \right)^{3/2} = \left(\frac{1 + \alpha}{1 + 4\alpha} \right)^{3/2} .$$

Solución al problema 17

- (a) La fuerza neta que actúa sobre la partícula más cercana, llamémosla #1, es

$$\vec{F}_1 = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} + T \hat{r} .$$

La fuerza neta que actúa sobre la otra partícula (#2) es

$$\vec{F}_2 = -\frac{GMm}{(R+h)^2} \hat{r} - T \hat{r} .$$

Como el hilo que las une es inextensible, ambas partículas aceleran con la misma aceleración $\vec{a} = -a \hat{r}$. Se tiene

$$\vec{F}_1 = -ma \hat{r} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} + T \hat{r} .$$

y

$$\vec{F}_2 = -ma \hat{r} = -\frac{GMm}{(R+h)^2} \hat{r} - T \hat{r} .$$

Despejando la tensión del hilo T se encuentra que

$$T = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2} \right) .$$

Con $h \ll R$ se obtiene la expresión

$$T = \frac{GMmh}{R^3} .$$

- (b) Para que la cuerda no quede tensa la fuerza gravitacional entre las partículas debe coincidir con T , o sea,

$$T = \frac{Gmm}{h^2} .$$

Despejando m de las dos últimas ecuaciones se encuentra

$$m = M \left(\frac{h}{R} \right)^3 .$$

Solución al problema 32

El trabajo que debemos realizar es independiente del camino que elijamos para llevar la masa m del centro de la base de la semiesfera hasta el infinito. Elijamos un camino recto paralelo a la base. Sea éste el eje \hat{x} y denotemos por \hat{y} al eje que coincide con el eje de simetría de la semiesfera (ver figura).

Sea $\vec{F}(x)$ la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa m cuando esta se encuentra sobre el eje \hat{x} en la posición x . Esta fuerza tendrá dos componentes

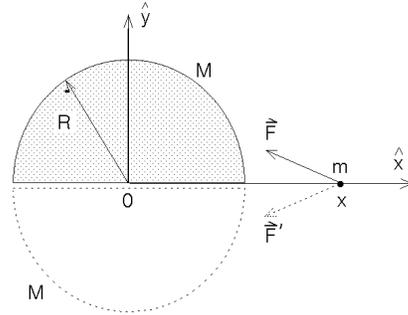


Figura 11.28

La componente y de la fuerza no nos interesa pues al evaluar el trabajo con la expresión

$$W = - \int_0^\infty \vec{F}(x) \cdot (dx \hat{x})$$

se observa que tal componente es perpendicular al desplazamiento y, por lo tanto, no figura al evaluar el producto punto. Para evaluar $F_x(x)$ coloquemos una segunda semiesfera idéntica en la parte inferior (ver figura línea punteada). Por simetría la fuerza que ejerce esta segunda esfera es

$$\vec{F}'(x) = -F_x(x)\hat{x} - F_y(x)\hat{y} ,$$

o sea, la componente x es la misma, pero la componente y cambia de signo. El efecto de las dos semiesferas es

$$\vec{F} + \vec{F}' = -2F_x(x)\hat{x} .$$

Pero, por otra parte, las dos semiesferas forman una esfera completa de masa $2M$, y para ese caso sabemos que la fuerza es (ver sección 11.9)

$$m\vec{g}(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{G(2M)m}{x^2} \hat{x} & (\text{para } x > R) \\ -\frac{G(2M)m}{R^3} \hat{x} & (\text{para } x < R) \end{cases}$$

Igualando las dos expresiones se encuentra que

$$F_x(x) = \begin{cases} \frac{GMm}{x^2} & (\text{para } x > R) \\ \frac{GMm}{R^3} & (\text{para } x < R) \end{cases}$$

Esto es exactamente el mismo resultado que se tendría para una esfera sólida completa de masa M y radio R . Podemos entonces usar los resultados que se encontraron en la sección 11.9 para la esfera sólida. El trabajo lo podemos evaluar usando el potencial gravitatorio ϕ . El potencial gravitatorio (con el cero del potencial en el infinito) al centro de una esfera sólida es

$$\phi(0) = -\frac{3GM}{2R}.$$

Luego el trabajo para llevar la masa m del origen al infinito es

$$W = m\frac{3GM}{2R}.$$

Solución al problema 35

Sobre la partícula m no se ejerce ninguna fuerza cuando se encuentra al interior del casquete. Si v_0 es la velocidad con que llega a la superficie, entonces el tiempo de travesía es $t_0 = 2R/v_0$. Para calcular la velocidad v_0 hacemos uso del hecho de que la energía debe conservarse. La energía de m en el punto de partida es

$$E_i = -\frac{GMm}{3R},$$

mientras que cuando llega a la superficie es

$$E_f = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Igualando las dos expresiones se deduce que

$$v_0^2 = \frac{4GM}{3R}.$$

Al interior del casquete no hay fuerzas sobre la masa m y, por lo tanto, su velocidad se mantiene constante. Para el tiempo de travesía se obtiene

$$t_0 = \sqrt{\frac{3R^3}{GM}}.$$

Capítulo 12

Fluidos

21 agosto 2006

12.1. Conceptos preliminares

Un fluido es una sustancia incapaz de soportar fuerzas de cizalla. Es ésta la propiedad que distingue a un sólido de un fluido. En la figura 12.1 se muestra una placa, la cual se intenta deslizar hacia la derecha mediante la aplicación de una fuerza F . Un pasador sólido evita que esto ocurra. Sin embargo, cuando el pasador es sustituido por un líquido o un gas, la placa comenzaría a deslizarse (aun para fuerzas F pequeñas). El fluido no es capaz de ejercer una fuerza de cizalla para mantener el equilibrio.

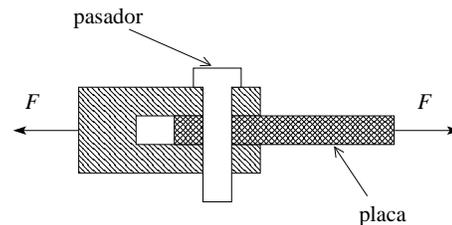


Figura 12.1

La densidad de una sustancia es la razón entre su masa y volumen: $\rho = m/V$. La densidad del agua, a 4°C , es 1.00 g/cm^3 (es el valor máximo de la densidad del agua).

Los fluidos se dividen en dos subclases: los líquidos y los gases. Los líquidos se caracterizan por ocupar un volumen definido independiente del volumen del recipiente que lo contiene. Un gas, por otra parte, tiende a expandirse y a ocupar todo el volumen del recipiente que lo contiene. La compresibilidad del fluido es otra propiedad marcadamente distinta en los líquidos y en los gases. Un líquido es bastante incompresible y en la gran mayoría de las aplicaciones se puede suponer que su densidad es constante. Lo opuesto es cierto para los gases. Éstos son sustancias muy compresibles y generalmente no se puede suponer que su densidad sea constante.

A pesar de que los fluidos están constituidos por moléculas, en el presente capítulo se tratan como un medio continuo. El uso de los aspectos macroscópicos de un fluido

está justificado cuando el *camino libre medio* (es decir, la distancia media que alcanza a recorrer una molécula del fluido antes de colisionar con otra) es mucho menor que las distancias involucradas del sistema bajo consideración.

Sea F una fuerza que actúa en forma perpendicular sobre un área A . Se define la *presión* P por la relación

$$P \equiv \frac{F}{A} .$$

Considere un fluido en reposo (por ejemplo, un vaso de agua, una piscina o una lago). Al sumergir un objeto en el fluido, éste ejercerá una fuerza sobre las superficies del objeto. La fuerza por unidad de área (o presión) que ejerce un fluido sobre los objetos (o superficies) con las que está en contacto, tiene varias propiedades importantes:

- La fuerza que un fluido en reposo ejerce sobre una superficie es siempre perpendicular a ella. Esto está directamente relacionado con el hecho de que un fluido es incapaz de ejercer una fuerza de cizalla.
- Un fluido, en un punto particular, ejerce la misma presión en todas las direcciones (*Principio de Pascal*). En otras palabras, la presión es una magnitud *escalar*. Si sumergimos en el fluido un cubo infinitesimal, la fuerza sobre todas las caras del cubito será la misma, siendo su magnitud $F = PA$. Aquí A es el área de una de las caras del cubito y P es la presión del fluido en el lugar donde se encuentra el cubo (estamos despreciando variaciones de la presión sobre distancias del tamaño del cubito).
- Los lugares isobáricos (de igual presión) en un fluido en reposo (y de densidad constante) son los planos horizontales. En la figura 12.2, en los puntos A , B , C , D y E la presión es la misma. También la presión es igual en los puntos F , G , H e I . La presión es mayor en puntos ubicados a mayor profundidad. En el punto J la presión es menor que en el punto F .

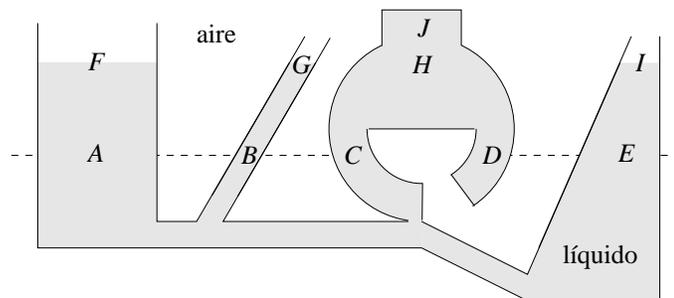


Figura 12.2

12.2. La presión atmosférica P_0

La presión en la superficie de un fluido que se encuentra en un recipiente abierto a la atmósfera no es nula, sino igual a la presión atmosférica. Esta última se debe a que estamos inmersos en un fluido (compresible) constituido por el aire. La atmósfera de la Tierra ejerce una presión sobre todos los objetos con los que está en contacto, en particular sobre otros fluidos. La presión atmosférica sobre la superficie terrestre la denotaremos por P_0 , y es igual a la presión ejercida por el peso de toda la columna de aire que está por encima.

P_0 no es despreciable o insignificante como algunas personas suelen creer. Por el contrario, la presión atmosférica juega un papel importante en numerosos aparatos y máquinas de la vida diaria.

Antes de continuar digamos algo sobre las unidades de la presión:

En el sistema *SI*, la unidad de presión es el Pascal: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. A 10^5 Pa se le suele llamar *bar*, o sea $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. Observe que 1 bar es aproximadamente la presión que ejerce una masa de 1 kg si ésta está apoyada sobre un área de 1 cm^2 . En efecto,

$$1 \text{ Kg/cm}^2 = \frac{9.81 \text{ N}}{0.0001 \text{ m}^2} = 0.981 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 0.981 \text{ bar}.$$

También observe que 1 kg es la masa de una columna de agua de 10 m de altura y 1 cm^2 de sección transversal.

Otra unidad frecuentemente usada para medir la presión es la *atmósfera* (atm). 1 atm corresponde a la presión promedio que ejerce la atmósfera terrestre a nivel del mar. Experimentalmente se encuentra que ésta es aproximadamente $1.013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.013 \text{ bar}$. Se define la *atmósfera estándar* por

$$1 \text{ atm} = 1.0135 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.0135 \text{ bar} .$$

O sea, y esto es útil recordar, 1 atm es aproximadamente igual a un bar e igual a la presión que ejerce el peso de una masa de 1 kg sobre 1 cm^2 , que a su vez es igual a la presión adicional ejercida por una columna de agua a 10 metros de altura.

La palma de una mano tiene un área de aproximadamente 100 cm^2 , luego la fuerza que ejerce la atmósfera sobre la palma extendida es aproximadamente igual a la que ejercería una masa de 100 kg apoyada sobre ella. La fuerza sobre la palma es balanceada por una fuerza igual y contraria aplicada sobre el dorso de la mano.

Considere un tubo de 1 m de largo y sección transversal A , cerrado por uno de los extremos. Llenemos el tubo con mercurio y coloquemos el tubo, con el extremo abierto hacia abajo, en un recipiente con mercurio. Observaremos que el nivel de mercurio se situará a aproximadamente 760 mm del nivel del recipiente (ver figura 12.3). El extremo superior del tubo queda al vacío.

Apliquemos la segunda ley de Newton a la columna de mercurio (que sobresale de la superficie del líquido en el recipiente). ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella?

Hay sólo dos: por una parte está la presión que el fluido que está en el recipiente ejerce sobre el mercurio que está en el tubo: tal fuerza es $\vec{F}_1 = P_0 A \hat{z}$; por otra, está el peso del mercurio al interior de la columna, $\vec{F}_2 = -Ah\rho_{\text{Hg}}g\hat{z}$. Como el fluido está en reposo la fuerza neta debe ser nula, o sea

$$P_0 A = Ah\rho_{\text{Hg}}g .$$

La densidad del mercurio es $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$. Con esto obtenemos para P_0 el valor

$$P_0 \simeq 1.014 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} .$$

¡La fuerza que eleva al mercurio al interior del tubo es la presión atmosférica! El dispositivo que acabamos de describir es un *barómetro de mercurio*. La altura de la columna de mercurio mide la presión atmosférica. La presión atmosférica promedio a nivel del mar corresponde a 760 mm de mercurio.

Al repetir el mismo experimento, pero con una columna de agua, la altura será 13.6 veces mayor (recuerde que la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3 y la del agua 1 g/cm^3). Multiplicando los 76 cm por 13.6 se obtienen 10.34 m. Este dato es muy importante, ya que interviene en varias aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, al intentar elevar agua de un pozo (cuya superficie está en contacto con el aire que nos rodea) succionando por el extremo superior de un tubo largo, sólo se tendrá éxito si el nivel de agua no está a más de 10.34 metros de profundidad (en la práctica esta altura es menor ya que el agua comienza a hervir bastante antes de llegar a los 10.34 metros).

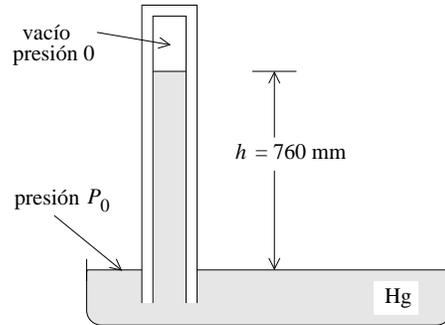


Figura 12.3

12.3. Principio de Arquímedes

Al sumergirnos en un fluido, la presión aumenta. Evaluemos este aumento de presión para un fluido incompresible (líquido) de densidad ρ . para ello consideremos el fluido contenido en un paralelepípedo imaginario de altura h y área A . Una de las caras de área A la ubicamos de manera que coincida con la superficie del líquido mientras que la otra queda a una profundidad h (ver figura 12.4). Por lo dicho en la sección anterior, la presión $P = P(h)$ es sólo una función de la profundidad h .

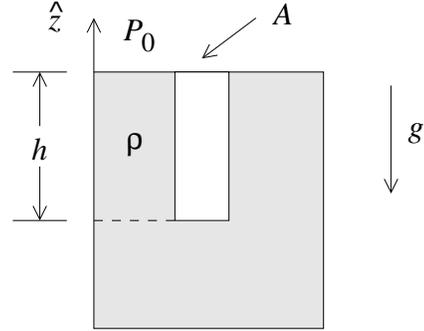


Figura 12.4

Es claro que las fuerzas netas horizontales ejercidas por el fluido externo sobre el paralelepípedo son nulas, de lo contrario el fluido del paralelepípedo aceleraría —lo que estaría en contradicción con la suposición de que el fluido se encuentra en reposo.

Las fuerzas que actúan sobre el paralelepípedo en la dirección vertical son: i) la fuerza que el aire ejerce sobre la cara superior, que es $\vec{F}_1 = -P_0 A \hat{z}$, ii) la fuerza que el fluido (exterior) ejerce sobre la cara inferior, que es $\vec{F}_2 = P(h) A \hat{z}$ y iii) la fuerza debida al peso del paralelepípedo con su fluido. Esta fuerza de gravedad es $\vec{F}_3 = -(\rho A h) g \hat{z}$. Como el paralelepípedo está en equilibrio, la fuerza total debe ser nula, es decir,

$$0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-P_0 A + P(h) A - \rho A h g) \hat{z} .$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$P(h) = P_0 + \rho g h ,$$

donde P_0 es la presión atmosférica que actúa sobre la superficie del fluido. Observe que el aumento de la presión con la profundidad es igual a la presión ejercida por el peso de la columna del fluido que se encuentra por encima.

Estamos en condiciones de demostrar el *Principio de Arquímedes*:

Al sumergir un cuerpo parcial o totalmente en un fluido aparece una fuerza llamada empuje que actúa sobre el cuerpo y apunta en la dirección opuesta a la gravedad. La magnitud del empuje es $F_e = \rho g V$, donde ρ es la densidad del fluido y V es el volumen del fluido que fue desplazado por el cuerpo.

Para demostrar este principio observe primeramente que la fuerza que el líquido ejerce sobre cada parte de la superficie del cuerpo sumergido o parcialmente sumergido es independiente del material de que está hecho. Por lo tanto, en lo que a empuje respecta, podemos reemplazar la parte sumergida del cuerpo A por un líquido igual al líquido que lo rodea (ver figura 12.5). Si ρ es la densidad del líquido y V_s el volumen de la parte sumergida del cuerpo A , entonces el peso del cuerpo B es $\vec{W} = -\rho V_s g \hat{z}$. Por supuesto que el cuerpo B estará en equilibrio, por consiguiente la fuerza de empuje que el líquido exterior ejerce sobre B debe exactamente contrarrestar el peso. Luego la fuerza de empuje es $\vec{F}_e = \rho V_s g \hat{z}$.

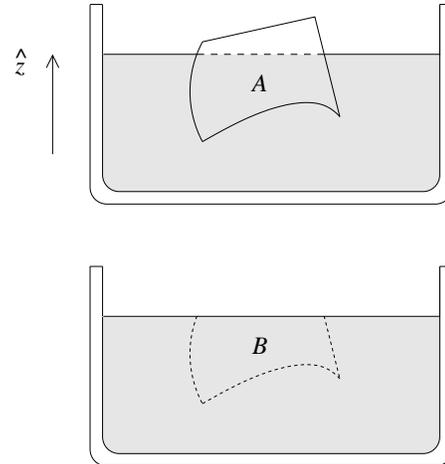


Figura 12.5

Más aún, el cuerpo B está en equilibrio neutro (es decir, dentro del líquido lo podemos trasladar a cualquier punto y orientarlo en cualquier dirección, quedando en reposo), luego la fuerza de empuje debe estar actuando como si estuviera aplicada en el centro de gravedad de B . Esto es un dato de importancia para analizar el equilibrio de objetos flotantes o sumergidos.

Ejemplo: Considere tres cubos del mismo tamaño, adheridos tal como se muestra en la figura 12.6. El material del cual están hechos los dos cubos A y B es $\rho_1 = 0.5 \text{ g/cm}^3$, mientras que el cubo C está hecho de un material de densidad $\rho_2 = 2 \text{ g/cm}^3$. Observe que la densidad media de los tres cubos es igual a la del agua ($\rho = 1 \text{ g/cm}^3$) y, por lo tanto, al sumergirlo en agua, la fuerza de empuje exactamente cancela el peso. ¿Cuál será la orientación de equilibrio estable que el objeto adquirirá cuando está “flotando” rodeado de agua?

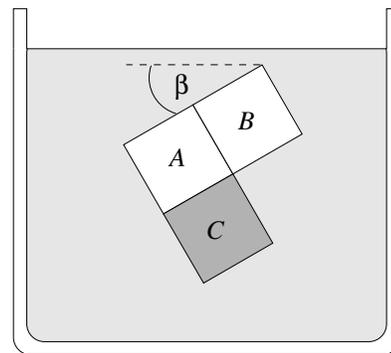


Figura 12.6

Las únicas fuerzas que están actuando sobre el objeto son el peso \vec{W} y el empuje \vec{F}_e . Ya sabemos que ambas fuerzas tienen la misma magnitud y apuntan en direcciones opuestas y, por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto es nula. Pero para que se encuentre en equilibrio también el torque neto debe ser nulo. Esto se logra sólo si ambas fuerzas son colineales (actúan a lo largo de la misma recta). Encontremos los

puntos en que actúan las dos fuerzas.

La gravedad actúa en el centro de masas. El centro de masas de los cubos A y B se encuentra en a y el centro de masas de C se encuentra en b . El centro de masas del objeto completo se encontrará sobre la recta que une a con b . Como el cubo C tiene el doble de masa de los dos cubos $A + B$ juntos, el centro de masas del objeto completo se ubicará más cerca de b que de a . En la figura 12.7 hemos designado el centro de masas del objeto completo con el número 1. Se tiene que $\overline{b, 1} = \overline{a, b}/3$.

La fuerza de empuje, por otra parte, actúa en el centro de masas que se obtiene al sustituir los tres cubos por agua (en la figura lo hemos designado con el número 2).

Nuevamente el centro de masas de los cubos $A + B$ se encuentra en a , mientras que el de C se encuentra en b . El centro de masas de los centros de masas nuevamente se encontrará sobre la recta $\overline{a, b}$. Pero ahora los cubos $A + B$ pesan el doble de lo que pesa C , luego el centro de masas ahora estará más cerca de a que de b . De hecho, el centro de masas cuando los tres cubos están hechos de agua debe estar sobre el plano de simetría indicado en la figura con una línea punteada.

En resumen, la fuerza de gravedad actúa en 1 y el empuje actúa en 2. Para que no haya torque sobre el sistema la recta $\overline{a, b}$ debe orientarse a lo largo de la vertical. Concluimos que el ángulo β de la figura 12.6 debe coincidir con el de la figura 12.7. Se deduce inmediatamente que $\tan \beta = 1/2$. Convéznase de que el equilibrio es estable cuando el punto 2 está sobre el punto 1 e inestable cuando 1 está sobre 2.

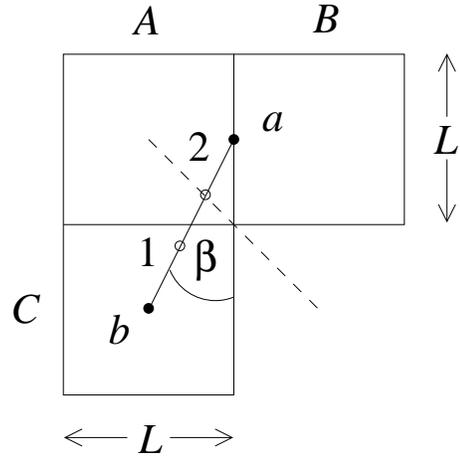


Figura 12.7

12.4. La fórmula barométrica

Considere N moléculas de un gas confinadas en un volumen V y a una temperatura T . Si la ecuación de los *gases ideales* es aplicable se tiene que

$$PV = Nk_B T .$$

Aquí P es la presión del gas y $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K es la *constante de Boltzmann*. Sea m la masa de cada molécula, entonces

$$P = \frac{Nm k_B T}{V} = \rho \frac{k_B T}{m} ,$$

donde ρ es la densidad de masa del gas. De esta relación se deduce que, mientras la temperatura se mantenga constante, la presión de un gas es proporcional a su

densidad. En particular, si ρ_0 y P_0 son la densidad y presión de la atmósfera al nivel del mar ($z = 0$) y $\rho(z)$ y $P(z)$ son las mismas magnitudes, pero a una altura z (por sobre el nivel del mar), entonces

$$\frac{P_0}{P(z)} = \frac{\rho_0}{\rho(z)} .$$

Por otra parte (ver figura 12.8), la presión a una altura z es la misma que la que hay a una altura $z + dz$ más la presión ejercida por el peso del gas que hay entre las alturas z y $z + dz$, o sea,

$$P(z) = P(z + dz) + \rho(z)g dz .$$

Esta ecuación se puede reescribir de la forma

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{g\rho_0}{P_0}P(z) . \quad (12.1)$$

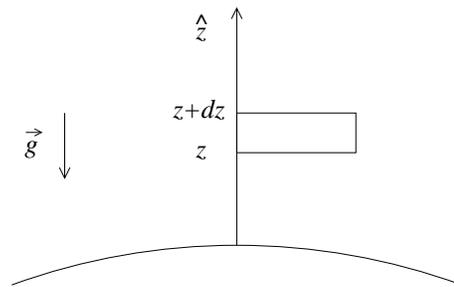


Figura 12.8

Ésta es la *ecuación diferencial* que gobierna el comportamiento de la presión atmosférica (a temperatura constante). Para resolver esta ecuación debemos antes discutir la *función exponencial*.

La función exponencial

La ecuación diferencial del tipo

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \Gamma f(t) , \quad (12.2)$$

donde Γ es una constante (real o compleja), aparece frecuentemente en las ciencias naturales (y también en las ciencias económicas). Es muy importante discutir y analizar sus soluciones.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función y sus derivadas (primera, segunda, etc.). La derivada de más alto orden que aparece en la ecuación define el *orden* de la ecuación diferencial. La ecuación diferencial (12.2) es de primer orden.

Nos interesa encontrar la solución más general de (12.2). Un resultado importante de la teoría de ecuaciones diferencial (y que no demostraremos aquí) es que la solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes arbitrarias. En otras palabras, sabremos que tenemos la solución general de la ecuación (12.2) si ésta tiene una constante que se puede elegir arbitrariamente. Una vez que se ha encontrado la solución general, la constante arbitraria se elige de manera que la solución corresponda a la solución del problema planteado (o sea, cumpla con las condiciones iniciales).

Ejemplo: Consideremos la ecuación diferencial $\ddot{z} = a_0$. Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden. La solución general es $z(t) = z_0 + v_0 t + a_0 t^2/2$. La solución general tiene dos constantes arbitrarias z_0 y v_0 , las que deben elegirse de manera que la solución corresponda a la situación física concreta que se está considerando.

Definamos la función $\exp(t)$ mediante la serie

$$\exp(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (12.3)$$

Es evidente que su derivada es igual a la función, es decir,

$$\frac{d}{dt} \exp(t) = \exp(t) .$$

Ejercicio: Demuestre que la función $f(t) = A \exp(\Gamma t)$, donde A es una constante arbitraria, es la solución general de la ecuación

$$\dot{f}(t) = \Gamma f(t) .$$

Como consecuencia del ejercicio anterior concluimos que la solución general de la ecuación (12.1) es

$$P(z) = A \exp\left(-\frac{g\rho_0}{P_0} z\right) ,$$

donde la constante arbitraria A se determina exigiendo que la presión en $z = 0$ sea P_0 . Esto nos da la condición $A = P_0$. De esta manera obtenemos la *fórmula barométrica*

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{g\rho_0}{P_0} z\right) .$$

Reiteramos que este resultado, que nos da la presión barométrica en función de la altura, es sólo aproximadamente correcto ya que, contrariamente a nuestra suposición, la temperatura de la atmósfera normalmente disminuye a medida que uno se eleva.

Ejercicio: Demuestre que la función $f(t) = \exp(\Gamma_1 t) \exp(\Gamma_2 t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{f}(t) = (\Gamma_1 + \Gamma_2) f(t) .$$

Por consiguiente, $f(t) = \exp(\Gamma_1 t) \exp(\Gamma_2 t)$ debe poder escribirse de la forma $f(t) = A \exp((\Gamma_1 + \Gamma_2)t)$. Demuestre que en ese caso $A = 1$, o sea

$$\exp(\Gamma_1 t) \exp(\Gamma_2 t) = \exp((\Gamma_1 + \Gamma_2)t) . \quad (12.4)$$

Observe que esta relación justifica la introducción de la notación

$$\exp(\Gamma t) = e^{\Gamma t} .$$

La función $e^t = \exp(t)$ se llama *función exponencial*.

Ejercicio: Evaluando la serie (12.3) para $t = 1$, demuestre que $e = 2.718\dots$

Problemas (relacionados con la función exponencial)

1. Suponiendo que la atmósfera tiene una temperatura constante, determine la presión atmosférica a 10 km de altura. (La densidad del aire, en la vecindad de la superficie terrestre, a 20°C, es aproximadamente $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$.)
2. Considere un cilindro de radio R sobre el cual se apoya una cuerda. Sea μ_e el coeficiente de roce estático entre la cuerda y el cilindro. Suponga que en uno de los extremos de la cuerda está colgando una masa M . ¿Cuál es la mínima masa que debe colgarse en el otro extremo para que la cuerda no resbale?

Respuesta: $m = Me^{-\mu_e\pi}$.

3. La cantidad de núcleos de un elemento radiactivo que decae en un intervalo $[t, t']$ es proporcional al número de núcleos no decaídos que se tenía inicialmente (en el instante t). Demuestre que la afirmación anterior implica que

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde $N(t)$ es el número de núcleos en el instante t que no ha decaído, N_0 la misma magnitud pero en el instante $t = 0$ y λ es una constante positiva (la así llamada *constante de desintegración*.)

Para el caso en que $\lambda = 0.01 \text{ s}^{-1}$, determine el tiempo que debe transcurrir para que decaiga la mitad de los núcleos.

4. Suponga que cierto banco (en el país de las maravillas) para intereses a una tasa de 100 % anual sobre los depósitos, y más aún, los paga en forma continua, sumando los intereses al capital depositado. Si una persona deposita \$1000, ¿cuánto le devolverá el banco al cabo de un año?

Respuesta: \$ 2718.28... = $e \cdot 1000$.

12.5. Tensión superficial

Entre dos moléculas de un fluido actúan fuerzas. Estas fuerzas, llamadas *fuerzas de van der Waals* o *fuerzas cohesivas* son de origen eléctrico. Una de las características de estas fuerzas es que su alcance es muy pequeño (rápidamente se desvanecen cuando la distancia entre las moléculas es dos o tres veces su tamaño); otra característica es que mientras las moléculas no se traslapan, la fuerza es atractiva.

El efecto neto de las fuerzas de cohesión sobre una molécula que está en el interior del líquido es nulo, pero no así para una molécula que se encuentra en la superficie (ver figura 12.9). Para poner una molécula en la superficie hay que realizar un trabajo. O sea, la existencia de una superficie en un fluido introduce una energía potencial. Esta energía es proporcional a la superficie y se tiene que

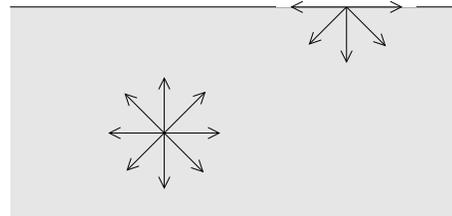


Figura 12.9

$$dW = \sigma dA .$$

Aquí σ es una constante que depende del fluido y se llama *tensión superficial* y dA es un elemento (infinitesimal) de superficie. En realidad la tensión superficial depende de las dos sustancias que están en contacto. La siguiente tabla da valores de la tensión superficial para algunos casos.

Substancia	En contacto con	Temp. °C	σ [N/m]
Agua	aire	0	0.0756
Agua	aire	20	0.07275
Agua	aire	80	0.0626
Hg	vacío	20	0.475
Hg	aire	20	0.436
Alcohol metílico	aire	20	0.0227
Glicerol $C_3H_8O_3$	aire	20	0.0634
Solución jabonosa	aire	20	$\simeq 0.025$

Para medir la tensión superficial se puede usar el dispositivo mostrado en la figura 12.10. Un alambre movable, inicialmente sumergido, se tira lentamente, extrayéndolo del líquido (con una película del líquido adosada). Midiendo la fuerza F se puede deducir σ . En efecto, al mover el alambre movable a una altura h a $h+dh$, el trabajo que se realiza es $dW = F dh$.

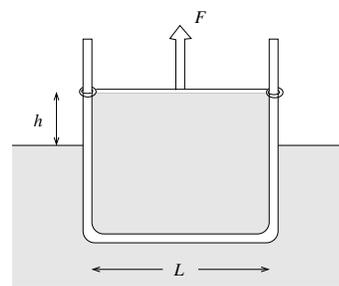


Figura 12.10

Por otra parte, la superficie de la película aumenta en $dA = 2L dh$ (el factor 2 se debe a que la película tiene una superficie a cada lado). Se tiene

$$\sigma = \frac{dW}{dA} = \frac{F dh}{2L dh} = \frac{F}{2L} .$$

Problema: Deseamos encontrar la diferencia de presión entre el interior y exterior de una pompa de jabón de radio $R = 1$ cm.

Si, soplando con una pajita, aumentamos el radio de la pompa de R a $R + dR$, entonces la superficie aumenta en

$$dA = 2 \cdot (4\pi(R + dR)^2 - 4\pi R^2) = 16\pi R dR .$$

El factor 2 nuevamente se debe a que hay que considerar tanto la superficie interior como exterior de la pompa. El cambio de energía debido al aumento de la superficie es por lo tanto

$$dW = \sigma dA = 16\sigma\pi R dR .$$

Por otra parte, podemos evaluar el trabajo directamente, multiplicando el desplazamiento dR por la fuerza $\Delta P \cdot 4\pi R^2$, es decir,

$$dW = \Delta P \cdot 4\pi R^2 dR .$$

Igualando las dos últimas expresiones se encuentra la diferencia de presión

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{R} .$$

Con $\sigma = 0.025$ N/m y $R = 0.01$ m se obtiene $\Delta P = 10$ N/m². Si se deja de soplar por la pajita, la pompa se desinfla.

Observe que la presión al interior de una pompa de jabón es mayor tanto más pequeño es su radio. De esta observación se deduce que al juntarse una pompa de jabón grande con una pequeña, la pequeña inflará a la más grande. De esta manera la pompa grande aumentará su tamaño mientras que la pequeña disminuirá: en otras palabras, la más grande absorberá a la más pequeña.

12.6. Capilaridad

La fuerza entre moléculas de dos sustancias distintas se llama *fuerza de adhesión*. Consideremos una pequeña cantidad de líquido (medio #2) en contacto con una superficie sólida plana (medio #3) y ambos en contacto con un gas (medio #1) (ver figura 12.11). Sea $\{\sigma_{i,j}\}$, con $i, j = 1, 2, 3$ las tensiones superficiales para las distintas interfaces de la figura 12.11.

Si la fuerza de adhesión (entre el líquido y el sólido) es mucho mayor que la fuerza de cohesión (entre las moléculas del líquido), entonces el líquido tenderá a esparcirse sobre el sólido (ver figura 12.11a). En este caso se dice que el líquido *moja* al sólido.

Por otra parte, si la fuerza de adhesión es mucho menor que la fuerza de cohesión, entonces el líquido tenderá a concentrarse, adquiriendo una forma compacta tipo gota (ver figura 12.11b).

Como resultado de esta competencia entre las distintas fuerzas de adhesión y cohesión, se forma un *ángulo de contacto* α bien característico entre el líquido y el sólido. Experimentalmente se determina que este ángulo de contacto para las sustancias agua-vidrio es aproximadamente 0° , mientras que para mercurio-vidrio $\alpha = 140^\circ$.

Considere la línea Γ a lo largo de la cual conviven las tres fases. Conocemos la magnitud y la dirección de la fuerza sobre Γ proveniente de la tensión superficial del líquido. Por el principio de acción y reacción, el sólido ejercerá sobre el líquido una fuerza de la misma magnitud pero en dirección opuesta. Esta fuerza es la que hace subir un fluido por un capilar.

Consideremos un tubo fijo, de diámetro interior muy pequeño $2r$ y con un extremo inmerso verticalmente en un líquido cuya tensión superficial es σ . El largo de la línea Γ en este caso es $2\pi r$. La fuerza que el tubo ejerce sobre el líquido a través de la tensión superficial es

$$F = \sigma(2\pi r) \cos \alpha ,$$

donde α es el ángulo de contacto del líquido con el material del tubo. Esta fuerza debe compensarse exactamente con el peso del líquido (que está por sobre el nivel exterior).

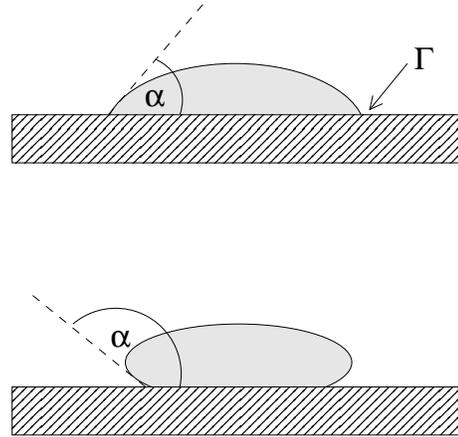


Figura 12.11

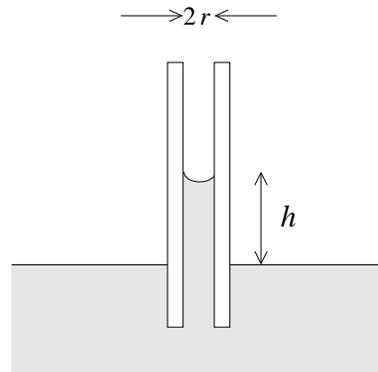


Figura 12.12

El peso del líquido que subió por el *tubo capilar* es

$$F_g = \rho_0(\pi r^2 h)g ,$$

donde ρ_0 es la densidad del líquido. Igualando las dos fuerzas se obtiene para la altura máxima h a la que sube el líquido la expresión

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho_0 g r} .$$

Ejemplo: Los xilemas que transportan los nutrientes en una planta típicamente tienen un radio de 10^{-3} cm. Evaluemos la altura máxima a la que podrán llegar los nutrientes. Supondremos que el ángulo de contacto $\alpha = 0$ y para la densidad y tensión superficial del líquido usaremos la del agua.

Usando la fórmula expuesta más arriba se encuentra que $h \simeq 1.5$ m. La capilaridad es efectivamente uno de los mecanismos que las plantas usan para elevar la savia, sin embargo, no puede ser el mecanismo responsable para elevar el agua de las raíces hasta la punta de los árboles grandes (cuya altura puede superar los 100 metros), ya que para ello los xilemas tendrían que tener un diámetro 100 veces menor.

12.7. Fluidos en movimiento

Consideraciones preliminares

Los fluidos en movimiento se pueden clasificar con respecto a varios aspectos. Uno de ellos es la compresibilidad. La *hidrodinámica* se preocupa de estudiar el flujo de fluidos incompresibles, mientras que la *aerodinámica* analiza los flujos de fluidos compresibles. Notamos, sin embargo, que incluso los gases pueden aproximadamente como incompresibles mientras su velocidad no supere a la tercera parte de la velocidad del sonido.

Otro aspecto clasificatorio se introduce respecto al roce interno. Se tiene el flujo de un *fluido ideal* si se ignoran todos los efectos debido al roce interno (es decir, se ignora la *viscosidad* del fluido). En caso contrario se estará considerando flujos de *líquidos y gases reales*.

La trayectoria de un pequeño elemento de fluido define una *línea de corriente* o *línea de flujo*. A su vez todo un haz de líneas de flujo define un *tubo de flujo* (ver figura 12.13). También podemos clasificar los fluidos en movimiento con respecto al comportamiento de sus líneas de corriente. Si éstas no varían a medida que transcurre el tiempo se tiene un *flujo estacionario* o *flujo laminar*; en caso contrario, el flujo es *turbulento*.

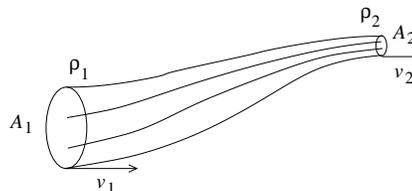


Figura 12.13

En un flujo laminar, dos líneas de corriente cercanas entre sí en cierto lugar, se mantendrán cercanas en todas partes. También dos líneas de corriente del fluido nunca se cruzan.

Cuando el flujo es turbulento entonces elementos de fluido que inicialmente están infinitesimalmente cerca pueden llegar a estar separados por distancias macroscópicas a medida que transcurre el tiempo. El flujo del fluido en este caso es caótico y se forman remolinos erráticos (llamadas también *corrientes parásitas*).

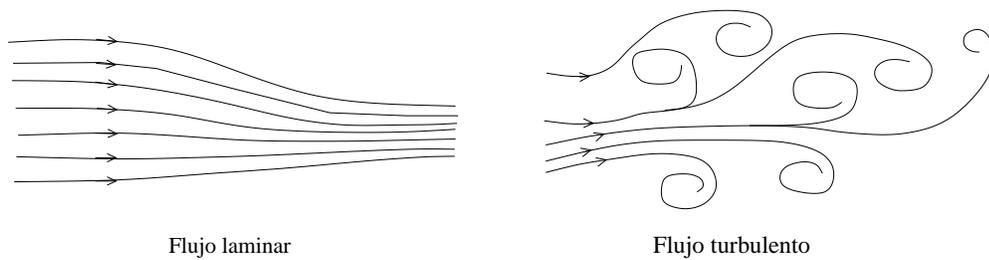


Figura 12.14

La disipación de energía es mucho mayor cuando el flujo es turbulento que cuando es laminar.

Ecuación de continuidad

Consideremos un tubo de flujo como, por ejemplo, el que se muestra en la figura 12.13. Sean A_1 , ρ_1 y v_1 el área transversal del tubo, la densidad y velocidad del fluido en la entrada del tubo y A_2 , ρ_2 y v_2 las mismas magnitudes pero a la salida del tubo. Para un flujo estacionario, la cantidad de fluido que ingresa por el tubo durante un intervalo de tiempo dt debe coincidir con la que emerge en ese mismo intervalo por el otro extremo, luego

$$\rho_1 A_1 v_1 dt = \rho_2 A_2 v_2 dt ,$$

relación a la que se denomina *ecuación de continuidad*. Cuando el flujo es incompresible, la densidad no cambia (o sea, $\rho_1 = \rho_2$), luego, para fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad es

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 .$$

Ecuación de Bernoulli

En lo que sigue consideraremos el flujo estacionario de un fluido ideal incompresible. Sean P_1 y P_2 las presiones a la entrada y salida de un tubo de flujo, respectivamente. Evaluemos el trabajo neto en el punto de entrada realizado por la presión

sobre el fluido que está al interior del tubo. En un tiempo dt la sección transversal inicial avanza una distancia $v_1 dt$, siendo el trabajo sobre el fluido

$$W_1 = F_1 v_1 dt = P_1 A_1 v_1 dt .$$

Por otra parte, el fluido que emerge del tubo realiza un trabajo igual a

$$W_2 = F_2 v_2 dt = P_2 A_2 v_2 dt .$$

La diferencia es el trabajo neto realizado sobre el fluido:

$$dW = W_1 - W_2 = (P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2) dt .$$

Este trabajo neto hecho sobre el fluido debe ser igual al cambio de energía (potencial y cinética) del fluido:

$$dW = dU + dK .$$

Si z_1 es la altura del fluido a la entrada del tubo y z_2 la altura a la salida, el cambio de energía potencial es

$$dU = (\rho A_2 v_2 dt) z_2 g - (\rho A_1 v_1 dt) z_1 g .$$

El cambio de energía cinética es

$$dK = \frac{1}{2}(\rho A_2 v_2 dt) v_2^2 - \frac{1}{2}(\rho A_1 v_1 dt) v_1^2 .$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} (P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2) dt &= [(\rho A_2 v_2 dt) z_2 g - (\rho A_1 v_1 dt) z_1 g] \\ &+ \frac{1}{2}(\rho A_2 v_2 dt) v_2^2 - \frac{1}{2}(\rho A_1 v_1 dt) v_1^2 . \end{aligned}$$

Usando la ecuación de continuidad, se encuentra

$$P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1) - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) ,$$

o sea, para cualquier punto a lo largo de un tubo de flujo,

$$P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} .$$

Esta última relación, consecuencia directa del teorema de conservación de la energía, se conoce con el nombre de *ecuación de Bernoulli*. Es importante recalcar que la ecuación de Bernoulli recién deducida es sólo válida para fluidos ideales, o sea aplicable sólo a situaciones en las cuales la viscosidad es despreciable.

12.8. Aplicaciones del Principio de Bernoulli

Supondremos implícitamente que en todos los casos analizados en la presente sección que el fluido bajo consideración es ideal y que el flujo es estacionario. En la práctica los resultados obtenidos aquí serán sólo una primera aproximación al problema estudiado. Para una descripción más precisa es necesario incluir en el formalismo los efectos introducidos por la viscosidad.

Problema 1: Un tambor de altura h y área A , parado y abierto por la tapa superior (es decir, en contacto con la atmósfera), se encuentra lleno de agua. Asuma que en la parte inferior del manto se abre un tapón de sección transversal a . ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el tambor?

Solución: Apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2, en la parte superior del fluido en el tambor y una vez que ha emergido del tambor (figura 12.15). En ambos lugares la presión del fluido es igual a la presión atmosférica P_0 .

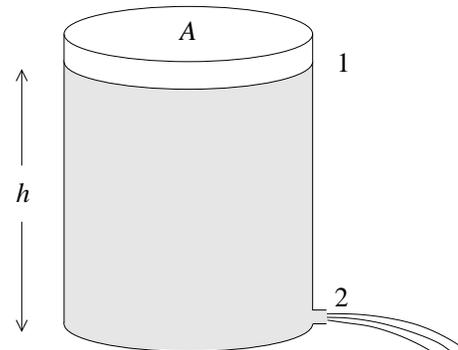


Figura 12.15

Elijamos el origen del eje vertical en la base del tambor. De acuerdo a la ecuación de Bernoulli se tiene

$$P_0 + \rho gh + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 ,$$

donde v es la velocidad del fluido a la salida del tambor. La velocidad, por lo tanto, es

$$v = \sqrt{2gh} .$$

Esta última relación se llama *teorema de Torricelli*. Observe que la velocidad del fluido es la misma que la que adquiere un objeto cuando cae una distancia h .

Supongamos ahora que en cierto instante el fluido dentro del tambor está a una altura z . El volumen de fluido que emerge en un tiempo dt es $av dt$, lo que hace bajar el nivel del tambor en $dz = -av dt/A$. Tenemos que

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{a}{A}v = \frac{a}{A}\sqrt{2gz} ,$$

o, escribiéndolo de otra forma,

$$-\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{a}{A}\sqrt{2g} dt .$$

Integrando la última ecuación desde que se comienza a evacuar el tambor hasta que esté vacío, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 - \int_{z=h}^{z=0} \frac{dz}{\sqrt{z}} &= \frac{a}{A} \sqrt{2g} \int_{t=0}^{t=T} dt \\
 - \left(2z^{1/2} \Big|_h^0 \right) &= \frac{a}{A} \sqrt{2gt} \Big|_0^T \\
 2\sqrt{h} &= \frac{a}{A} \sqrt{2g} T .
 \end{aligned}$$

El tiempo que demora en evacuarse el tambor es

$$T = \frac{2A}{a} \sqrt{\frac{h}{2g}} .$$

Problema 2: Considere un sifón consistente de un tubo con un diámetro constante de 10 cm, con el cual se extrae agua de una represa. Con las alturas mostradas en la figura 12.16, evalúe el flujo que pasa por el tubo.

Solución: Apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2. Se tiene que

$$P_0 + \rho g(h_2 - h_1) + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2} \rho v^2 ,$$

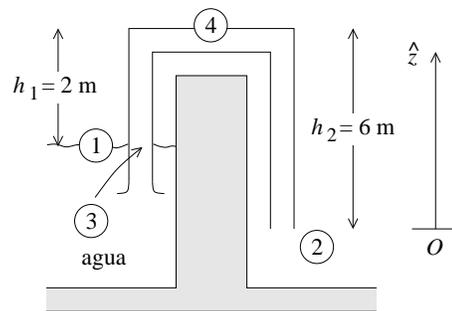


Figura 12.16

donde v es la velocidad del agua al interior del tubo. Como el fluido es incompresible y el diámetro del tubo no cambia, la velocidad para un fluido ideal al interior del tubo en todos los lugares es la misma. Para la velocidad v se obtiene

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} .$$

El volumen de agua que pasa por el tubo en un tiempo dt es

$$dV = Av dt ,$$

donde A es la sección transversal del tubo. Sustituyendo los valores del enunciado se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \pi(0.05)^2 \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 4} \text{ m}^3/\text{s} \simeq 70 \text{ litros/s} .$$

¿Cuál es la presión en el punto 3 (al interior del tubo, a la altura del nivel de agua del tranque)?

Para responder esta interrogante aplicamos la ecuación de Bernoulli en los puntos 2 y 3. Tenemos

$$P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_3 + \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho v^2 .$$

Acá P_3 es la presión del agua en el punto 3. Se obtiene

$$P_3 = P_0 - \rho g(h_2 - h_1) .$$

Una columna de agua de 10 metros corresponde a aproximadamente la presión atmosférica P_0 . Por lo tanto, $\rho g(h_2 - h_1) = 0.4P_0$. Luego $P_3 \simeq 0.6P_0$.

Análogamente, para la presión en el punto 4 se obtiene

$$P_4 = P_0 - \rho g h_2 \simeq 0.4P_0 .$$

Observe que h_2 no puede sobrepasar los 10 metros, ya que de lo contrario la columna de agua se corta.

Otras aplicaciones

i) Atomizador:

Al pasar una corriente de aire por encima de un tubo abierto, se reduce la presión al interior del tubo. Si la velocidad del aire es v , la presión P justo encima del tubo es

$$P = P_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 .$$

La disminución de presión provoca que el líquido suba por el tubo. Una vez que el líquido llega a estar en contacto con la corriente de aire, éste se atomiza. Este principio es usado en las botellas de perfume y en los aspersores de pintura.

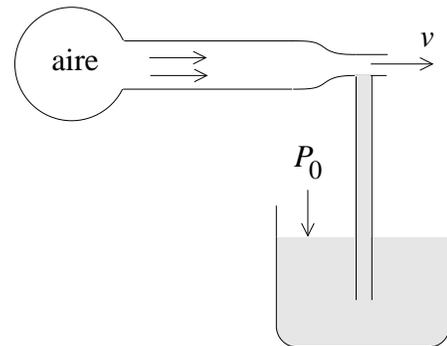


Figura 12.17

ii) Tubo de Venturi:

Al hacer pasar un líquido por una tubería estrechada, en el lugar constreñido baja la presión. La disminución de la presión permite determinar la velocidad del fluido.

Apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2 (figura 12.18).

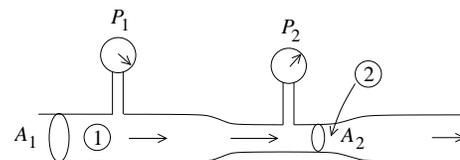


Figura 12.18

Si la tubería es horizontal (o sea, no hay cambios en la energía potencial del fluido) se tiene que

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 .$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad nos da la relación

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 .$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} .$$

Si el flujo es suficientemente alto, el *tubo de Venturi* puede usarse para bombear. Por ejemplo, los extractores de saliva usados por los dentistas se basan en este principio.

iii) Efecto Magnus:

Consideremos un cilindro (o una esfera) en un fluido en movimiento. Si el cilindro rota en torno a un eje perpendicular a la corriente del fluido, y además hay roce viscoso entre el cilindro y el fluido, entonces el cilindro arrastrará al fluido haciendo que las velocidades del fluido a ambos lados del cilindro no sean iguales. En el caso mostrado en la figura adjunta, la velocidad es mayor arriba que abajo.

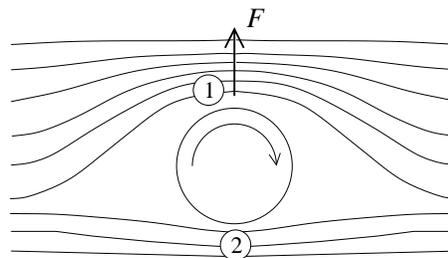


Figura 12.19

De acuerdo a la ecuación de Bernoulli, la presión en el lugar 1 será inferior que en el lado 2 ($P_1 < P_2$). Esta diferencia de presión genera una fuerza neta sobre el cilindro hacia arriba.

Es este efecto, llamado *efecto Magnus*, el responsable de los así llamados “efectos” que pueden observarse en numerosos juegos de pelota. Justamente para aumentar el “efecto” las pelotas no deben ser completamente suaves en la superficie (pelusas en la pelota de tenis).

IV) Bomba de chorro (jet) de agua.

Por una tobera inyectora P se hace ingresar agua a alta velocidad en una cámara. De esta manera se genera una disminución de la presión en la vecindad de P , lo que a su vez permite aspirar el aire de un recipiente. El límite inferior a que puede bombear este dispositivo (usando agua y a temperatura ambiente) es de aproximadamente $P \simeq 2.7 \cdot 10^4$ Pa (la 1/40 avas parte de la presión atmosférica).

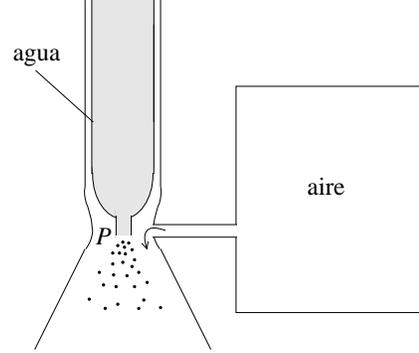


Figura 12.20

12.9. * Viscosidad

Entre las distintas moléculas de un fluido actúan fuerzas de adhesión. Por esta razón, cuando fluyen y distintas partes del fluido se mueven con velocidades relativas, aparecen *fuerzas de roce interno*, también llamada *viscosidad*. A pesar de que los fluidos no manifiestan resistencia a fuerzas de cizalla, la viscosidad hace que sí presenten cierta resistencia al deslizamiento.

Otra consecuencia de la viscosidad es que la velocidad del fluido que está en contacto con una superficie (de un sólido) es nula (con respecto a la superficie).

En esta sección sólo analizaremos casos en que el flujo es laminar.

Consideremos dos placas paralelas de área A , separadas por una distancia D y con un fluido entre ellas. Una de las placas la mantenemos fija y la otra se mueve (paralelamente) con velocidad v_0 (ver figura 12.21). El fluido en contacto con la placa superior se mueve con velocidad v_0 , mientras que el que está en contacto con la placa inferior está en reposo.

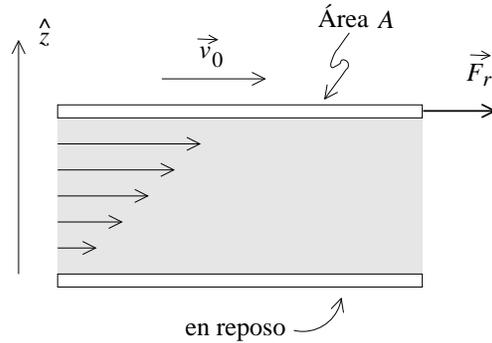


Figura 12.21

Newton experimentalmente encontró que para muchos fluidos la fuerza que se debe realizar para mantener la placa en movimiento es

$$F_r = \eta A \frac{v_0}{D} = \eta A \frac{dv}{dz} ,$$

o sea, es proporcional al área A y al *gradiente* (derivada) de la velocidad. La constante de proporcionalidad η es la *viscosidad dinámica*. Los fluidos que cumplen con

esta relación se llaman *fluidos newtonianos*. La siguiente tabla da la viscosidad para algunas substancias:

Fluido	Temp. °C	viscosidad η [Ns/m ²]
Agua	0	$1.79 \cdot 10^{-3}$
Agua	20	$1.00 \cdot 10^{-3}$
Agua	100	$0.28 \cdot 10^{-3}$
Alcohol etílico	20	$1.2 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	0	12.11
Glicerina	20	1.49
Aire	-31.6	$1.54 \cdot 10^{-5}$
Aire	20	$1.83 \cdot 10^{-5}$
Aire	230	$2.64 \cdot 10^{-5}$
Helio	20	$1.94 \cdot 10^{-5}$

(Otra unidad usada para medir la viscosidad es el *poise* [P]: $1 [P] = 10 [Ns/m^2]$.) De la tabla se observa que la viscosidad es mucho mayor para los líquidos que para los gases. También se observa una fuerte dependencia de la temperatura. Para los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, mientras que para los gases aumenta.

Flujo laminar en tubos

El efecto de la viscosidad en el flujo de fluidos por tubos de sección redonda es de gran importancia en muchas aplicaciones. Consideremos aquí un caso: el flujo estacionario de un líquido newtoniano por un tubo horizontal de largo L y radio R . Sean P_1 y P_2 las presiones del líquido en los dos extremos del tubo y determinemos el perfil de velocidad $v(r)$ del fluido al interior del tubo y el flujo por unidad de tiempo.

Sea $v(r)$ la velocidad del fluido al interior del tubo. Sabemos que $v(R) = 0$, o sea, el fluido en contacto con el tubo está en reposo. Consideremos ahora el fluido encerrado al interior de un cilindro de radio r (ver figura 12.22). Llamemos A al fluido interior y B al fluido que está ubicado a distancia mayores que r . El área de contacto del fluido A con B es $2\pi rL$.

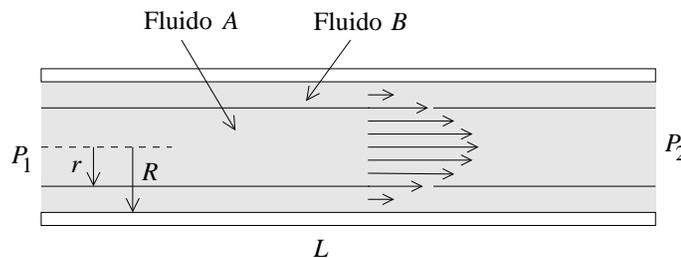


Figura 12.22

La fuerza que B ejerce sobre A es, por lo tanto,

$$\vec{F}_r = \eta(2\pi r L) \frac{dv(r)}{dr} \hat{x} .$$

Observe que dv/dr es negativo y, por lo tanto, la fuerza que el fluido exterior ejerce sobre A es contraria a la dirección del fluido. Como el flujo es estacionario, la fuerza total sobre el fluido A debe ser nula, o sea, la fuerza ejercida por las presiones P_1 y P_2 sobre el cilindro interno debe cancelar exactamente a la fuerza \vec{F}_r debida a la viscosidad:

$$P_1 \pi r^2 \hat{x} - P_2 \pi r^2 \hat{x} + \vec{F}_r = 0 .$$

De esta manera se deduce que

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r .$$

Integrando sobre r y fijando la constante de integración de manera que $v(R) = 0$ se encuentra el perfil de velocidades al interior del tubo (*ecuación de Poiseuille*):

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) .$$

Este perfil es de forma parabólica.

Conocido el perfil de velocidades podemos evaluar el flujo dV/dt (la cantidad de fluido que atraviesa la sección transversal del tubo por unidad de tiempo). La cantidad de fluido que pasa entre dos cilindros concéntricos de radios r y $r + dr$ en un tiempo dt es $(2\pi r dr)v(r) dt$. Sumando sobre todos los cilindros (integrando sobre r) se obtiene la cantidad de fluido dV que pasa por el tubo en un tiempo dt :

$$dV = \int_0^R (2\pi r dr)v(r) dt .$$

Se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L} \pi R^4 .$$

Observe que la cantidad de agua que se puede hacer pasar por un tubo aumenta dramáticamente cuando se aumenta su diámetro. Aumentar la diferencia de presión en un factor 2 aumenta el flujo en ese mismo factor; aumentar el diámetro en un factor 2 (sin aumentar la diferencia de presión) aumenta el flujo en un factor 16.

También podemos escribir la última ecuación como sigue:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \frac{dV}{dt} ,$$

o sea, la pérdida de presión al pasar un flujo dV/dt por un tubo es proporcional a su largo L y a la viscosidad e inversamente proporcional a la cuarta potencia de R .

Flujo laminar alrededor de una esfera

Usando matemáticas más avanzadas se puede evaluar la fuerza de roce F_r debido a la viscosidad que actúa sobre una esfera de radio R cuando ésta se mueve respecto a un fluido con velocidad v_0 . Si el flujo es laminar la fuerza es (*ley de Stokes*)

$$F_r = 6\pi\eta R v_0 .$$

Esta ecuación, midiendo la velocidad terminal de esferas cayendo en el fluido, permite determinar su coeficiente de viscosidad.

12.10. Problemas

1. El rey Hierón de Siracusa pidió a Arquímedes que examinara una corona maciza que había ordenado hacer de oro puro. La corona pesaba 10 kg en el aire y 9.375 kg sumergida en agua. Arquímedes concluyó que la corona no era de puro oro. Asumiendo que en su interior contenía plata, ¿cuánto oro tenía la corona de Hierón? La densidad del oro es 19.3 g/cm^3 ; la de la plata, 10.5 g/cm^3 .
2. Considere un vaso de agua lleno hasta el borde, con un trozo de hielo flotando en él. Por supuesto que el hielo, al flotar, sobrepasará por encima del borde del vaso. A medida que el hielo se derrite. ¿Se derramará el vaso?

Suponga ahora que en el mismo vaso flota un pequeño barco de juguete hecho de latón. Suponga además que el barquito tiene un pequeño orificio por el cual penetra agua, haciendo que el barquito lentamente se llene de agua. Durante este proceso, o sea mientras el barco se llena de agua pero aún no se hunde, el nivel del agua del vaso ¿baja, queda a igual altura o sube? Cuando finalmente el barquito se hunde, que pasa con el nivel del agua?

3. Considere un cilindro de masa M , área A y altura h , que flota “parado” en un líquido de densidad ρ_0 .

- a) ¿Hasta qué altura estará sumergido el cilindro en el líquido?
- b) Si el recipiente que contiene el líquido es muy grande (por ejemplo, un lago), ¿qué trabajo debe realizarse para sacar el cilindro del líquido?
- c) ¿Varía la respuesta si el recipiente que contiene el líquido es un tambor cilíndrico de área A_0 ?

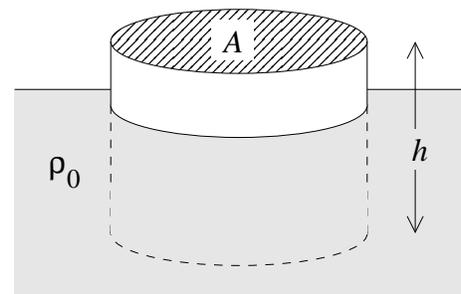


Figura 12.23

4. Considere una varilla de madera muy liviana, de largo L , sección transversal A y densidad ρ , que se hace flotar en el agua (designe la densidad del agua por ρ_0).

- a) Convéznase de que no es posible que la varilla flote “parada”.
- b) Para lograr que la varilla flote parada, agreguémosle una masa puntual m en el extremo inferior. ¿Cuál es la mínima masa m que debe agregarse para lograr el objetivo?

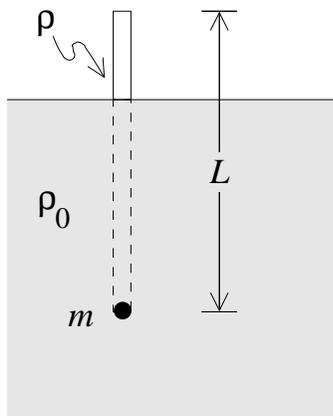


Figura 12.24

5. Considere un vaso comunicante de 2 cm^2 de sección transversal que contiene mercurio ($\rho = 13.6 \text{ g/cm}^3$). A un lado se echan 360 gramos de glicerina ($\rho = 1.2 \text{ g/cm}^3$) y en el otro $1/4$ de litro de alcohol ($\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$). Encuentre el desnivel d que existe entre los niveles superiores de la glicerina y el alcohol. Haga un gráfico cualitativo de la presión “hidrostática” en función de la profundidad para cada uno de los dos “brazos” del vaso comunicante (grafi-que las dos curvas en el mismo gráfico).

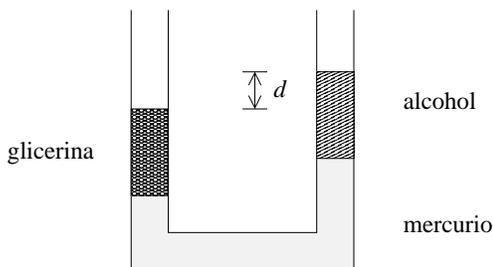


Figura 12.25

6. Considere un cilindro de sección A y altura h que se encuentra flotando en la interfase de dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 , respectivamente ($\rho_1 > \rho_2$). Encuentre la densidad ρ del cilindro si éste se encuentra sumergido en el fluido 1 en una magnitud d .

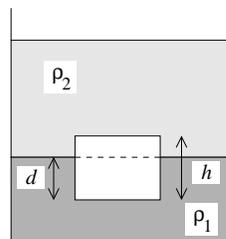


Figura 12.26

7. ¿Qué volumen de helio se requiere si debe elevarse un globo con una carga de 800 kg (incluido el peso del globo vacío)? Las densidades del aire y del helio, a la presión de una atmósfera, son $\rho_{\text{aire}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_{\text{He}} = 0.18 \text{ kg/m}^3$, respectivamente.

8. Una varilla de largo L y densidad ρ_1 flota en un líquido de densidad ρ_0 ($\rho_0 > \rho_1$). Un extremo de la varilla se amarra a un hilo a una profundidad h (ver figura adjunta).

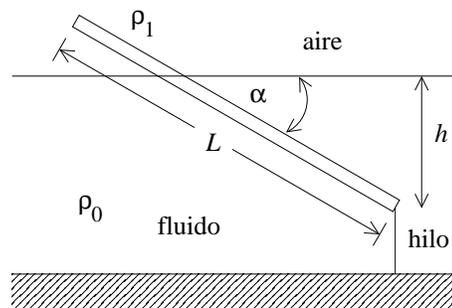


Figura 12.27

- Encuentre el ángulo α .
- ¿Cuál es el mínimo valor de h para el cual la varilla se mantiene en posición vertical?
- Si A es la sección transversal de la varilla, encuentre la tensión del hilo.

9. Considere las tres mediciones mostradas en la figura adjunta:

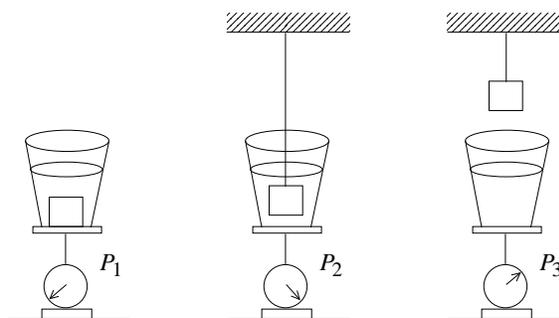


Figura 12.28

- P_1 es el peso de un recipiente con agua con un objeto sumergido en él.
- P_2 es el peso cuando el objeto está sumergido en el agua, pero colgado de una cuerda sin que toque el fondo del recipiente.
- P_3 es el peso del recipiente con agua.

Encuentre la densidad promedio del objeto.

10. En un canal horizontal, de ancho b , fluye agua con velocidad v , siendo el nivel de agua h . Asuma que en cierto lugar el canal se ensancha en una pequeña cantidad db . Demuestre que el nivel del agua cambiará en

$$dh = \frac{hv^2}{b(gh - v^2)} db .$$

Note que si $v^2 < gh$ el nivel del agua sube.

11. Un corcho cilíndrico de masa m_1 y sección transversal S_1 flota en un líquido de densidad ρ . El corcho está conectado por medio de una cuerda sin masa, de largo L , a un cilindro de aluminio de masa m_2 y sección transversal S_2 . El cilindro de aluminio puede deslizarse sin roce por un orificio hermético en el fondo del tiesto. Calcular la profundidad h a la que debe hallarse la base del corcho para que el sistema de los dos cilindros esté en equilibrio. La presión atmosférica, ¿juega algún rol?

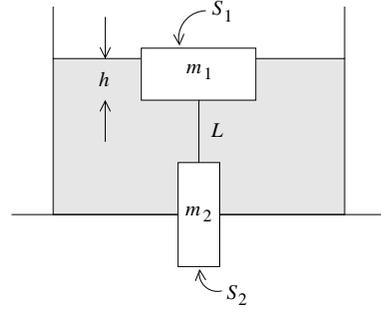


Figura 12.29

12. Un prado es regado con un regador hechizo que consiste en una botella plástica, con numerosos agujeros de 1 mm de diámetro, acostada sobre el prado y conectada aun a manguera. Asuma que una bomba de agua se encarga de generar un flujo de agua constante de 0.2 litros por segundo. ¿Cuántos agujeros debe tener la botella para que el agua llegue a mojar el prado a 8 metros de distancia de la botella? ¿Cuál es la presión al interior de la manguera si ésta tiene una sección transversal de 4 cm^2 ?

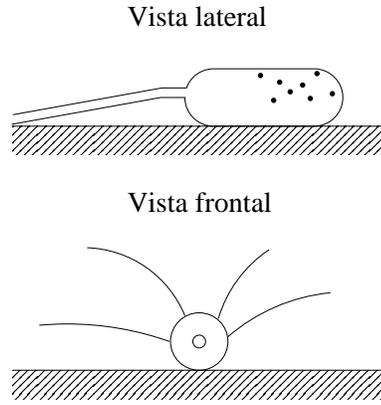


Figura 12.30

13. Un tubo de largo L , lleno de agua, gira en el plano horizontal en torno a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. En el extremo junto al eje, el tubo está abierto, coincidiendo por lo tanto la presión del fluido con la presión atmosférica. El tubo gira con velocidad angular constante ω . Si en el otro extremo, en cierto instante, se abre un pequeño orificio, ¿con qué velocidad emergerá el agua del tubo? (Especifique la rapidez y dirección de la velocidad.)

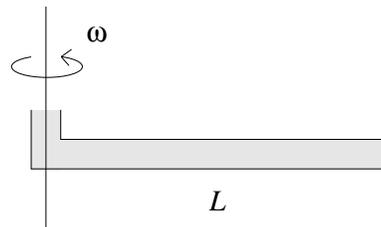


Figura 12.31

14. Para abastecer de agua a una casa de dos pisos se recurre a un “hidropack”. Este sistema consiste en una depósito subterráneo, una bomba y un cilindro con agua y aire. La bomba inyecta agua a presión al cilindro, que en su parte superior queda con aire comprimido. Un medidor de presión detiene la bomba cuando la presión del cilindro alcanza el valor deseado (el mismo medidor vuelve a encender la bomba cuando la presión baja de cierto nivel).

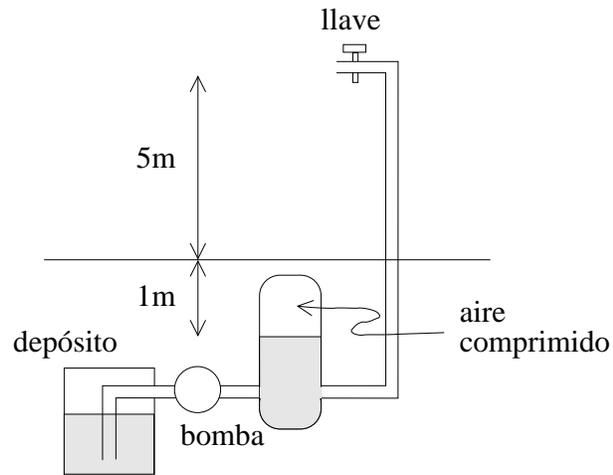


Figura 12.32

Si el nivel del agua en el cilindro se sitúa 1 metro por debajo del suelo, calcule la presión necesaria en el aire comprimido para que una llave de 1 cm^2 de sección, a una altura de 5 metros sobre el suelo, entregue un caudal de 12 litros por minuto. (La sección transversal del cilindro es grande respecto a la de la llave.) También encuentre la presión del aire al interior del cilindro.

15. La fuerza de sustentación de un avión moderno es del orden de 1000 N por metro cuadrado de ala. Suponiendo que el aire es un fluido ideal y que la velocidad del aire por debajo del ala es de 100 m/s , ¿cuál debe ser la velocidad requerida por sobre el ala para tener la sustentación deseada? (La densidad del aire es 1.3 kg/m^3 .)

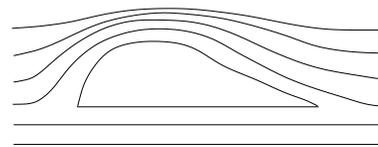


Figura 12.33

16. Un bombero lanza agua con su manguera hacia un incendio formando un ángulo de 45° con la horizontal. El agua que emerge del pistón penetra horizontalmente por una ventana del tercer piso que se encuentra a una altura $h = 10$ metros. La manguera que transporta el agua desde el carro bomba tiene un diámetro D de 6 cm y concluye en un pistón cuya abertura tiene un diámetro d de 1.5 cm .
- ¿Cuántos litros de agua emergen del pistón por minuto?
 - ¿Cuál es la presión P que debe soportar la manguera (en atmósferas)?

17. Considere la tubería que lleva el agua de una represa hacia una turbina. Suponga que la bocatoma se encuentra a 10 metros bajo el nivel de las aguas y que la turbina se encuentra 80 metros por debajo de ese nivel. Al inicio, es decir a la salida de la represa, la tubería tiene un diámetro de 40 cm. Suponga que el fluido se comporta como un fluido ideal.

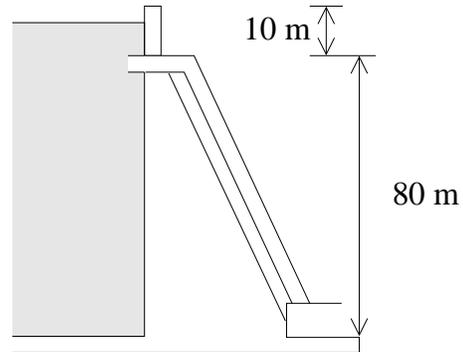


Figura 12.34

- a) ¿Cuál es el diámetro máximo que puede tener la tubería en su extremo inferior para que no se produzcan cortes de la columna de agua al interior de la tubería?
 - b) ¿Cuál sería la cantidad de agua que pasaría en ese caso por la tubería y cuál la velocidad del agua emergente?
 - c) Si el proceso de generación de energía eléctrica usando la presente turbina fuese 100 % eficiente, ¿cuál sería la potencia de esta central? ¿Esto corresponde al consumo promedio de cuántas casas?
 - d) Haga un gráfico cualitativo de la presión al interior de la tubería en función de la altura. ¿Cómo cambia esta presión si la sección de la tubería, en el punto emergente, se disminuye a la mitad? ¿A la centésima parte?
18. Considere una tubería de una calefacción. En el sótano su diámetro es de 4.0 cm y en el segundo piso, 5 metros más arriba, la tubería tiene un diámetro de sólo 2.6 cm. Si en el sótano una bomba se encarga de bombear el agua con una velocidad de 0.5 m/s bajo una presión de 3.0 atmósferas, ¿cuál será la rapidez de flujo y la presión en el segundo piso?

19. Suponga que el nivel de un líquido (agua) en un tambor tiene una altura h . A una altura b se hace una pequeña perforación lateral que permite que el agua emerja horizontalmente. ¿A qué altura debe hacerse la perforación para que el alcance d del agua se máximo?

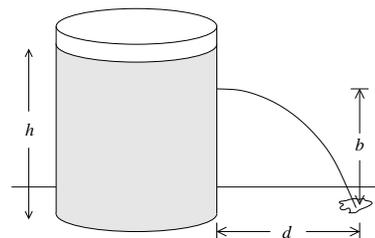


Figura 12.35

Respuesta: $b = h/2$.

20. En un torrente de agua se sumerge un tubo doblado, tal como se muestra en la figura adjunta. La velocidad de la corriente con respecto al tubo es $v = 2.5$ m/s. La parte superior del tubo se encuentra a $h_0 = 12$ cm sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero. ¿A qué altura h subirá el chorro de agua que sale por el agujero?

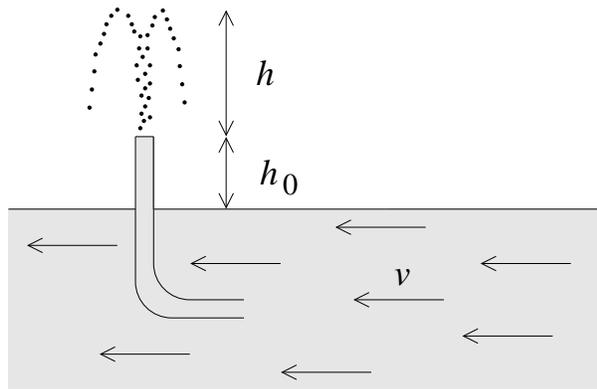


Figura 12.36

21. Considere una masa esférica homogénea en equilibrio hidrostático. Sea R_T el radio y ρ_0 la densidad de masa.
- a) Muestre que la presión a una distancia r del centro viene dada por

$$p = \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 G (R^2 - r^2) .$$

- b) Evalúe la presión al centro de la Tierra. $R_T = 6.3 \cdot 10^8$ cm y densidad uniforme promedio $\rho_0 = 5.5$ g/cm³.
22. En un balón el gas en su interior se encuentra a una presión P . Demuestre que la velocidad con que escapa el gas, al abrir la válvula, es

$$v = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho}} ,$$

donde ρ es la densidad del gas y P_0 la presión atmosférica. (Esta ecuación se conoce por *ley de Bunsen*.)

23. Considere una prensa hidráulica (ve figura adjunta). Sean $R_1 = 25$ cm y $R_2 = 150$ cm los radios de los émbolos de bombeo y de presión, respectivamente.

Si de la palanca que actúa sobre el émbolo de bombeo se tira con una fuerza $F_1 = 100 \text{ [N]}$ (ver figura), ¿qué fuerza ejercerá el émbolo de presión sobre el objeto S ?

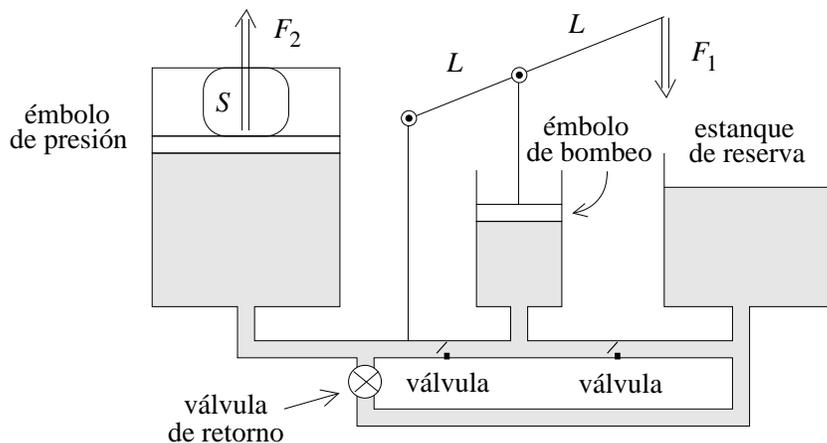


Figura 12.37

24. Se quiere confeccionar aluminio poroso (algo así como queso suizo) que se mantenga en suspensión en agua. Determine la razón entre el volumen de los poros y el volumen del aluminio poroso. (La densidad del aluminio sólido es $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$.)

25. * Considere un cuerpo líquido de densidad uniforme ρ_0 , que se mantiene unido debido a la gravedad y que gira con una velocidad angular ω_0 . Si bien el cuerpo es esférico si $\omega_0 = 0$, cuando $\omega_0 \neq 0$ (pero no demasiado grande), el cuerpo adquiere la forma de un esferoide oblato. Demuestre que si la desviación de la esfericidad es pequeña, entonces

$$\frac{R_1 - R_2}{R} = \frac{3}{8\pi} \frac{\omega_0^2}{\rho_0 G},$$

donde $R \simeq R_1 \simeq R_2$. Evalúe $(R_1 - R_2)/R$ para la Tierra y compárelo con el valor experimental, que es $\sim 1/298.4$.

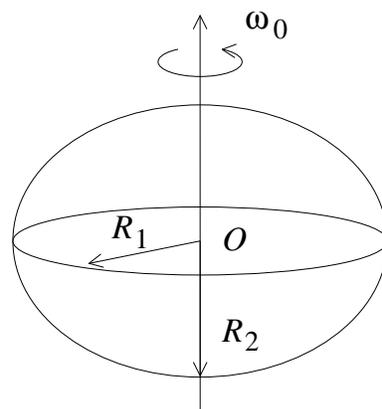


Figura 12.38

26. * Considere la situación mostrada en la figura 12.39. Un cilindro de radio R y largo L evita que el agua de cierto recipiente se rebase. El cilindro se puede mover libremente. La densidad del cilindro es tal que, cuando el agua llega a la parte superior del cilindro, la posición del cilindro es la mostrada en la figura. Encuentre la fuerza que ejerce el agua sobre el cilindro. Encuentre la densidad del material del que está hecho el cilindro.

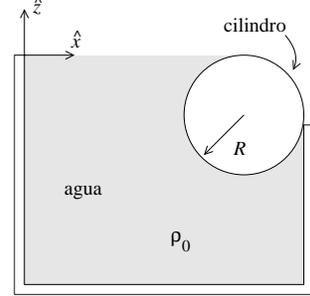


Figura 12.39

Respuesta: $\vec{F}_{\text{agua}} = \rho_0 g R^2 L \left[\frac{1}{2} \hat{x} + \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) \hat{z} \right]$.

27. * Considere una caja de dimensiones a , b y h , llena de agua. Todos los lados de la caja están firmemente unidos entre sí, excepto uno de los lados laterales (de dimensión $b \cdot h$). Evalúe la magnitud de la fuerza exterior mínima con que debe presionarse ese lado contra el resto de la caja para que el agua no escurra. Si la fuerza se aplica en un solo lugar, encuentre la posición en la que debe aplicarla.

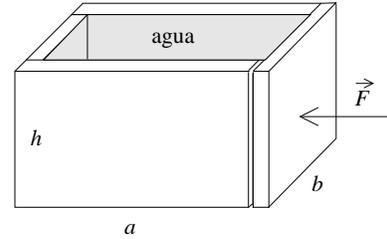


Figura 12.40

28. Un mol de aire en condiciones normales (a nivel del mar y a 20°C de temperatura) ocupa un volumen de 22.4 litros. Estime la densidad del aire si gran parte de él está constituido por nitrógeno. (Resp.: $\sim 1.28 \text{ kg/m}^3$.)

¿Cuál es el mínimo volumen que debe tener un globo de helio ($\rho = 0.18 \text{ kg/m}^3$) para levantar un vehículo de 1200 kg?

29. Dos globos esféricos inflados con aire, ambos de radio R , se unen mediante una cuerda de longitud L . Los dos globos se mantienen bajo el agua con el punto medio de la cuerda fijo al fondo. Calcular la fuerza de contacto entre los globos.

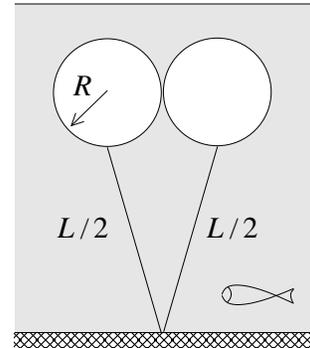


Figura 12.41

30. Una varilla yace en el fondo de un recipiente con agua formando un ángulo de 60° con la vertical. La varilla es de sección uniforme y está formada por dos pedazos iguales en longitud pero de distinta densidad. La densidad de una de las porciones de la varilla es la mitad de la del agua. Determine la densidad de la otra porción.

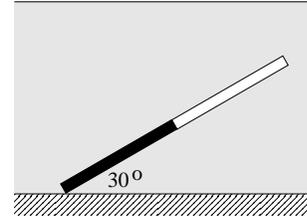


Figura 12.42

31. Considere un bloque de hielo ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$) en forma de "L", formado de tres cubos de 25 cm por lado. Mediante un peso se desea sumergir el hielo en agua como se indica en la figura. Determine la masa del peso y la ubicación en el hielo donde debería adherirse de modo que el hielo se mantenga justo sumergido lo más estable posible.

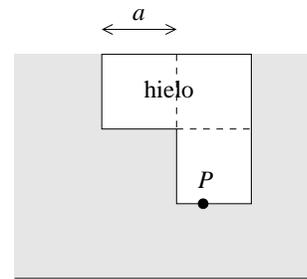


Figura 12.43

32. Considere un sistema de vasos comunicantes formado por dos tubos de sección transversal de 50 cm^2 que están unidos por un tubito corto de sección transversal muy pequeña (o sea, para efectos de este problema podemos despreciar la cantidad de fluido que se encontrará en el tubito). Inicialmente en este sistema de vasos comunicantes se encuentran dos litros de agua.

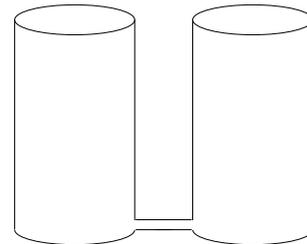


Figura 12.44

- a) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos se le agregan 2 litros de un líquido cuya densidad es $\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$.
- b) Para la situación descrita en la parte a), encuentre la presión en el fondo de los vasos comunicantes.
- c) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos, en lugar de 2, se le agregan 3 litros de un líquido cuya densidad es $\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$.

33. Un tubo horizontal por el que fluye líquido de densidad ρ_0 a razón de Q m³/s, se bifurca en dos ramas en el plano vertical, una superior y otra inferior, de secciones transversales $a_1 = a_2 = a$, abiertas a la atmósfera (ver figura). Si la distancia entre las ramas es h , determinar:
- Las cantidades q_1 y q_2 de líquido (en m³/s) que fluyen por ambas ramas.
 - La condición que debe cumplir Q para que haya flujo en la rama superior.

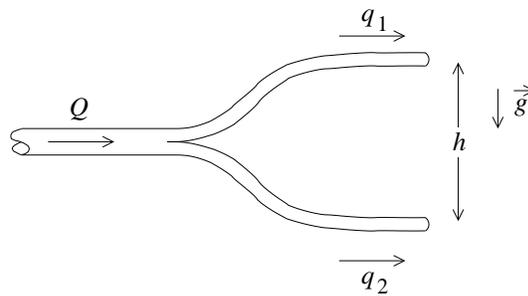


Figura 12.45

34. Una gotita de agua de 1 mm de radio se pulveriza en gotitas de 10^{-4} mm de radio. ¿En qué factor aumenta la energía superficial (debido a la tensión superficial)?
35. La figura 12.46 muestra un *tubo de Pitot*, instrumento que se usa para medir la velocidad del aire. Si el líquido que indica el nivel es agua y $\Delta h = 12$ cm, encuentre la velocidad del aire. La densidad del aire es $\rho_{\text{aire}} = 1.25$ kg/m³.
 Respuesta: $v_0 = 43.4$ m/s = 156 km/h.

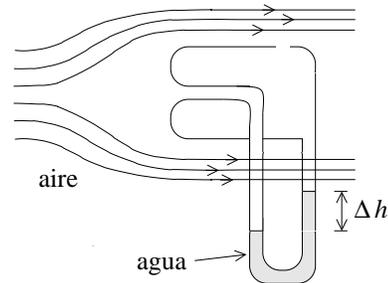


Figura 12.46

36. Considere dos placas planas de vidrio, separadas por una distancia de 0.1 mm, con un extremo sumergidas en agua en forma vertical. ¿Qué distancia se elevará el agua entre las placas debido a la capilaridad?
37. * Encuentre la velocidad terminal que adquiere una esfera de cobre de 0.5 cm de diámetro, cuando cae en agua ($\rho_{\text{Cu}} = 8.92$ g/cm³). ¿En qué factor disminuye la velocidad terminal si el diámetro se achica en un factor 10?

38. * Considere un oleoducto de 5 km y 50 cm de diámetro por el cual se desea bombear 1 m^3 por segundo. Si uno de los extremos está abierto a la presión atmosférica, ¿qué presión P_1 debe existir en el otro extremo? Suponga que la densidad del petróleo es $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$ y el coeficiente de viscosidad es aproximadamente $\eta = 0.2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. ¿Cuál es la potencia dW/dt (energía por unidad de tiempo) disipada por la fricción interna originada por la viscosidad?

Respuesta: $P_1 \simeq 7.5 \text{ atm}$; $dW/dt \simeq 650 \text{ kW}$.

12.11. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 8

El largo a de la parte de la varilla sumergida es $a = h/\text{sen } \alpha$. La fuerza de empuje se aplica en el lugar $a/2$ y la fuerza de gravedad en el lugar $L/2$ (medidos desde O).

Sea A la sección transversal de la varilla. Entonces la fuerza de empuje viene dada por

$$\vec{F}_e = \rho_0 A a g \hat{z} = \rho_0 A \frac{h}{\text{sen } \alpha} g \hat{z} .$$

La fuerza de gravedad es

$$\vec{F}_g = -\rho_1 L A g \hat{z} .$$

El torque ejercido por ambas fuerzas respecto a O debe ser nulo, o sea,

$$F_e \frac{a}{2} \cos \alpha = F_g \frac{L}{2} \cos \alpha .$$

Simplificando se obtiene

$$F_e a = F_g L .$$

Sustituyendo las expresiones par F_e y F_g se deduce que

$$\rho_0 A a^2 g = \rho_1 A L^2 g ,$$

o sea

$$\rho_0 \frac{h^2}{\text{sen}^2 \alpha} = \rho_1 L^2 .$$

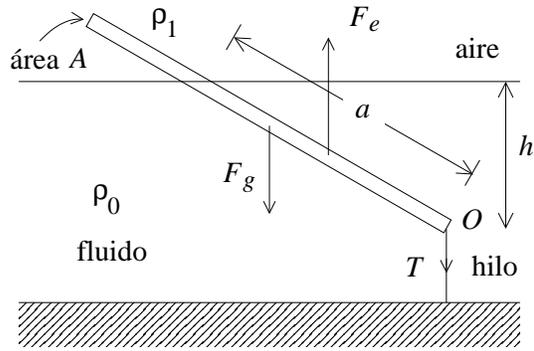


Figura 12.47

Despejando se encuentra finalmente que

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} \frac{h}{L} .$$

Si el lado derecho de la última ecuación es mayor o igual a uno, la varilla se mantendrá en posición vertical. El mínimo valor de h para que la varilla esté en posición vertical es

$$h_{\text{min}} = L \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}} .$$

La tensión del hilo se obtiene exigiendo que la fuerza total sea nula. De esta manera se obtiene que

$$\begin{aligned} T &= F_e - F_g = \rho_0 A \frac{h}{\text{sen } \alpha} g - \rho_1 L A g \\ &= ALg\rho_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right) = Mg \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right) , \end{aligned}$$

donde M es la masa de la varilla.

Solución al problema 16

- a) Si v es la velocidad con que emerge el agua del pistón, la velocidad hacia arriba será $v/\sqrt{2}$. El agua alcanza a subir una altura h , luego su velocidad es

$$v = 2\sqrt{gh} = 20 \text{ m/s} .$$

La cantidad de agua V que emerge del pistón en $t = 60$ segundos es

$$V = vt\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} 20 \cdot 60 \cdot 3.14 \cdot (0.015)^2 \text{ m}^3 = 212 \text{ litros} .$$

- b) Usemos el teorema de Bernoulli para comparar el flujo del agua justo a la salida del pistón con el flujo en la manguera justo detrás del pistón. No hay cambio en la energía potencial. Como la sección transversal de la manguera es 16 veces mayor que la abertura del pistón, la velocidad del agua en la manguera será 16 veces menor que la velocidad emergente v . A la salida del pistón la presión es la presión atmosférica, que ignoraremos en el presente cálculo, ya que sólo estamos interesados en la presión adicional p que debe soportar la manguera debido al agua que fluye en su interior. Se tiene

$$p + \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{v}{16} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 .$$

Ignorando la energía cinética del agua al interior de la manguera (convéznase de que modifica el resultado final en menos de un 0.5%), se obtiene

$$p = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 = \frac{1}{2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2},$$

lo que corresponde a aproximadamente 2 atmósferas.

Solución al problema 27

Elijamos el eje \hat{z} a lo largo de la vertical, con el origen al fondo de la caja sobre la tapa móvil. La presión a una altura z es $P(z) = \rho_0 g(h - z)$. Dividamos la tapa en franjas horizontales de largo b y ancho (altura) dz . La fuerza que ejerce el fluido sobre la franja que está a la altura z es

$$dF = P(z)b dz .$$

Sumando (integrando) la fuerza que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene la fuerza total

$$F = \int_0^h P(z)b dz = \rho_0 g b \int_0^h (h - z) dz = \frac{1}{2} \rho_0 b g h^2 .$$

Para encontrar a qué altura h_0 debemos aplicar esta fuerza sobre la tapa, evaluemos el torque que ejerce el fluido sobre la tapa respecto al origen. El torque que el fluido ejerce sobre la franja que está a la altura z es

$$d\tau = zP(z)b dz .$$

Sumando (integrando) el torque que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene el torque total

$$\tau = \int_0^h zP(z)b dz = \rho_0 g b \int_0^h z(h - z) dz = \frac{1}{6} \rho_0 b g h^3 .$$

Para que la tapa esté en equilibrio el torque que ejerce la fuerza total externa F debe coincidir en magnitud con τ , es decir,

$$Fh_0 = \tau ,$$

o sea

$$\frac{1}{2} \rho_0 b g h^2 h_0 = \frac{1}{6} \rho_0 b g h^3 .$$

De esta ecuación se deduce finalmente que $h_0 = h/3$.

Solución al problema 33

La relación de Bernoulli se puede aplicar entre los puntos A y B_1 y también entre A y B_2 . Por transitividad, la relación de Bernoulli también es válida entre los puntos B_1 y B_2 . Se tiene

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 .$$

Pero $P_1 = P_2 = P_0$ (la presión atmosférica), $h_1 = 0$ y $h_2 = h$, luego

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_2^2 .$$

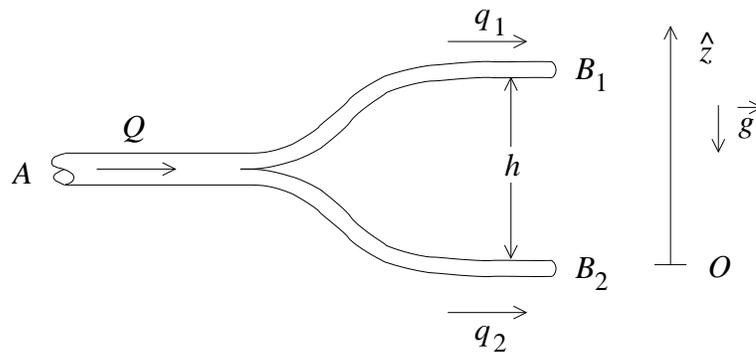


Figura 12.48

Los flujos que circulan por la rama superior e inferior vienen dados por $q_1 = av_1$ y $q_2 = av_2$, respectivamente. También se tiene que $Q = q_1 + q_2$. De las relaciones anteriores se deduce que

$$q_1 = \frac{Q^2 - 2a^2gh}{2Q}$$

y

$$q_2 = \frac{Q^2 + 2a^2gh}{2Q} .$$

Para que circule líquido por la rama superior se debe tener que

$$Q > a\sqrt{2gh} .$$

Capítulo 13

Oscilador armónico

versión 26 diciembre 2011

13.1. La ecuación diferencial $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de un oscilador armónico simple es

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 . \quad (13.1)$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Comenzaremos este capítulo exponiendo algunos resultados generales relativos a este tipo de ecuaciones, resultados que serán de gran utilidad para nuestros propósitos.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones cualesquiera de cierta ecuación diferencial. Tal ecuación diferencial es lineal si $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ también es solución, donde α y β son constantes (reales o complejas) arbitrarias.

Ejercicio: Demuestre que la ecuación diferencial del oscilador armónico es lineal

El orden de la derivada más alta da el orden de la ecuación diferencial. La solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes arbitrarias (que luego deben ser determinadas usando las condiciones de borde).

La ecuación diferencial del oscilador armónico es de segundo orden, por lo tanto, la solución general tiene dos constantes arbitrarias. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones cualesquiera (distintas) de (13.1). Como la ecuación diferencial (13.1) es lineal, se tiene que la función $x_g(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, con α y β constantes arbitrarias, también es solución. Pero observe que la solución $x_g(t)$ tiene dos constantes arbitrarias y, por

lo tanto, debe ser una solución general del problema. En otras palabras, todas las posibles soluciones de (13.1) deben ser de la forma $x_g(t)$; las distintas soluciones se diferencian sólo por los valores de α y β .

En el lenguaje técnico se dice que las soluciones de la ecuación diferencial (13.1) forman un espacio vectorial de 2 dimensiones, siendo x_1 y x_2 dos “vectores” particulares de ese espacio. Los dos vectores $x_1(t)$ y $x_2(t)$ (si uno de ellos no es múltiplo del otro) forman una *base* del espacio vectorial. Cualquier otro vector (o sea, solución de (13.1)) es una combinación lineal de los vectores base, es decir, es de la forma $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$.

Sabemos que las funciones

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (13.2)$$

y

$$x_2(t) = \text{sen}(\omega_0 t) \quad (13.3)$$

son dos soluciones particulares de (13.1). Estas dos funciones (y de hecho así se hace frecuentemente) pueden ser tomadas como los dos vectores base del espacio vectorial formado por las soluciones de (13.1). Cualquier otra solución $x(t)$ de la ecuación diferencial del oscilador armónico puede escribirse de la forma

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \text{sen}(\omega_0 t) .$$

Las constantes a y b se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Observe que no es necesario elegir las funciones (13.2) y (13.3) como vectores base del espacio vectorial; de hecho, cualquier otro par de soluciones (mientras una no sea múltiplo de la otra) también habría servido. Lo interesante es que las funciones (13.2) y (13.3) *no* son las funciones más convenientes para usar como base. Existe un par de soluciones de (13.1) que, si se usan como base, simplifican notoriamente los cálculos. En lo que sigue de esta sección introduciremos esta nueva base, estudiaremos algunas de sus propiedades y la relacionaremos con la base dada por las funciones (13.2) y (13.3).

Consideremos la función

$$z(t) = e^{\Gamma t} = \exp(\Gamma t) .$$

Al derivar $z(t)$ dos veces se obtiene

$$\dot{z}(t) = \Gamma e^{\Gamma t}$$

y

$$\ddot{z}(t) = \Gamma^2 e^{\Gamma t} = \Gamma^2 z(t) .$$

Observe que esta última ecuación se puede escribir de la forma

$$\ddot{z}(t) - \Gamma^2 z(t) = 0 .$$

Esta ecuación es idéntica a la del oscilador armónico si se identifica

$$\Gamma^2 = -\omega_0^2 ,$$

lo que es equivalente a la relación

$$\Gamma = \pm i\omega_0 ,$$

con $i \equiv \sqrt{-1}$. Observe que acabamos de demostrar que las funciones

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \tag{13.4}$$

y

$$x_2(t) = e^{-i\omega_0 t} \tag{13.5}$$

son dos soluciones particulares de la ecuación diferencial del oscilador armónico, o sea, de (13.1). Resulta que éstas son las funciones más convenientes para generar todas las demás soluciones de (13.1). Cualquier solución $x(t)$ de (13.1) se puede escribir de la forma

$$x(t) = \alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t} ,$$

donde las constantes α y β se determinan a partir de las condiciones iniciales. (Las constantes α y β , generalmente, resultan ser números complejos.)

Determinemos las relaciones entre las dos bases. Como $\cos(\omega_0 t)$ es solución de (13.1) debe poder escribirse de la forma

$$\cos(\omega_0 t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} . \tag{13.6}$$

Determinemos las constantes c_1 y c_2 . Derivando (13.6) se encuentra que

$$-\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) = i\omega_0 c_1 e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 c_2 e^{-i\omega_0 t} ,$$

o sea,

$$\operatorname{sen}(\omega_0 t) = -i (c_1 e^{i\omega_0 t} - c_2 e^{-i\omega_0 t}) . \tag{13.7}$$

Evaluando (13.6) y (13.7) para $t = 0$ se obtiene

$$1 = c_1 + c_2$$

y

$$0 = -i(c_1 - c_2) .$$

De estas relaciones se deduce que $c_1 = c_2 = 1/2$. De esta manera hemos demostrado que

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \quad (13.8)$$

y

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) . \quad (13.9)$$

También podemos escribir $\exp(i\omega_0 t)$ y $\exp(-i\omega_0 t)$ en función de $\cos(\omega_0 t)$ y $\text{sen}(\omega_0 t)$. Usando las relaciones anteriores no es difícil demostrar que

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \text{sen}(\omega_0 t) \quad (13.10)$$

y

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \text{sen}(\omega_0 t) . \quad (13.11)$$

Por último, sustituyendo en (13.10) $\omega_0 t$ por π encontramos una de las más bellas ecuaciones de la matemática

$$e^{i\pi} + 1 = 0 ,$$

relación que combina de manera simple los más importantes números de esa ciencia: 0, 1, π , e e $i = \sqrt{-1}$.

Ejercicio: Demuestre que el módulo de los números complejos $\exp(i\omega_0 t)$ y $\exp(-i\omega_0 t)$ es uno, es decir, demuestre que

$$|e^{i\omega_0 t}| = |e^{-i\omega_0 t}| = 1 .$$

13.2. El oscilador armónico simple

Cada vez que la ecuación dinámica de un sistema tiene la forma

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 ,$$

estaremos en presencia de un oscilador armónico.

Ejemplo: Consideremos un péndulo de largo R . Elijamos el origen en el punto de suspensión. El momento angular y el torque (en torno al origen) vienen dados por

$$l = mR(R\dot{\theta})$$

y

$$\tau = -Rmg \operatorname{sen} \theta .$$

Por otra parte

$$\tau = \frac{dl}{dt} = mR^2\ddot{\theta} ,$$

luego

$$mR^2\ddot{\theta} = -Rmg \operatorname{sen} \theta .$$

Esta relación se puede escribir de la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \operatorname{sen} \theta = 0 .$$

Denotando g/R por ω_0^2 y restringiéndonos a pequeños ángulos, de manera que podamos usar la aproximación $\operatorname{sen} \theta \simeq \theta$, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 . \tag{13.12}$$

La constante ω_0 está relacionada con el periodo T del movimiento por la relación $\omega_0 T = 2\pi$.

Conocer la ecuación dinámica de un sistema permite, en principio, conocer la evolución temporal del mismo. Para encontrar la solución explícita del problema se procede generalmente de la siguiente manera: i) se busca la solución general de la ecuación dinámica; ii) las constantes arbitrarias de la ecuación general se determinan exigiendo que la solución cumpla con las condiciones de borde (iniciales) del problema.

Ilustremos el procedimiento con nuestro ejemplo concreto. Supongamos que en el instante $t = 0$ el ángulo y la velocidad angular del péndulo son θ_0 y Ω , respectivamente. Deseamos encontrar una expresión explícita para $\theta(t)$. Resolveremos este problema de dos maneras:

a) Sabemos que la solución general de (13.12) puede escribirse de la forma

$$\theta(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \operatorname{sen}(\omega_0 t) .$$

Determinaremos las constantes a y b . Para ello derivemos primero la última ecuación respecto al tiempo. Se obtiene

$$\dot{\theta}(t) = -a \omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + b \omega_0 \cos(\omega_0 t) .$$

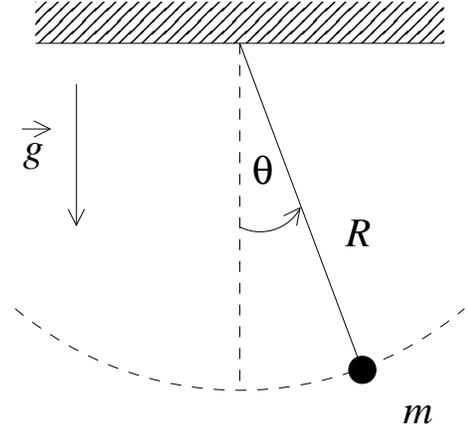


Figura 13.49

Evaluando las dos últimas ecuaciones para $t = 0$, y usando las condiciones iniciales, se obtiene

$$\theta(0) = a = \theta_0$$

y

$$\dot{\theta}(0) = b\omega_0 = \Omega .$$

La solución explícita se obtiene sustituyendo los valores de a y b , que se deducen de estas relaciones, en la solución general:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) .$$

- b) Como vimos en la sección anterior, en lugar de $\cos(\omega_0 t)$ y $\sin(\omega_0 t)$ también podemos usar las soluciones particulares $\exp(i\omega_0 t)$ y $\exp(-i\omega_0 t)$ como base. O sea, otra forma de escribir la solución general de (13.12) es

$$\theta(t) = \alpha \exp(i\omega_0 t) + \beta \exp(-i\omega_0 t) .$$

Determinaremos las constantes α y β . Para ello, nuevamente, derivemos la solución general:

$$\dot{\theta}(t) = i\omega_0 \alpha \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 \beta \exp(-i\omega_0 t) .$$

Evaluando estas dos últimas ecuaciones para $t = 0$, y usando las condiciones iniciales, se obtiene

$$\theta(0) = \theta_0 = \alpha + \beta$$

y

$$\dot{\theta}(0) = \Omega = i\omega_0 \alpha - i\omega_0 \beta .$$

Despejando α y β de estas dos relaciones:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\theta_0 - i \frac{\Omega}{\omega_0} \right) ,$$

$$\beta = \alpha^* = \frac{1}{2} \left(\theta_0 + i \frac{\Omega}{\omega_0} \right) .$$

Sustituyendo estos valores en la solución general se obtiene

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \left(\theta_0 - i \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \exp(i\omega_0 t) + \frac{1}{2} \left(\theta_0 + i \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \exp(-i\omega_0 t)$$

Demostremos ahora que las expresiones encontradas en las partes a) y b) son equivalentes. En efecto, reordenando los términos de la solución encontrada en la parte b)

se encuentra que

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \frac{1}{2} (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) - i \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{1}{2} (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) \\ &= \theta_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \\ &= \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\Omega}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) . \end{aligned}$$

Los dos procedimientos dan exactamente el mismo resultado. En el presente ejemplo, el segundo método resultó ser más engorroso, más largo y menos transparente y ciertamente no se observa ninguna ventaja al haber introducido la base con exponenciales complejas. Sin embargo, en las secciones siguientes, al estudiar problemas levemente más complejos, la ventaja de usar las exponenciales complejas en lugar del seno y coseno resultará más evidente.

13.3. El oscilador armónico atenuado

Ejemplo: Consideremos una masa m adosada a un resorte de constante de restitución k . Supongamos que la masa m sólo se puede desplazar a lo largo del eje \hat{x} . Sea $x(t)$ la posición de m , siendo $x = 0$ la posición de equilibrio. Supongamos además que sobre el sistema actúa una fuerza de roce que es proporcional a la velocidad \dot{x} (pero de signo contrario), o sea

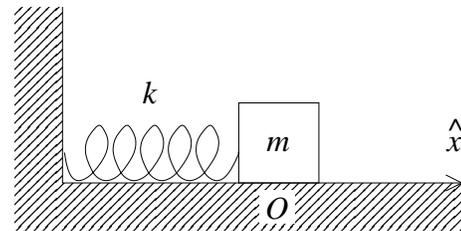


Figura 13.50

$$f_r = -\gamma \dot{x}(t) \quad (\text{con } \gamma > 0) .$$

Usando la segunda ley de Newton se deduce que la posición $x(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$m\ddot{x}(t) = -k x(t) - \gamma \dot{x}(t) .$$

Introduciendo las constantes $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ y $\eta \equiv \gamma/2m$ se encuentra que la relación dinámica para este oscilador armónico con roce es

$$\ddot{x} + 2\eta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \tag{13.13}$$

Esta es la *ecuación diferencial del oscilador armónico atenuado*.

Ejercicio: Demuestre que la ecuación diferencial (13.13) es lineal.

Deseamos encontrar la solución general de la ecuación (13.13). Sabemos que, si encontramos dos soluciones particulares distintas de (13.13) (denotémoslas por $x_1(t)$ y $x_2(t)$), entonces la solución general vendrá dada por

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) ,$$

donde las constantes α y β se eligen de manera que la solución satisfaga las condiciones iniciales.

Procederemos de acuerdo al siguiente esquema: primero encontraremos la solución general de (13.13) y luego determinaremos las constantes arbitrarias de la solución general de manera de obtener la solución particular que, en $t = 0$, satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0$$

y

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0 .$$

Ansatz (o hipótesis de trabajo): Busquemos soluciones del tipo $x(t) = e^{\Gamma t}$, donde Γ es una constante por determinar. Derivando el *Ansatz* dos veces se obtiene

$$\dot{x}(t) = \Gamma e^{\Gamma t} ,$$

y

$$\ddot{x}(t) = \Gamma^2 e^{\Gamma t} .$$

Sustituimos estas relaciones en (13.13),

$$\Gamma^2 e^{\Gamma t} + 2\eta \Gamma e^{\Gamma t} + \omega_0^2 e^{\Gamma t} = 0 ,$$

o sea,

$$\Gamma^2 + 2\eta \Gamma + \omega_0^2 = 0 .$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado para Γ se encuentra

$$\Gamma = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} . \quad (13.14)$$

Debemos distinguir tres casos:

i) Caso $\eta > \omega_0$ (oscilador armónico supercrítico).

En este caso la ecuación (13.14) nos entrega dos soluciones distintas de la ecuación diferencial, éstas son

$$x_1(t) = e^{(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2})t}$$

y

$$x_2(t) = e^{(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2})t} .$$

La solución general, por lo tanto, es

$$x(t) = \alpha e^{(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2})t} + \beta e^{(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2})t} .$$

Determinando α y β de manera que la solución general anterior cumpla con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$, se encuentra

$$x(t) = \frac{x_0}{2} \left[\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2})t} + \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2})t} \right] .$$

La figura 13.51 muestra cualitativamente el comportamiento del oscilador en este caso. En el caso supercrítico la fricción es muy grande y la masa m no oscila. Imagínese una bolita colgada de un resorte sumergida en un frasco con miel.

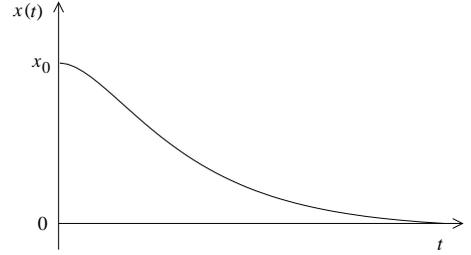


Figura 13.51

II) Caso $\eta < \omega_0$ (oscilador armónico subcrítico).

En este caso la ecuación (13.14) también nos da dos soluciones distintas:

$$x_1(t) = e^{(-\eta + i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2})t} = e^{-\eta t} e^{i\omega t}$$

y

$$x_2(t) = e^{(-\eta - i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2})t} = e^{-\eta t} e^{-i\omega t} ,$$

con

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} .$$

La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\eta t} (\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}) .$$

Evaluando α y β de manera que la solución cumpla las condiciones de borde $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$, se encuentra

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} e^{-\eta t} \left[\left(1 + \frac{\eta}{i\omega} \right) e^{i\omega t} + \left(1 - \frac{\eta}{i\omega} \right) e^{-i\omega t} \right] \\ &= x_0 e^{-\eta t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\eta}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right] . \end{aligned} \tag{13.15}$$

La figura 13.52 muestra cualitativamente el comportamiento del oscilador en este caso. En el caso subcrítico la fricción es relativamente pequeña y la masa m oscila. Note que a medida que transcurre el tiempo la amplitud de la oscilación decae exponencialmente.

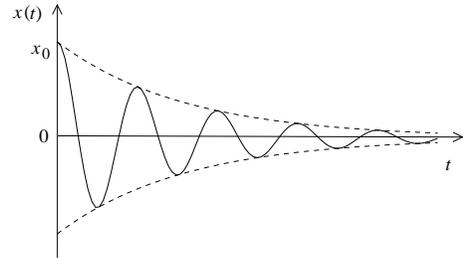


Figura 13.52

III) Caso $\eta = \omega_0$ (oscilador armónico crítico).

Este caso es levemente más complicado, ya que la ecuación (13.14) nos da sólo una solución:

$$x_1(t) = e^{-\eta t} .$$

Debemos, de alguna manera, encontrar otra solución para poder construir la solución general.

Ejercicio: Demuestre que la otra solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\eta \dot{x} + \eta^2 x = 0$$

es la función

$$x_2(t) = t e^{-\eta t} .$$

Usando el resultado del ejercicio se encuentra que, para un oscilador armónico atenuado crítico, la solución general viene dada por

$$x(t) = (\alpha + \beta t) e^{-\eta t} .$$

Para que la solución cumpla con las condiciones de borde se determina que ésta viene dada por

$$x(t) = x_0(1 + \eta t) e^{-\eta t} . \tag{13.16}$$

Observe que, independiente de las condiciones iniciales, el oscilador armónico atenuado paulatinamente siempre se acercará a su posición de equilibrio, es decir, para $t \rightarrow \infty$, siempre $x(t) \rightarrow 0$.

Ejercicio: Demuestre que la solución (13.16) también se puede obtener a partir de (13.15) poniendo $\omega_0 = \eta + \epsilon$ y realizando el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

13.4. El oscilador armónico forzado

Agreguémosle al oscilador armónico atenuado una fuerza armónica externa F_e de una frecuencia Ω , es decir,

$$F_e = F_0 \cos(\Omega t) .$$

Situaciones de este tipo se dan con gran frecuencia en la naturaleza.

La ecuación diferencial para el oscilador en este caso es

$$\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) . \quad (13.17)$$

Ejercicio: Demuestre que la ecuación diferencial anterior no es lineal, o sea, la suma de dos soluciones ya no sigue siendo solución.

Si el lado derecho es nulo (o sea, $F_0 = 0$), entonces la ecuación coincide con la analizada en la sección anterior. En este caso conocemos la solución general. Denotemos esta solución general (de la *ecuación homogénea*) por $x_h(t)$. Tal solución tendrá dos constantes arbitrarias.

Sea $x_p(t)$ una solución particular cualquiera de (13.17), entonces la solución general será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) .$$

Efectivamente, es fácil demostrar que $x(t)$ es solución de (13.17). De que es la solución general se desprende del hecho de que ésta, por ser la ecuación diferencial de segundo orden, debe tener dos constantes arbitrarias, las que $x(t)$ efectivamente tiene (las de la función $x_h(t)$).

En general, la solución $x(t)$ tiene un comportamiento complejo. Sin embargo, para tiempos grandes ($t \rightarrow \infty$) la solución $x_h(t)$ siempre desaparece, quedando sólo la solución particular $x_p(t)$. Observe que $x_p(t)$ es independiente de las condiciones iniciales. Todas las soluciones del problema, para $t \rightarrow \infty$, terminarán siendo idénticas. Cuando esto ocurre, se dice que se ha llegado al *estado estacionario*. Las oscilaciones iniciales del oscilador, que son altamente irregulares, y que si dependen de las condiciones iniciales, se llama es *transiente*. Para muchos problemas prácticos la solución que interesa es la del estado estacionario.

En lo que sigue encontraremos la solución $x_p(t)$ que es la correspondiente al estado estacionario. Por ser algebraicamente mucho más simple, usaremos extensivamente las funciones exponenciales complejas. La fuerza externa la reemplazaremos por la expresión

$$\bar{F}_e = F_0 e^{i\Omega t} .$$

En otras palabras, en lo que sigue encontraremos la solución estacionaria de la ecuación diferencial

$$\ddot{\bar{x}} + 2\eta\dot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} . \quad (13.18)$$

Observe que la parte real de \bar{F}_e corresponde a la fuerza externa $F_e = F_0 \cos(\Omega t)$, luego, al tomar la parte real de esta ecuación diferencial, obtenemos la ecuación (13.17); y a su vez, la parte real de $\bar{x}(t)$ corresponderá a la solución estacionaria de (13.17). Hagamos el siguiente Ansatz:

$$\bar{x}(t) = A e^{i\Omega t} ,$$

o sea, analicemos si (13.18) puede tener una solución de este tipo. Aquí A es una constante que eventualmente habría que determinar. Derivamos $\bar{x}(t)$ respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{x}}(t) = i\Omega A e^{i\Omega t}$$

y

$$\ddot{\bar{x}}(t) = -\Omega^2 A e^{i\Omega t} .$$

Sustituyendo esto en (13.18) se obtiene

$$\begin{aligned} -\Omega^2 A e^{i\Omega t} + 2\eta i\Omega A e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} &= \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} , \\ -\Omega^2 A + 2\eta i\Omega A + \omega_0^2 A &= \frac{F_0}{m} , \end{aligned}$$

o sea, nuestro Ansatz es una solución sólo si

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\eta\Omega} .$$

Observe que A es un número complejo.

Cualquier número complejo A se puede escribir de la forma

$$A = A_R + iA_I = |A| e^{i\phi} = |A| \cos \phi + i|A| \sin \phi ,$$

donde $|A|$ es el módulo y ϕ la *fase* del número complejo. Conociendo la parte real e imaginaria de A se pueden encontrar el módulo y la fase usando las relaciones

$$|A| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2}$$

y

$$\tan \phi = \frac{A_I}{A_R} .$$

Usando las expresiones anteriores para el número complejo A se encuentra que éste puede escribirse de la forma

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \exp \left[i \arctan \left(\frac{2\Omega\eta}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right) \right] .$$

Hemos encontrado una solución particular de (13.18):

$$\bar{x}(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \exp \left[i\Omega t + i \arctan \left(\frac{2\Omega\eta}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right) \right].$$

La solución estacionaria de (13.17) es la parte real de $\bar{x}(t)$, o sea,

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \cos \left[\Omega t + \arctan \left(\frac{2\Omega\eta}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right) \right] = |A| \cos(\Omega t + \phi),$$

con

$$|A| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}}$$

y

$$\tan \phi = \frac{2\Omega\eta}{\Omega^2 - \omega_0^2}.$$

Observe que la solución estacionaria, o sea, después de que el transiente ha desaparecido, oscila con la *misma* frecuencia con que la fuerza externa está forzando el sistema. Observe, sin embargo, que las dos oscilaciones (la de la fuerza externa y la de la respuesta del sistema) no van en fase, sino que están desfasados en ϕ . La amplitud con que oscila el sistema en el estado estacionario viene dada por $|A|$.

Resonancias

Analicemos con más detalle la amplitud con que oscila un oscilador armónico forzado en su estado estacionario. La figura 13.53(a) muestra la amplitud $|A|$ en función de la frecuencia Ω con que se está forzando el oscilador. Las distintas curvas corresponden a distintos parámetros del coeficiente de roce $\xi \equiv 2\eta/\omega_0$. cuando el roce es pequeño, la amplitud llega a ser muy grande cuando la frecuencia Ω con que se fuerza el oscilador es parecida a la frecuencia natural del oscilador ω_0 . Estas grandes respuestas de un sistema de estímulos pequeños se conoce con el nombre de *resonancias*.

Para η pequeño, la amplitud máxima de la resonancia viene dada por

$$|A|_{\max} = \frac{F_0}{2m\eta\omega_0}.$$

La fricción η , aun cuando es pequeña, no puede despreciarse. De lo contrario se obtienen resultados absurdos; la amplitud del oscilador se iría incrementando indefinidamente.

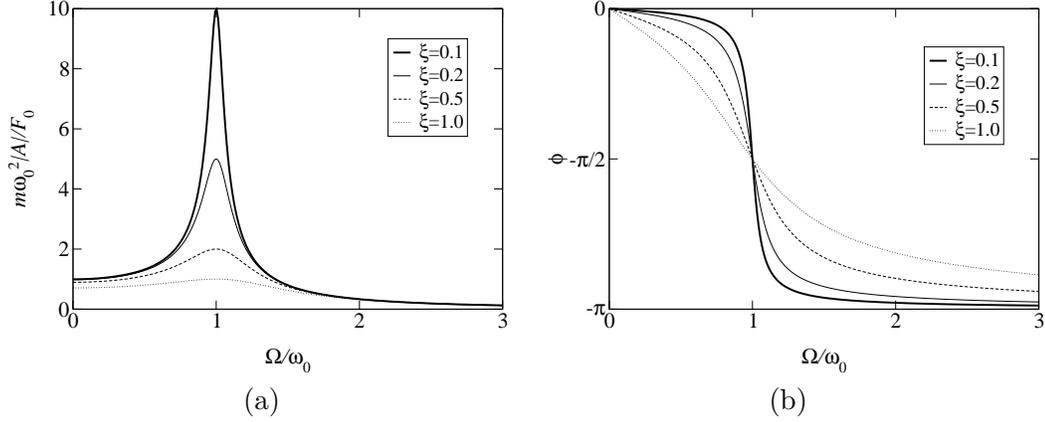


Figura 13.53

La figura 13.53(b) muestra el comportamiento de la fase ϕ . Observemos que si la frecuencia Ω con que se fuerza el sistema es mucho menor que la frecuencia natural del sistema ω_0 , entonces el estímulo y la respuesta del sistema esencialmente estarán en fase; cuando $\Omega \gg \omega_0$, las dos magnitudes estarán completamente desfasadas. Cuando el sistema entra en resonancia $\omega_0 \simeq \Omega$, el desfase entre el estímulo y la respuesta del sistema es de 90° .

13.5. Osciladores armónicos acoplados

Considere la configuración mostrada en la figura 13.54. Las masas están restringidas a moverse a lo largo del eje \hat{x} . Analicemos la forma en la cual oscila este sistema.

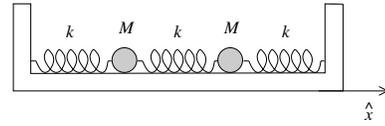


Figura 13.54

Sean x_1 y x_2 los desplazamientos de las dos masas respecto a sus posiciones de equilibrio. Las ecuaciones de movimiento para estas masas son:

$$M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \tag{13.19}$$

y

$$M\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) . \tag{13.20}$$

(Note que $(x_2 - x_1)$ es el alargamiento neto del resorte central respecto al largo que tiene cuando el sistema está en equilibrio.) Las ecuaciones (13.19) y (13.20) son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas (la segunda derivada de x_1

depende no sólo de x_1 , sino que también de x_2 , y lo mismo ocurre para la segunda derivada de x_2). Sumando y restando las dos ecuaciones diferenciales obtenemos

$$M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

y

$$M(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1) .$$

Definamos dos nuevas variables ξ_1 y ξ_2 por

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1 + x_2 , \\ \xi_2 &= x_2 - x_1 .\end{aligned}$$

Con estas definiciones las dos últimas ecuaciones diferenciales se pueden escribir de la forma

$$M\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1$$

y

$$M\ddot{\xi}_2 = -3k\xi_2 .$$

Observe que estas ecuaciones ya no están acopladas y que cada una de ellas corresponde a la de un oscilador armónico simple. Las soluciones generales vienen dadas por

$$\xi_1(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \operatorname{sen}(\omega_1 t)$$

y

$$\xi_2(t) = C \cos(\omega_2 t) + D \operatorname{sen}(\omega_2 t) ,$$

con

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k}{M}}$$

y

$$\omega_2 \equiv \sqrt{\frac{3k}{M}} = \sqrt{3}\omega_1 .$$

Conociendo ξ_1 y ξ_2 en función del tiempo también conocemos el comportamiento de x_1 y x_2 :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(\xi_1(t) + \xi_2(t)) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2} \operatorname{sen}(\omega_1 t) + \frac{C}{2} \cos(\omega_2 t) + \frac{D}{2} \operatorname{sen}(\omega_2 t)$$

y

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(\xi_1(t) - \xi_2(t)) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2} \operatorname{sen}(\omega_1 t) - \frac{C}{2} \cos(\omega_2 t) - \frac{D}{2} \operatorname{sen}(\omega_2 t) .$$

Esta solución general tiene cuatro constantes arbitrarias (A , B , C y D), las que se determinan exigiendo que la solución cumpla con las cuatro condiciones iniciales (la posición y velocidad de cada una de las masas). Por ejemplo, si en $t = 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$ y $\dot{x}_2 = 0$, entonces las constantes resultan ser $A = C = 0$, $B = v_0/\omega_1$ y $D = -v_0/\omega_2$.

Debido a que la razón entre las frecuencias ω_1 y ω_2 no es un número racional, el sistema, en general, no manifestará un comportamiento periódico.

Modos normales

Si en el problema anterior hacemos oscilar el sistema de manera que $C = D = 0$, entonces la posición de ambas masas vendrá dada por

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2} \operatorname{sen}(\omega_1 t) .$$

Observe que en ese caso ambas masas oscilan juntas (en fase) y que el movimiento de cada una de ellas es armónico (con período $T_1 = 2\pi/\omega_1$).

Algo parecido ocurre cuando el sistema oscila de manera que $A = B = 0$. En este caso

$$x_1(t) = -x_2(t) = \frac{C}{2} \cos(\omega_2 t) + \frac{D}{2} \operatorname{sen}(\omega_2 t) .$$

Nuevamente ambas masas oscilan juntas, pero en sentido opuestos (en contrafase) y el movimiento de cada una de ellas es armónico (con período $T_2 = 2\pi/\omega_2$). Estos modos de oscilación armónicos del sistema se conocen con el nombre de *modos normales*.

Un concepto útil en la discusión de sistemas más complejos es el de *grados de libertad*. Los grados de libertad de un sistema son el número de variables que se requieren para describir el sistema. Por ejemplo: una masa m restringida a moverse a lo largo de una recta tiene un grado de libertad. La misma partícula, si su movimiento está confinado a un plano, tendrá dos grados de libertad. Un sistema consistente de tres partículas que pueden moverse en un plano, tiene 6 grados de libertad. Dos partículas en el espacio tridimensional unidas por una barra rígida poseen 5 grados de libertad.

A continuación resumiremos, sin demostración, algunas características generales que presentan todos los sistemas consistentes de osciladores armónicos acoplados.

- I) Un sistema de osciladores armónicos acoplados de N grados de libertad se describe con N funciones $\{x_j(t)\}$. Las ecuaciones dinámicas son ecuaciones diferenciales de segundo orden y generalmente están acopladas.
- II) Siempre es posible introducir nuevas variables $\{\xi_j(t)\}$ cuyas ecuaciones diferenciales son de la forma

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = 0 ,$$

o sea, corresponden a osciladores armónicos simples. Las variables $\xi_j(t)$ son combinaciones lineales de las variables $\{x_j(t)\}$. Los métodos generales para encontrar estas nuevas variables serán materia de cursos más avanzados. Sin embargo, en muchas situaciones simples no es difícil encontrarlos por simple inspección.

- III) Algunas de las frecuencias ω_j pueden ser nulas, en cuyo caso la ecuación diferencial es simplemente $\ddot{\xi}_j = 0$. Los modos normales de frecuencia nula corresponden a la traslación o rotación del sistema como un todo.
- IV) Cada una de estas nuevas variables da origen a un modo normal. Un sistema con N grados de libertad tiene N modos normales (algunos de ellos pueden tener frecuencia nula).
- V) La solución de las ecuaciones diferenciales para las variables $\xi_j(t)$ son inmediatas. En total se tendrán $2N$ constantes arbitrarias.
- VI) Siempre es posible despejar $x_j(t)$ en función de las funciones $\{\xi_j(t)\}$ (en el lenguaje técnico, el movimiento del sistema, en general, es una suma –superposición– de los distintos modos normales). De esta manera se encuentra la solución general del problema. Las constantes arbitrarias se determinan exigiendo que la solución cumpla con las condiciones iniciales. Hay $2N$ condiciones iniciales: $x_j(0)$ y $\dot{x}_j(0)$ para los $j = 1, 2, \dots, N$ grados de libertad.
- VII) Cuando sólo se excita un único modo normal, todas las partículas se moverán armónicamente y con la misma frecuencia. Cuando se excitan dos o más modos normales es forma simultánea, las partículas no se moverán armónicamente y el movimiento, en general, ni siquiera será periódico.
- VIII) Frecuentemente, en sistemas no demasiado complejos, es posible no sólo identificar algunos o todos los modos normales, sino que también encontrar las frecuencias respectivas por simple inspección del problema.

Ejemplo:

Consideremos la configuración mostrada en la figura 13.55. Las tres masas sólo pueden moverse a lo largo del anillo de radio R . Los resortes, todos con constante de restitución k , también siempre se deforman a lo largo de la circunferencia. Encontraremos todos los modos normales con sus frecuencias.

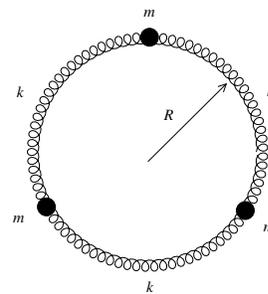


Figura 13.55

El sistema tiene tres grados de libertad y, por lo tanto, existirán tres modos

normales. Uno de ellos tiene frecuencia cero y corresponde a una rotación (rígida) uniforme de las tres masas a lo largo del anillo.

Es evidente que otro modo normal de oscilación del sistema es el mostrado en la figura 13.56: una de las tres partículas queda quieta y las otras dos se mueven en sentidos opuestos.

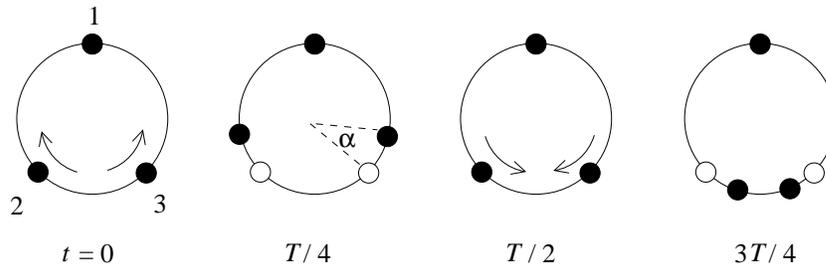


Figura 13.56

No es difícil encontrar la frecuencia angular de este modo. De los resortes que unen las partículas que se mueven, uno se acorta en una magnitud $a = \alpha R$ y el otro se alarga en $2a$; la fuerza neta sobre la partícula es, por lo tanto, $3ka$. Para la frecuencia de este modo de vibración se obtiene $\omega = \sqrt{3k/m}$.

Otro modo normal se encuentra si la partícula 2 se mantiene quieta y las partículas 1 y 3 oscilan moviéndose en direcciones opuestas (ver figura 13.57). Por supuesto que este modo de oscilación tiene la misma frecuencia que el modo anterior (en el lenguaje técnico se dice que los dos modos son *degenerados*).

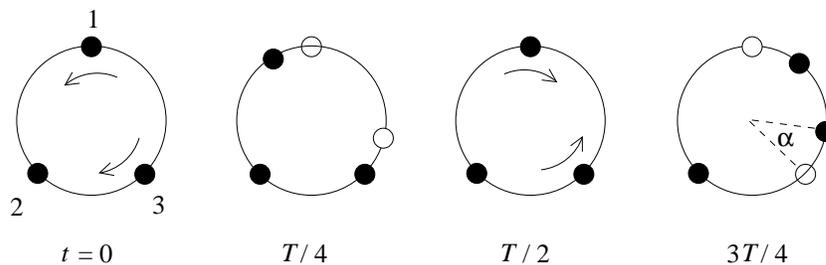


Figura 13.57

Pareciera que existe un cuarto modo, en que la partícula 3 se mantiene quieta y las partículas 1 y 2 oscilan, moviéndose en direcciones opuestas (ver figura 13.58). Efectivamente este también es un modo normal, pero no es uno distinto; en efecto, la superposición de los modos mostrados en las figuras 13.56 y 13.57 generan el modo mostrado en la figura 13.58. En el lenguaje técnico se dice que el modo de la figura 13.58 no es un modo independiente sino que es una combinación lineal de los modos normales mostrados en las figuras 13.56 y 13.57.

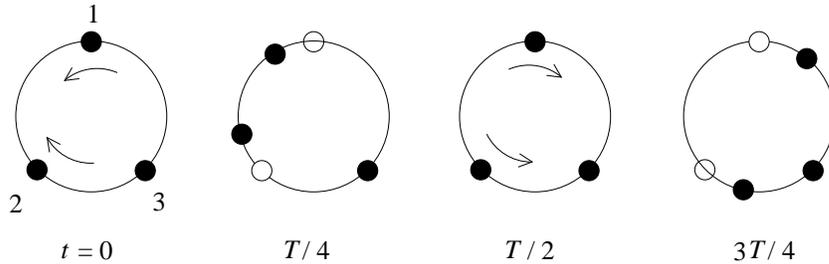


Figura 13.58

13.6. * Modos normales de una cuerda

Consideremos una cuerda de largo L , sin masa, bajo la tensión τ , que al centro tiene adosada una masa m y analicemos el movimiento transversal de la masa en ausencia de gravedad. Sea $u(t)$ el desplazamiento transversal de la masa en función del tiempo. En todo momento supondremos que el ángulo de la cuerdo con la horizontal es pequeño, es decir, que

$$\frac{u(t)}{L/2} = \tan \alpha \simeq \alpha .$$

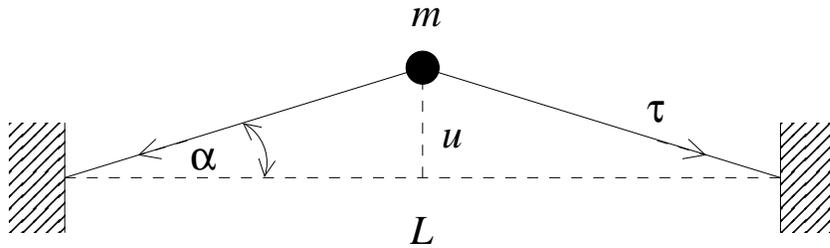


Figura 13.59

Además supondremos que la tensión τ no varía debido a la pequeña elongación que sufre la cuerda cuando está deformada. La fuerza transversal neta sobre la masa m debida a la tensión de la cuerda es

$$F = -2\tau \sin \alpha \simeq -2\tau \alpha \simeq -2\tau \frac{u}{L/2} = \frac{4\tau}{L} u .$$

La segunda ley de Newton nos da la relación

$$m\ddot{u} = -\frac{4\tau}{L} u ,$$

o sea,

$$\ddot{u} + \omega_1^2 u = 0 ,$$

con

$$\omega_1^2 = \frac{4\tau}{Lm} . \quad (13.21)$$

Concluimos que la masa m oscilará armónicamente con frecuencia ω_1 .

Consideremos ahora dos masas m adosadas a la cuerda en forma equiespaciada. Este sistema ahora tiene dos grados de libertad y, por lo tanto, tendrá dos modos normales de oscilación: uno en que las dos partículas oscilan en fase y otro en que oscilan en contrafase (ver figura 13.60).

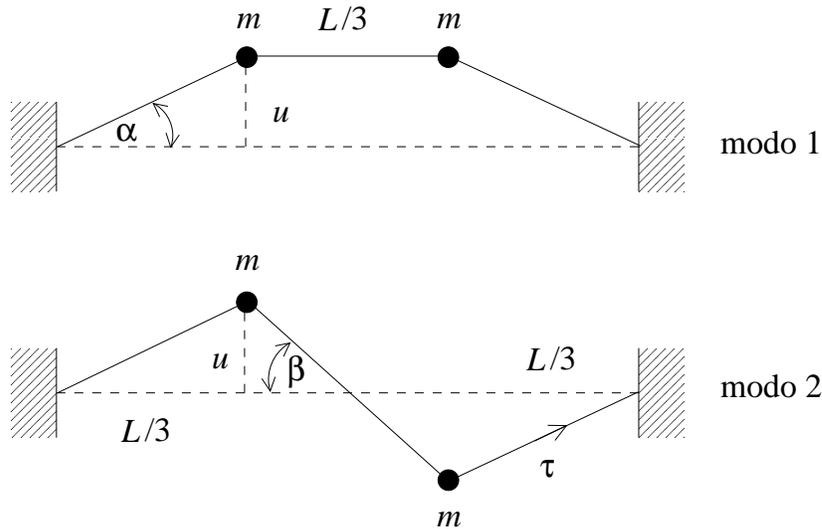


Figura 13.60

En el modo 1, la fuerza transversal que actúa sobre cada masa es

$$F = -\tau \operatorname{sen} \alpha = -\tau \alpha = \tau \frac{u}{L/3} = -\frac{3\tau}{L} u .$$

El desplazamiento de cada masa satisfecerá la ecuación de movimiento (segunda ley de Newton)

$$m\ddot{u} = -\frac{3\tau}{L} u ,$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular

$$\omega_1^2 = \frac{3\tau}{Lm} . \quad (13.22)$$

En el modo 2, la fuerza transversal que actúa sobre cada masa es

$$F = -\tau \operatorname{sen} \alpha - \tau \operatorname{sen} \beta = -\tau \alpha - \tau \beta = -\tau \frac{u}{L/3} - \tau \frac{2u}{L/3} = -\frac{9\tau}{L} u .$$

La ecuación de movimiento de cada masa (segunda ley de Newton) en este caso es

$$m\ddot{u} = -\frac{9\tau}{L} u .$$

Nuevamente es la ecuación de un oscilador armónico, pero ahora con la frecuencia angular

$$\omega_2^2 = \frac{9\tau}{Lm} . \tag{13.23}$$

Generalicemos los resultados anteriores y consideremos N masas m adosadas en forma equiespaciada a la cuerda. Definamos el eje \hat{x} a lo largo de la cuerda cuando está en su posición de equilibrio y elijamos el cero coincidiendo con el extremo izquierdo de la cuerda (el otro extremo de la cuerda estará en $x = L$). La posición longitudinal de la masa j será

$$x_j = j \frac{L}{N+1} . \tag{13.24}$$

El sistema tiene N grados de libertad y por lo tanto existirán N modos normales. En lo que sigue encontraremos los N modos normales con sus frecuencias respectivas. Para ello introduzcamos las N funciones

$$y_\nu(x, t) = u(t) \operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi}{L} x \right) , \tag{13.25}$$

con $\nu = 1, 2, 3, \dots, N$.

Consideremos un ν particular (por ejemplo $\nu = 3$) y desplacemos las N partículas transversalmente en una distancia $u_j(t) = y_\nu(x_j, t)$. La figura 13.61 muestra esquemáticamente la situación que se tiene en este caso.

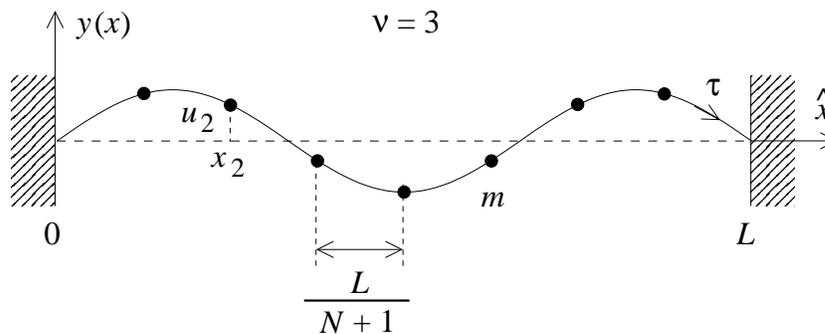


Figura 13.61

Encontraremos la ecuación de movimiento de la partícula j . Los ángulos que la cuerda al lado izquierdo y derecho de la partícula j forman con la horizontal son

$$\alpha \simeq \frac{u_j - u_{j-1}}{L/(N+1)}$$

y

$$\beta \simeq \frac{u_{j+1} - u_j}{L/(N+1)},$$

respectivamente (ver figura 13.62).

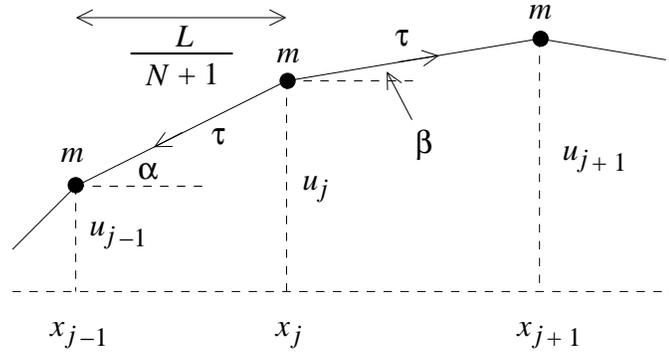


Figura 13.62

La fuerza transversal neta que actúa sobre la partícula j es

$$F = -\tau \operatorname{sen} \alpha + \tau \operatorname{sen} \beta \simeq -\tau(\alpha - \beta) \simeq \tau(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) \frac{N+1}{L}.$$

La ecuación de movimiento para la partícula j es, por lo tanto,

$$m\ddot{u}_j = -\frac{\tau(N+1)}{L} (2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}).$$

Pero $u_j(t) = y_\nu(x_j, t)$, luego

$$\ddot{u}_j = \ddot{u}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi}{L} x_j \right) = \ddot{u}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi j}{N+1} \right),$$

$$\begin{aligned} u_{j+1} + u_{j-1} &= u(t) \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi(j+1)}{N+1} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi(j-1)}{N+1} \right) \right] \\ &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi j}{N+1} \right) \cos \left(\frac{\nu\pi}{N+1} \right) \end{aligned}$$

y

$$2u_j - u_{j+1} - u_{j-1} = 2u(t) \left(1 - \cos \left(\frac{\nu\pi}{N+1} \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\nu\pi j}{N+1} \right) .$$

Con estas relaciones la ecuación de movimiento para la partícula j queda

$$m\ddot{u} = -\frac{2\tau(N+1)}{L} \left(1 - \cos \left(\frac{\nu\pi}{N+1} \right) \right) u ,$$

o sea,

$$\ddot{u} + \omega_\nu^2 u = 0$$

con

$$\omega_\nu^2 = \frac{2\tau(N+1)}{mL} \left(1 - \cos \left(\frac{\nu\pi}{N+1} \right) \right) . \quad (13.26)$$

Observe que ésta resulta ser la de un oscilador armónico y que es independiente de j , o sea, todas las masas oscilarán armónicamente con la misma frecuencia. En otras palabras, el movimiento será el de un modo normal de vibración del sistema. Haciendo variar ν se obtienen los distintos modos de vibración.

Ejercicio: Demuestre que la ecuación (13.26), para $N = 1$ (y $\nu = 1$) coincide con (13.21) y que para $N = 2$ (con $\nu = 1$ y 2) coincide con (13.22) y (13.23), respectivamente.

Ejercicio: Demuestre que para enteros $\nu > N$ no se obtienen nuevos modos de oscilación.

A continuación estudiaremos el caso de una cuerda de largo L , pero con una densidad lineal de masa uniforme μ . La masa de tal cuerda es $L\mu$.

Para obtener la cuerda con masa tomaremos el límite $N \rightarrow \infty$ y $m \rightarrow 0$ de manera que la masa total de la cuerda sea $L\mu$, o sea,

$$L \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad m \rightarrow 0 \quad \text{tal que} \quad Nm = L\mu$$

En este límite, para las frecuencias ω_ν , se tiene

$$\omega_\nu^2 = \frac{2\tau N^2}{L(Nm)} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2 \pi^2}{N^2} \right) \right) = \frac{\tau \nu^2 \pi^2}{\mu L^2} ,$$

o sea,

$$\omega_\nu = \nu \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

Esta última ecuación da las frecuencia de los modos normales de una cuerda de largo L , densidad lineal μ y bajo tensión τ . Hay infinitos modos normales, todos ellos múltiplos enteros de una frecuencia fundamental

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

13.7. Problemas

- La aceleración de la gravedad varía con la posición sobre la Tierra debido a su rotación y a que el globo terráqueo no es exactamente esférico. Esto fue descubierto por primera vez en el siglo XVII, cuando se observó que un reloj pendular, cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, perdía alrededor de 90 s por día cerca del Ecuador.

- Demuestre que una pequeña variación de g produce una pequeña modificación del período del péndulo T dada por

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}.$$

- ¿Cuánto deberá variar g para lograr explicar la diferencia del período de un péndulo entre París y el Ecuador?
- Una masa de 2 kg se sujeta a un resorte de constante de fuerza $k = 10$ N/m que descansa sobre una superficie horizontal lisa. Otra masa de 1 kg se desliza a lo largo de la superficie hacia la primera a 6 m/s.

- Hallar la amplitud de la oscilación si las masas realizan un choque perfectamente inelástico y ambas quedan adosadas al resorte. ¿Cuál es el período de oscilación?
- Hallar la amplitud y período de la oscilación si el choque es perfectamente elástico.
- En cada caso encuentre una expresión para la posición x de la masa sujeta al resorte en función del tiempo, admitiendo que el choque se produce en el instante $t = 0$.

- Un resorte de constante de fuerza $k = 100$ N/m cuelga verticalmente de un soporte. En su extremo inferior (que se encuentra a una distancia l_0 del techo) se engancha una masa de 0.5 kg, que luego (en el instante $t = 0$) se suelta, desde el reposo. La masa comenzará a oscilar en torno a un nuevo punto de equilibrio x_0 .

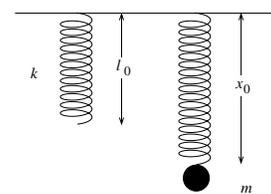


Figura 13.63

- Encuentre el nuevo punto de equilibrio x_0 .
- ¿Con qué período oscilará la masa m alrededor de x_0 ?
- Encuentre la energía cinética y el potencial en función del tiempo. (Especifique claramente los orígenes usados para especificar las energías potenciales.)
- Encuentre la velocidad máxima que llegará a tener la masa m mientras oscila.

4. En una cuenca esférica de radio r se desliza una masa m_1 una pequeña distancia s_1 , siendo $s_1 \ll r$. Una segunda masa m_2 se desplaza en sentido opuesto hasta una distancia $s_2 = 3s_1$ (también $s_2 \ll r$).

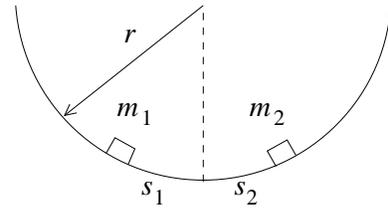


Figura 13.64

- a) Si las masas se dejan libres en el mismo instante y resbalan sin roce, ¿en dónde se encontrarán?
- b) Si la colisión es elástica, ¿cuándo volverán las masas nuevamente a estar en reposo y en qué lugar?

5. Un bloque de madera se desliza sobre una superficie horizontal lisa. El bloque está sujeto a un resorte que oscila con período de 0.3 s. Un segundo bloque descansa en su parte superior. El coeficiente de roce estático entre los dos bloques es $\mu = 0.25$.

- a) Si la amplitud de oscilación es 1 cm, ¿se deslizará el bloque situado encima?
- b) ¿Cuál es la mayor amplitud de oscilación para la cual no se deslizará el bloque de encima?

6. Una variable $x(t)$ se comporta armónicamente. Si en $t = 0$, la posición, la velocidad y aceleración vienen dadas por $x(0) = 1$ cm, $v(0) = 2$ cm/s y $a(0) = -4$ cm/s², respectivamente. Encuentre la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ para $t = 6$ s.

7. La figura 13.65 muestra un tubo de sección constante A y forma de U, abierto a la atmósfera. El tubo está lleno hasta el nivel indicado por una línea a trazos con un líquido incompresible que fluye a través del tubo con un rozamiento despreciable. La longitud total de la columna de líquido es L . Demuestre que si se hace descender la superficie del líquido en uno de los brazos de la U y luego se deja libre, el nivel del fluido oscilará armónicamente alrededor de su posición de equilibrio con un período dado por $T = 2\pi\sqrt{L/2g}$.

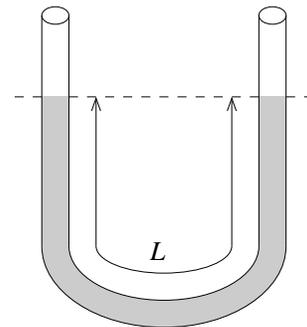


Figura 13.65

8. Encuentre (aproximadamente) el menor valor de la frecuencia angular que podría tener un oscilador armónico $x(t)$, si lo que se conoce es que $x(0) = 0$, $v(1 \text{ s}) = 2$ cm/s y $a(2 \text{ s}) = 4$ cm/s².

9. Suponga que una variable $x(t)$ varía armónicamente con una frecuencia angular $\omega_0 = 2 \text{ s}^{-1}$.
- Encuentre la posición x y la velocidad v en el instante $t = 3 \text{ s}$ si $x(0) = 1 \text{ cm}$ y $x(1 \text{ s}) = 1 \text{ cm}$.
 - Repita lo mismo pero con las condiciones de borde $x(1 \text{ s}) = 1 \text{ cm}$ y $v(1 \text{ s}) = 4 \text{ cm/s}$.
 - Repita lo mismo pero ahora con las condiciones de borde $x(0) = 2 \text{ cm}$ y $v(2 \text{ s}) = -4 \text{ cm/s}$.
10. Se cuelga una masa M de un resorte y se pone en movimiento oscilatorio vertical, con una amplitud de 7 cm . La frecuencia de las oscilaciones es de 4 Hz . Al llegar M a la posición más baja, se le coloca encima una pequeña piedrecita. Supongamos que la masa de la piedrecita es tan pequeña que no tiene mayor efecto sobre la oscilación.
- ¿A qué distancia por encima de la posición de equilibrio perderá contacto la piedrecita con la masa M ?
 - ¿Cuál es la velocidad de la piedrecita cuando se separa de la masa M ?

11. Un péndulo simple de 50 cm de largo cuelga del techo de un vagón que se acelera con una aceleración $a = 7 \text{ m/s}^2$ en dirección horizontal. Encuentre el período del péndulo para pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio.

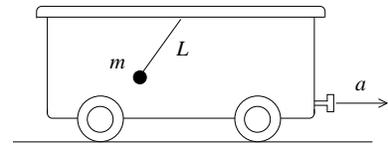


Figura 13.66

12. Considere una variable $x(t)$ que satisface la ecuación de un oscilador armónico atenuado. Suponga que $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ y que se tienen las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 2 \text{ cm}$, $v(0) = 0 \text{ cm/s}$.
- Encuentre la solución si $\eta = 2.2\omega_0$. Grafique la solución en el intervalo $0 < t < 20 \text{ s}$.
 - Repita lo mismo de la parte (a), pero con $\eta = \omega_0$.
 - Repita lo anterior, pero ahora con $\lambda = 0.5\omega_0$.
 - Repita lo de las partes (a), (b) y (c), con las condiciones iniciales $x(0) = 0 \text{ cm}$ y $v(0) = 50 \text{ cm/s}$.

13. Considere dos péndulos idénticos acoplados. Las ecuaciones de movimiento en ese caso vienen dadas por:

$$m\ell\ddot{\theta}_1 = -mg\theta_1 - \lambda(\theta_1 - \theta_2)$$

$$m\ell\ddot{\theta}_2 = -mg\theta_2 - \lambda(\theta_1 - \theta_2)$$

La constante λ acopla los dos osciladores armónicos. Si $\lambda = 0$ (o sea, si el acoplamiento se hace cero) cada péndulo oscila independientemente del otro.

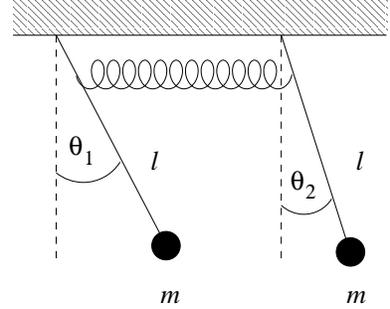


Figura 13.67

- a) Introduzca las nuevas variables

$$\eta_1(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$$

$$\eta_2(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$$

y demuestre que éstas varían armónicamente con las frecuencias

$$\omega_0 = \sqrt{g/\ell} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Gamma},$$

respectivamente, donde $\Gamma = 2\lambda/(m\ell)$.

- b) Demuestre que la solución general se puede escribir de la forma

$$\theta_1(t) = \frac{1}{2}[A \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \cos(\omega_1 t + \beta)]$$

$$\theta_2(t) = \frac{1}{2}[A \cos(\omega_0 t + \alpha) - B \cos(\omega_1 t + \beta)]$$

Las constantes A , B , α y β se determinan con las condiciones de borde.

- c) Sea $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ y $\Gamma = 0.1 \text{ s}^{-2}$. Encuentre la solución para el caso en que $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. Grafique $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.
- d) Repita lo anterior, pero para el caso en que $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$.
- e) Repita lo anterior, pero para el caso en que $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$.
- f) Para el caso (c) el movimiento de cada péndulo consiste en un movimiento oscilatorio cuya amplitud también varía periódicamente. Sea Ω la frecuencia angular de la variación periódica de la amplitud. Encuentre Ω .

14. *Péndulo físico:* Considere un objeto de masa M , que puede oscilar alrededor de un eje que lo atraviesa. Sea I el momento de inercia para rotaciones alrededor de ese eje y ℓ la distancia entre el eje y el centro de masas del objeto. Encuentre el período T para pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. Demuestre que un péndulo simple equivalente, es decir, uno que tenga el mismo período, tiene un largo

$$\ell_0 = \frac{I}{m\ell} .$$

15. Considere la configuración mostrada en la figura 13.68. Las cuatro masas sólo pueden moverse a lo largo del anillo de radio R . (Los resortes también siempre se deforman a lo largo de la circunferencia.) Encuentre la frecuencia de los modos normales de oscilación.

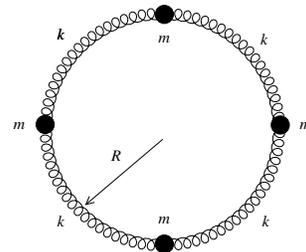


Figura 13.68

16. Considere una masa m resbalando sin roce (en presencia de la aceleración de gravedad $-g\hat{y}$) a lo largo de un perfil de la forma

$$y(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 ,$$

con $\alpha = 1 \text{ m}^{-2}$ y $\beta = 3/2 \text{ m}^{-1}$. Grafique $y(x)$. Si la masa realiza pequeñas oscilaciones en torno al mínimo local, encuentre el período T de tal movimiento.

17. Una masa de 2 kg oscila colgada de un resorte de constante de restitución $k = 400 \text{ N/m}$. La constante de amortiguamiento es $\eta = 1 \text{ s}^{-1}$. El sistema es forzado por una fuerza sinusoidal de amplitud $F_0 = 10 \text{ N}$ y frecuencia angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

- a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones en el régimen estacionario?
- b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia?
- c) Encuentre la amplitud de las vibraciones en la resonancia.

18. Considere una masa $m = 50 \text{ g}$ que oscila sujeta a un resorte de constante de restitución k . Suponga que hay algún dispositivo que atenúa las oscilaciones con una fuerza que es proporcional a la velocidad (o sea, estamos en presencia de un oscilador armónico atenuado). Con un cronómetro se mide el “período de oscilación”; éste resulta ser igual a 2.1 s.

- a) ¿Cuánto valen ω_0 y λ ?
- b) ¿En cuánto disminuirá la amplitud máxima de oscilación entre dos ciclos consecutivos?

19. Una masa $m = 1$ kg cuelga de un resorte de constante de restitución $k = 200$ N/m. La constante de amortiguamiento es $\eta = 1$ s⁻¹. En el instante $t = 0$ comienza a actuar sobre la masa una fuerza $F = F_0 \sin(\omega t)$, con $F_0 = 2$ N y $\omega = 10$ s⁻¹.
- Si $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$, encuentre $x(t)$ para $t = 1$ s, $t = 100$ s y $t = 1000$ s.
 - Encuentre la energía disipada en un ciclo cuando el oscilador se encuentra en el régimen estacionario.
20. Una masa m descansa sobre una mesa horizontal lisa (sin roce). El movimiento de la masa está restringido a desplazamientos a lo largo del eje \hat{x} . Sobre la masa actúa una fuerza $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\omega t) \hat{x}$.
- Encuentre la aceleración $a(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la masa, si en el instante $t = 0$ se encontraba detenida.
 - Encuentre la posición $x(t)$ si además se sabe que $x(0) = 0$. Demuestre que el movimiento es armónico con una amplitud $A = F_0/(m\omega^2)$.
 - La masa ahora se sujeta adicionalmente a un resorte de constante de restitución k . (La orientación del resorte también es a lo largo del eje \hat{x}). Compare el movimiento que tiene ahora con el que tenía cuando no estaba unida al resorte.

21. (Péndulo de torsión)

Suponga que un extremo de un alambre metálico está firmemente adosado del cielo de una pieza y del otro cuelgan dos esferas sólidas tal como se muestran en la figura adjunta. Al girar las esferas con el alambre en un ángulo θ (alrededor del eje formado por el alambre), el alambre ejercerá un torque τ que hará que las esferas retornen a la posición de equilibrio. El torque que ejerce el alambre es

$$\vec{\tau} = -\eta \vec{\theta}$$

donde τ es una constante (que depende del largo, diámetro y material de que está hecho el alambre).

Para este problema suponga que $\eta = 1250$ g cm²/s². Si las esferas son de aluminio ($\rho_{Al} = 2,7$ g/cm³), ¿qué diámetro deben tener las esferas para que el

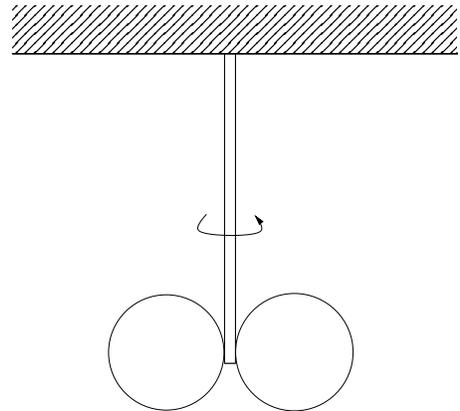


Figura 13.21

período sea exactamente de un segundo? (El momento de inercia de una esfera sólida de masa M y radio R para una rotación alrededor de un eje que pasa por su centro es $I = 2mR^2/5$).

22. Una masa de $m = 0.5$ kg, después de caer una distancia $h = 5$ m, se adosa a un resorte (largo) de constante $k = 2$ kg/s². El sistema resultante viene gobernado por la ecuación de movimiento

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) + 2\omega_0 \dot{z}(t) = 0$$

o sea, corresponde a un oscilador armónico amortiguado crítico. La magnitud $z(t)$ mide la posición de la masa m respecto al punto de equilibrio y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema.

La solución general está dada por la relación

$$z(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

donde A y B son constantes que se ajustan con las condiciones iniciales.

(Para los cálculos numéricos que siguen, use para la aceleración de gravedad el valor $g = 10$ m/s²)

- a) Determine A y B usando las condiciones iniciales.
- b) Sea t_0 el instante en que el resorte tiene su máxima compresión. Evalúe t_0 . (Elija el cero del tiempo en el instante en que la masa colisiona con el resorte).
- c) Haga un gráfico esquemático de la función $z(t)$.
- d) ¿Cuál será la energía total disipada por el amortiguador?

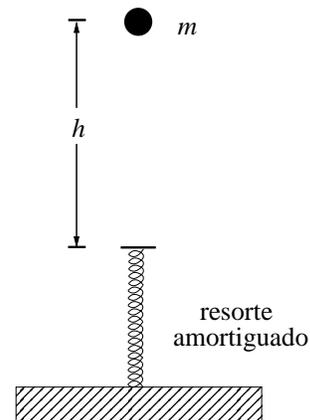


Figura 13.22

23. Considere dos cilindros que giran rápidamente en sentidos contrarios tal como se muestra en la figura adjunta. Sobre estos cilindros se coloca un tablón de masa M y densidad uniforme. Sea d la distancia entre los dos cilindros y sea μ el coeficiente de roce cinemático entre el tablón y los cilindros. Demuestre que el movimiento del tablón es armónico. Encuentre el período del movimiento.

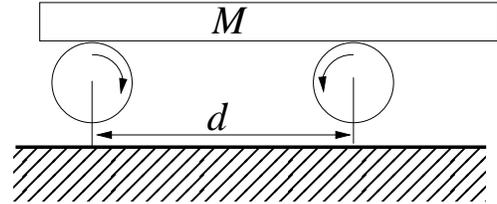


Figura 13.23

24. Considere dos masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de largo natural ℓ_0 y constante de restitución k . Supongamos que el movimiento de ambas masas está restringido a lo largo de la recta que los une. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las posiciones de las masas m_1 y m_2 , respectivamente.

- a) Demuestre que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0] \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0] \end{aligned}$$

- b) Definamos las variables $\eta_0(t)$ y $\eta_1(t)$ por

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2} \\ \eta_1(t) &= x_2(t) - x_1(t) - \ell_0 \end{aligned}$$

Demuestre que las variables $\eta_0(t)$ y $\eta_1(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales (desacopladas)

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_0 &= 0 \\ \ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 &= 0 \end{aligned}$$

con

$$\omega^2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} .$$

- c) Demuestre que la solución más general del problema se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A + Bt - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\ell_0 + C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) \\ x_2(t) &= A + Bt + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\ell_0 + C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

- d) Definamos ω_0 y α por $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y $\alpha = m_2/m_1$. Expresé ω en términos de ω_0 y α . ¿Cuánto vale ω en términos de ω_0 si $\alpha \rightarrow \infty$? ¿Coincide esto con lo que usted intuía? ¿Cuánto vale ω en términos de ω_0 si $\alpha = 1$?
- e) Sea $\ell_0 = 8$ cm y $\omega_0 = 1$ rad/s y $\alpha = 1$ (o sea, $m_1 = m_2$). Encuentre la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 10$ cm y $v_1(0) = v_2(0) = 0$. Grafique $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en un mismo gráfico para el intervalo $0 < t < 15$ s.
- f) Repita lo mismo de la parte (e) pero para las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 8$ cm, y $v_1(0) = 4$ cm/s y $v_2(0) = 0$.
- g) Repita la parte (f) pero con $\alpha = 10$.
- h) Repita la parte (f) pero con $\alpha = 0.1$.

25. Considere tres partículas de masa m que sólo pueden moverse a lo largo del eje \hat{x} y están unidas por resortes de largo natural ℓ_0 y constantes de restitución k (ver figura).

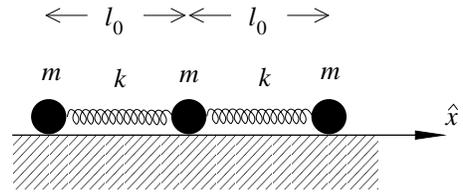


Figura 13.24

Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ las posiciones de las tres masas en función del tiempo.

- a) Demuestre que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - \ell_0) \\ m\ddot{x}_2 &= k(x_3 + x_1 - 2x_2) \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3 + \ell_0) \end{aligned}$$

- b) Intoduzca las nuevas variables definidas por

$$\eta_0 = (x_1 + x_2 + x_3) \quad , \quad \eta_1 = (x_1 - x_3) + \ell_0 \quad \text{y} \quad \eta_2 = (x_1 - 2x_2 + x_3).$$

Demuestre que estas nuevas variables satisfacen las ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\ddot{\eta}_0 = 0 \quad , \quad \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = 0,$$

con $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$. ¡Interprete!

- c) Demuestre que la solución general al problema se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A + Bt + C \cos(\omega_1 t + \delta_1) + D \cos(\omega_2 t + \delta_2) - \ell_0 \\ x_2(t) &= A + Bt - 2D \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ x_3(t) &= A + Bt - C \cos(\omega_1 t + \delta_1) + D \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \ell_0 \end{aligned}$$

Las constantes A , B , C , D , δ_1 y δ_2 se eligen de manera que la solución satisfaga las condiciones de borde. Convénzase de que, en general, las condiciones de borde determinan a las seis constantes.

- d) Suponga que $\ell_0 = 5$ cm y $\omega_1 = 1$ rad/s. Encuentre la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = -8$ cm, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 8$ cm, $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$. Grafique en un mismo gráfico $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en el intervalo $0 < t < 15$ s.
- e) Repita lo mismo que la parte (d), con las condiciones iniciales $x_1(0) = -4$ cm, $x_2(0) = -2$ cm, $x_3(0) = 6$ cm y $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$.
- f) Repita lo mismo que la parte (d), con las condiciones iniciales $x_1(0) = -8$ cm, $x_2(0) = 0$ cm, $x_3(0) = 5$ cm y $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$.
- g) Repita lo mismo que la parte (d), con las condiciones iniciales $x_1(0) = -5$ cm, $x_2(0) = 0$ cm, $x_3(0) = 5$ cm, $v_1(0) = v_2(0) = 0$ y $v_3(0) = 3$ cm/s.
26. Considere un resorte, de constante de restitución k , que conecta dos masas, M y m restringidas a moverse a lo largo del eje \hat{x} . Encuentre la frecuencia de oscilación de tal sistema.
27. * Suponga que la energía potencial de cierta molécula diatómica viene razonablemente bien descrita por la expresión

$$U(r) = \frac{1}{2}U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \right],$$

con $U_0 = 2$ eV (eV es una unidad de energía usada en la física atómica llamada “electron-volt”) y $r_0 = 0,5$ nm (1 nm = 10^{-9} m).

- a) Demuestre que $r = r_0$ es la separación de equilibrio de la molécula.
- b) Grafique $U(r)$ en el rango $0,4$ nm $< r < 0,7$ nm.
- c) Desarrolle el potencial $U(r)$ en torno a $r = r_0$, es decir exprese $U(r)$ de la forma

$$U(r) = c_0 + c_1s + \frac{1}{2}c_2s^2 + \dots$$

donde $s = r - r_0$ y encuentre los coeficientes c_0 , c_1 y c_2 .

- d) Convéngase de que la fuerza para pequeños desplazamientos de los átomos respecto a su posición de equilibrio (que ocurre para $s = 0$) viene dada por $F(s) = -ks$. Evalúe k .
- e) Si las masas de los átomos son $m_1 = m_2 = m$, ¿cuál será la frecuencia vibracional de la molécula?

28. Considere cuatro masas iguales unidas por resortes de constante de restitución k tal como se muestra en la figura. Las masas sólo se pueden mover en el plano en que se ubican. Usando argumentos de simetría, describa algunos de los modos normales de vibración y encuentre la frecuencia de ellos. ¿Cuántos modos normales tiene este sistema? ¿Cuántos de ellos tienen frecuencia cero?

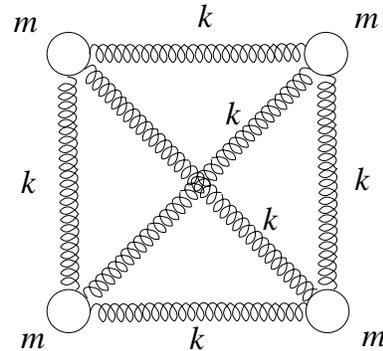


Figura 13.25

29. Un reloj “de los abuelos” se basa en un péndulo de longitud 1 m. El reloj se atrasa 1 segundo por día. ¿En cuánto se debe corregir la longitud del péndulo?
30. Un resorte de constante de resitución $k = 2$ dina/cm y largo en reposo ℓ_0 se encuentra adosado firmemente a la base de un recipiente (ver figura). El recipiente está lleno de agua.

Suponga ahora que en el instante $t = 0$ se le adosa al extremo superior una esfera sólida homogénea de radio $R = 1$ cm, hecha de un material más liviano que el agua, y que la esfera luego se suelta (o sea, en el instante $t = 0$ la longitud del resorte es ℓ_0 y la esfera se suelta en reposo). Se observa que la esfera realiza oscilaciones armónicas de amplitud $A = 0,8$ cm.

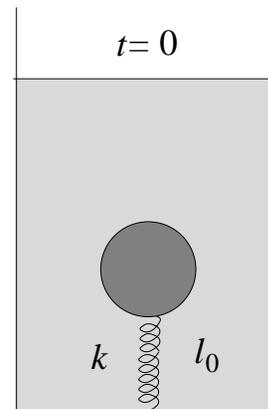


Figura 13.26

- a) Encuentre la densidad ρ de la esfera.
- b) Encuentre el período T del movimiento armónico que la esfera realiza una vez que se suelta.

(Al desarrollar el problema ignore los efectos debidos al roce viscoso entre la esfera y el agua).

31. El péndulo de la figura está formado por una barra de masa despreciable y longitud L . La masa del extremo inferior se mantiene unido a un resorte de constante k dispuesto horizontalmente y fijo, por su otro extremo a una pared. Cuando el péndulo se encuentra en posición vertical la longitud del resorte es la de su largo natural. Calcule la frecuencia ω del sistema. Verifique su resultado analizando el límite de algunos sistemas conocidos.

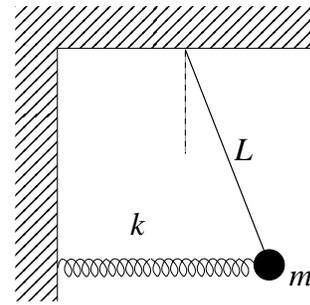


Figura 13.27

32. Considere un cilindro de radio R y densidad ρ , con una perforación cilíndrica de radio $R/2$, tal como se muestra en la figura. El cilindro rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal realizando pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio. Encuentre el período de las oscilaciones.

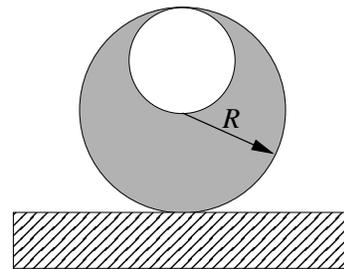
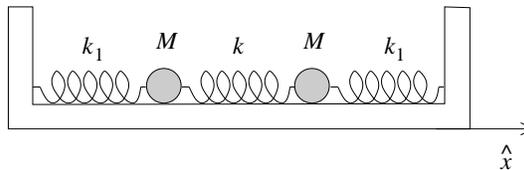


Figura 13.28

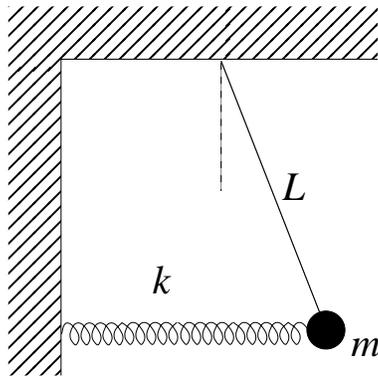
33. Considere el siguiente sistema de dos masas iguales M y tres resortes, con extremos fijos, como se muestra en la figura:



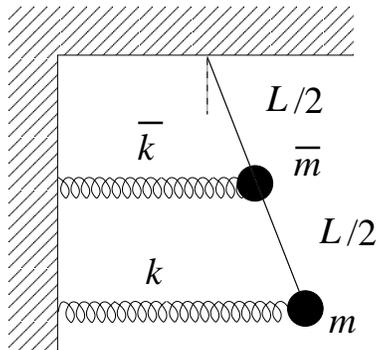
El resorte central tiene constante de restitución k , y los laterales constante de restitución k_1 .

Encuentre la ecuación de movimiento para cada una de las masas, desacóplelas para encontrar los modos normales, y encuentre la frecuencia de cada uno de ellos. Dibuje los modos normales.

34. El péndulo de la figura está formado por una barra de masa despreciable y longitud L . La masa del extremo inferior se mantiene unida a un resorte de constante k dispuesto horizontalmente y fijo, por su otro extremo, a una pared. Cuando el péndulo se encuentra en posición vertical la longitud del resorte es la de su largo natural. Calcule la frecuencia ω del sistema. Muestre que se recuperan los límites conocidos en ausencia del resorte y en ausencia de la barra.



Resuelva nuevamente el problema anterior, si se agrega una segunda masa \bar{m} , ubicada en el punto medio de la barra, y unida a la pared con un resorte de constante \bar{k} . Ambos resortes se encuentran en su largo natural cuando el péndulo está en posición vertical.



13.8. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 8

La forma general de la solución para un oscilador armónico simple es

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

La condición $x(0) = 0$ implica que $A = 0$, luego queda

$$x(t) = B \sin(\omega t).$$

Derivando se obtiene

$$v(t) = \omega B \cos(\omega t) \quad y \quad a(t) = -\omega^2 B \sin(\omega t)$$

Aplicando las condiciones de borde se encuentra que

$$v(1) = \omega B \cos(\omega) = 2$$

y

$$a(2) = -\omega^2 B \sin(2\omega) = -2\omega^2 B \sin(\omega) \cos(\omega) = 4.$$

Formando el cociente entre las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\sin(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

La figura 13.29 muestra un gráfico del lado izquierdo y derecho de esta ecuación. La intersección de menor frecuencia ocurre para $\omega \sim 3,43 \text{ s}^{-1}$.

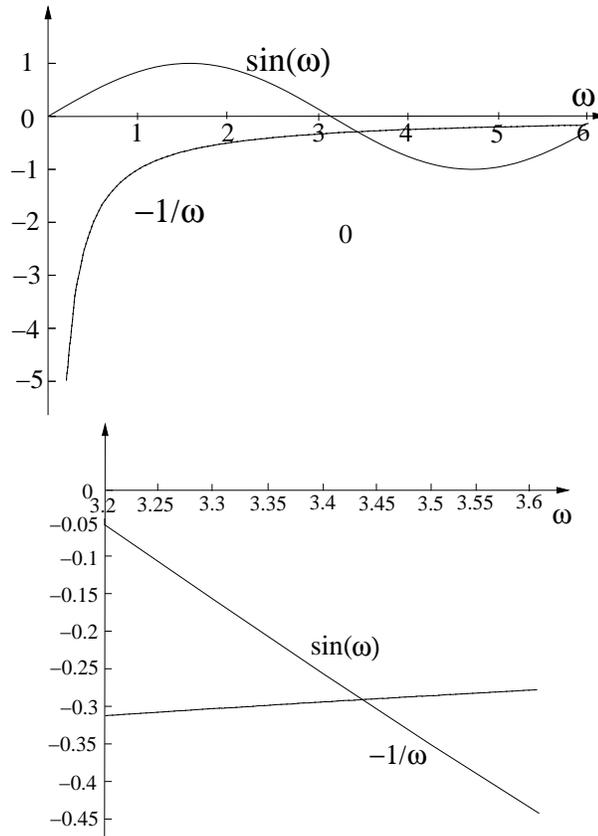


Figura 13.29

Solución al problema 15

El sistema tiene 4 grados de libertad y por lo tanto existen cuatro modos normales. Sean $\theta_j, j = 1, 2, 3, 4$ los cuatro ángulos de las cuatro masas respecto a sus posiciones de “equilibrio”. Los cuatro modos normales se encuentran por simple inspección del problema.

- i) Uno de los modos normales tiene frecuencia nula ($\omega_1 = 0$) y corresponde a la rotación uniforme y simultánea de las cuatro masas a lo largo del anillo, o sea, $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_3(t) = \theta_4(t) = \omega t$.
- ii) Otro modo normal se obtiene si las partículas 1 y 3 se mantienen en reposo y las partículas 2 y 4 oscilan con la misma amplitud pero en sentido contrario, o sea $\theta_1(t) = \theta_3(t) = 0, \theta_2(t) = -\theta_4(t), \forall t$. Al desplazar la masa 2 en un ángulo α uno de los resortes se comprime y el otro se alarga en una magnitud $R\alpha$. La fuerza sobre la masa será igual a $2kR\alpha$, luego la frecuencia de este modo normal será $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$.
- iii) Otro modo normal se obtiene si las partículas 2 y 4 se mantienen en reposo y las partículas 1 y 3 oscilan con la misma amplitud pero en sentido contrario. Por simetría este modo tiene la misma frecuencia que el modo normal anterior ($\omega_3 = \sqrt{2k/m}$).

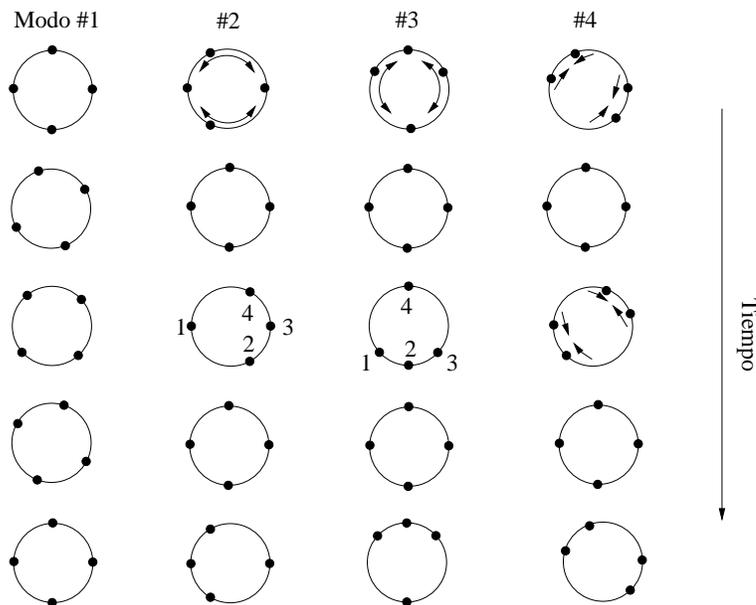


Figura 13.30

- iv) El cuarto modo normal se obtiene si las cuatro masas oscilan con la misma amplitud, 1 y 3 en la misma dirección y 2 y 4 en la dirección contraria, es decir, $\theta_1(t) = \theta_3(t) = -\theta_2(t) = -\theta_4(t)$, $\forall t$. Al desplazarse una masa en un ángulo α , uno de los resortes se acorta y el otro se alarga en una magnitud $2R\alpha$. La fuerza sobre la masa será, por lo tanto, igual a $4kR\alpha$. Luego la frecuencia de oscilación es $\omega_2 = \sqrt{4k/m}$.

La figura 13.30 muestra esquemáticamente el movimiento de las cuatro masas para los cuatro modos normales.

Solución al problema 21

Al girar el alambre con las esferas en un ángulo $\vec{\theta} = \theta \hat{z}$ el torque es

$$\vec{\tau} = -\eta\theta \hat{z}.$$

El torque genera un cambio del momento angular del sistema. Se tiene

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt} (I\dot{\theta}) \hat{z} = I\ddot{\theta} \hat{z},$$

donde I es el momento de inercia de las dos esferas para rotaciones alrededor del eje \hat{z} (que coincide con el alambre).

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que

$$I\ddot{\theta} = -\eta\theta$$

o sea,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

con $\omega_0^2 = \eta/I$. Para el período T se obtiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\eta}}.$$

Usando el teorema de Steiner, para el momento de inercia se encuentra la expresión

$$I = 2 \left[\frac{2}{5}mR^2 + mR^2 \right] = \frac{14}{5}mR^2 = \frac{14}{5} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho R^2 = \frac{56}{15}\pi\rho R^5.$$

Usando esto en la expresión anterior para el período y despejando R se encuentra

$$R^5 = \frac{15}{56} \frac{T^2}{4\pi^3} \frac{\eta}{\rho} = 0,99986 \text{ cm}^5.$$

O sea, con esferas de diámetro igual a 1 cm, este péndulo tendrá un período de 1 segundo.

Solución al problema 22

- a) Sea x_0 la magnitud que el resorte se comprimirá respecto a su largo natural una vez que llegue al equilibrio. Se tiene que

$$kx_0 = mg$$

o sea,

$$x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0.5 \cdot 10}{2} \quad m = 2.5 \quad \text{m.}$$

La velocidad v_0 de la masa cuando choca con el resorte viene dada por

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Por consiguiente, las condiciones iniciales son

$$x(0) = x_0 = 2.5 \quad \text{m} \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = -v_0 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La frecuencia angular natural del sistema es $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\frac{1}{\text{s}}$. Derivando la expresión

$$z(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

se obtiene

$$\dot{z}(t) = (B - A\omega_0 - B\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.$$

Evaluando estas expresiones en $t = 0$ se obtiene

$$z(0) = A \quad \text{y} \quad \dot{z}(0) = B - A\omega_0.$$

Usando las condiciones iniciales se encuentra para A y B los valores

$$A = x_0 = 2.5 \text{ m}$$

y

$$B = A\omega_0 + \dot{z}(0) = (2.5 \cdot 2 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- b) La velocidad $\dot{z}(t)$ es nula cuando $(B - A\omega_0 - B\omega_0 t) = 0$. De esta relación se deduce que ello ocurre en el instante

$$t_o = \frac{1}{\omega_0} - \frac{A}{B} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2.5}{(-5)} \right) \text{s} = 1 \text{ s}.$$

- c) La figura 13.31 muestra el gráfico de la posición $z(t)$ en función del tiempo.

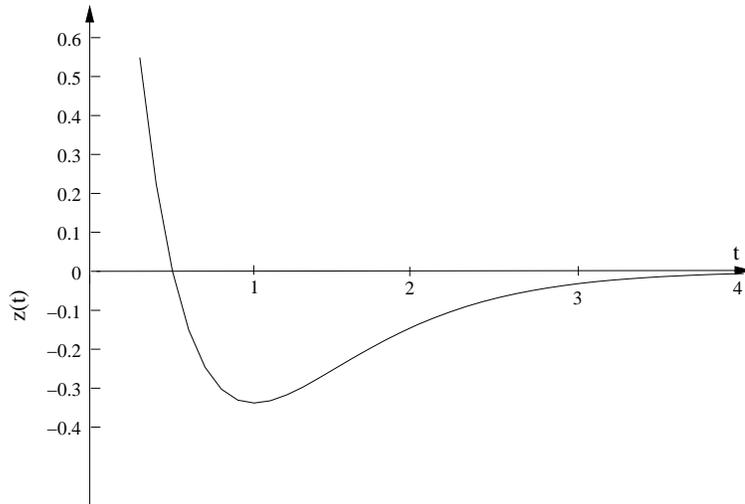


Figura 13.31

d) Del cambio de energía potencial $\Delta U = mg(h + x_0)$,

$$\frac{1}{2}kx_0^2$$

queda como energía potencial del resorte; el resto se disipa. Por lo tanto, la energía disipada es

$$\begin{aligned} Q &= mgh + mgx_0 - \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2.5)^2 \right] \text{ Joule} = 31.25 \text{ Joule} \end{aligned}$$

Solución al problema 30

Una vez que se adosa la esfera al resorte el nuevo punto de equilibrio del resorte sube en una magnitud D que se puede evaluar de la relación

$$kD = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_0 - \rho)g ,$$

donde $\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$ es la densidad del agua. Observe que la amplitud de la oscilación coincidirá con D , o sea, $D = A = 0.8 \text{ cm}$. Despejando ρ se encuentra

$$\rho = \rho_0 - \frac{3kA}{4\pi R^3 g}.$$

Ahora $k/g = 2$ dina/g = 2 gramos, luego

$$\rho = \left[1 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 0.8}{4\pi} \right] \text{ g/cm}^3 = 0.618 \text{ g/cm}^3.$$

El período del movimiento viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

donde $m = 4\pi R^3 \rho / 3 = 4\pi \cdot 0.618 / 3 \text{ g} = 25.9 \text{ g}$. Para el período se encuentra $T = 1.75 \text{ s}$.

Capítulo 14

Ondas

versión 2 enero 2012

14.1. La ecuación de ondas

Considere una cuerda de densidad lineal μ , muy larga, bajo tensión τ . Sea $u(x, t)$ la deformación de la cuerda en el lugar x e instante t , es decir, $u(x, t)$ es la desviación transversal de la cuerda, en el lugar x e instante t , respecto a su posición de equilibrio. Demostraremos a continuación que la función u , para desviaciones pequeñas, satisface la *ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 ,$$

donde $v = \sqrt{\tau/\mu}$. (Estamos considerando la oscilación de la cuerda en ausencia de gravedad y suponiendo que sólo se desplaza transversalmente.)

Definamos el eje \hat{x} a lo largo de la cuerda cuando ésta está en su posición de equilibrio y llamemos a esta dirección “horizontal”.

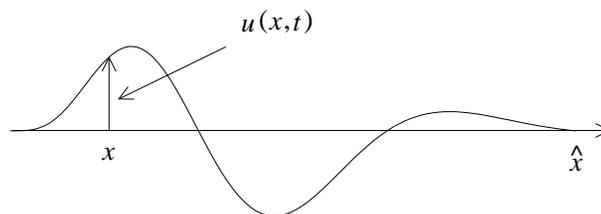


Figura 14.69

Consideremos un pedazo infinitesimal de la cuerda entre x y $x + dx$ y evaluemos la fuerza que actúa sobre él. En cada extremo, la magnitud de la fuerza es τ y la dirección

es tangente a la cuerda (ver figura 14.70, que es una ampliación del sector entre x y $x + dx$ de la figura 14.69). (Estamos suponiendo que la tensión de la cuerda no varía si ella se deforma; esto es cierto sólo si las deformaciones son suaves y pequeñas.)

Sea $\theta(x)$ el ángulo entre la tangente a la cuerda en el lugar x y el eje \hat{x} . La componente horizontal de la fuerza en el extremo izquierdo es $F_x = -\tau \cos(\theta(x))$. Por deformaciones suaves y pequeñas entendemos aquellas para las cuales, en todo instante, $\theta(x) \ll 1, \forall x$. Despreciando términos de segundo orden en θ se tiene que $\cos \theta = 1$, luego $F_x = -\tau$. Usando la misma argumentación se encuentra que la fuerza que sobre el extremo derecho del trozo ejerce el resto de la cuerda es $F_x = \tau$. La fuerza total en la dirección x que actúa sobre el trozo es, por lo tanto, cero. O sea, el trozo de cuerda (entre x y $x + dx$) no acelerará horizontalmente y por consiguiente el movimiento será sólo en la dirección “transversal” (vertical).

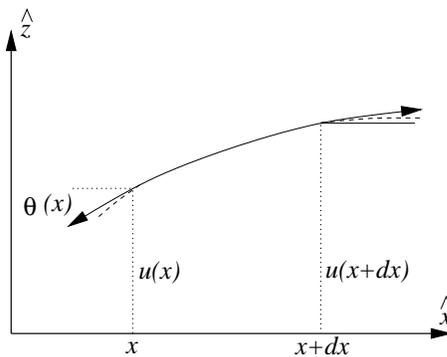


Figura 14.70

La fuerza en la dirección vertical sobre el extremo izquierdo del trozo de cuerda es $F_z = -\tau \sin(\theta(x))$. A primer orden en θ , el seno y la tangente de θ son iguales, o sea,

$$\sin(\theta(x)) \simeq \tan(\theta(x)) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

De esta manera, para la fuerza vertical en el extremo izquierdo del trozo, se obtiene

$$F_z(x) = -\tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

De manera análoga, para la fuerza sobre el extremo derecho se encuentra

$$F_z(x + dx) = -\tau \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}.$$

La fuerza neta en la dirección vertical, por lo tanto, es

$$F_z^{\text{tot}} = F_z(x) + F_z(x + dx) = \tau \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right].$$

Usando la segunda ley de Newton se obtiene

$$(\mu dx) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = F_z^{\text{tot}} = F_z(x) + F_z(x + dx) = \tau \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right].$$

Dividiendo por dx se obtiene

$$\mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \tau \frac{1}{dx} \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \tau \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

y finalmente la

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (14.1)$$

con $v \equiv \sqrt{\tau/\mu}$. La ecuación de ondas (14.1) es una ecuación de derivadas parciales de segundo orden.

La importancia del estudio de esta ecuación y sus soluciones se debe a que aparece en numerosas áreas de la física: Electromagnetismo (ondas electromagnéticas, luz, ondas de radio, radar, etc.), Acústica (ondas sonoras), Sismología (ondas sísmicas), etc.

14.2. Solución de la ecuación de ondas

En esta sección analizaremos las soluciones de la ecuación de ondas para una cuerda de largo infinito.

Proposición: Sea $f(z)$ una función arbitraria pero continua, con derivada continua y acotada. Entonces $f(x - vt)$ es solución de la ecuación de ondas.

Demostración: Denotemos por f' y f'' la primera y segunda derivada de f (respecto a su argumento). Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x - vt)}{\partial x} &= f'(x - vt) \\ \frac{\partial^2 f(x - vt)}{\partial x^2} &= \frac{\partial f'(x - vt)}{\partial x} = f''(x - vt) \\ \frac{\partial f(x - vt)}{\partial t} &= f'(x - vt) \cdot (-v) \\ \frac{\partial^2 f(x - vt)}{\partial t^2} &= -v \frac{\partial f'(x - vt)}{\partial t} = -v f''(x - vt) \cdot (-v) = v^2 f''(x - vt) \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que efectivamente $f(x - vt)$ satisface la ecuación de ondas.

Ejercicio: Sea $g(z)$ una función arbitraria pero continua, con derivada continua y acotada. Demuestre que $g(x + vt)$ también es una solución de la ecuación de ondas.

Sea $f(x)$ la función mostrada en la figura 14.71. Observe que el gráfico de $f(x - vt)$ es igual al de $f(x)$, excepto que se ha trasladado una cantidad vt hacia la derecha. En otras palabras, $f(x - vt)$ corresponde a un pulso u onda que se traslada hacia la derecha. Observe que no es la cuerda la que se traslada, sino que el pulso—la deformación. Análogamente $g(x + vt)$ corresponde a una onda o pulso que se traslada hacia la izquierda (hacia $-\hat{x}$).

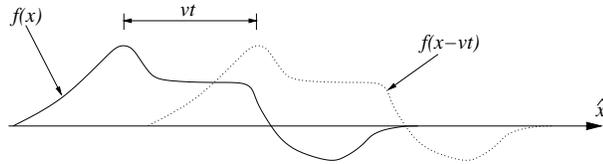


Figura 14.71

La velocidad con que estos pulsos se propagan a lo largo de la cuerda es $v = \sqrt{\tau/\mu}$.

Principio de superposición

La ecuación de ondas 14.1 es lineal, es decir, si $f_1(x, t)$ y $f_2(x, t)$ son soluciones, entonces también $u(x, t) = \alpha f_1 + \beta f_2$, con α y β arbitrarios es solución (demuéstrelo como ejercicio).

La figura 14.72 muestra la deformación de la cuerda al “encontrarse” dos pulsos que viajan en dirección contraria.

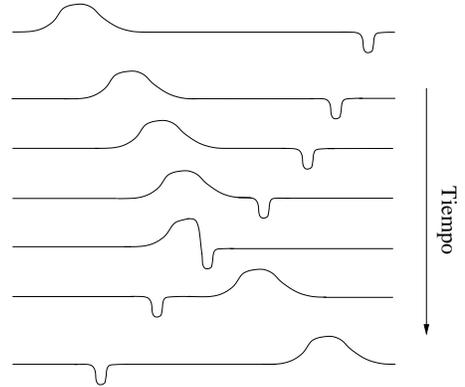


Figura 14.72

Ejercicio: Como caso particular, suponga que $v = 1$ cm/s, que las funciones f_1 y f_2 vienen dadas por $f_1(s) = 1/(1 + s^2)$ y $f_2(s) = s/(1 + s^2)$, y que $\alpha = \beta = 1$. Grafique $u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ en el intervalo $x \in [-10, 10]$ cm para $t = -5, -1, 0, +1$ y $+5$ s.

Proposición: Sea $u_0(x)$ la deformación de la cuerda en el instante $t = 0$. Si la velocidad transversal de la cuerda en todos los lugares en ese instante es nula, entonces

la solución de la ecuación de onda que cumple estas condiciones iniciales es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x - vt) + u_0(x + vt)] .$$

Demostración: Es inmediato que $u(x, 0) = u_0(x)$. Por otra parte, derivando respecto al tiempo se tiene

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_0(x - vt)}{\partial t} + \frac{\partial u_0(x + vt)}{\partial t} \right] = \frac{1}{2}[-vu_0'(x - vt) + vu_0'(x + vt)] ,$$

de donde se deduce que $\dot{u}(x, 0) = 0$.

Proposición: (demuéstrela como ejercicio)

Sea $u_0(x)$ la deformación y $v_0(x)$ la velocidad transversal de la cuerda en el instante $t = 0$. Entonces la solución de la ecuación de onda que cumple estas condiciones iniciales es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - vt) + u_0(x + vt)) + \frac{1}{2v}(f(x + vt) - f(x - vt)) ,$$

donde $f(s)$ es una función tal que

$$\frac{df(s)}{ds} = v_0(s) .$$

Ondas viajeras sinusoidales

De particular importancia práctica son las ondas viajeras sinusoidales: $\cos(kx \pm \omega t)$ y $\sin(kx \pm \omega t)$, donde $k = \omega/v$. Las ondas electromagnéticas emitidas por una estación de radio o las ondas superficiales en el mar, la onda acústica emitida por un diapasón, etc., en primera aproximación, esencialmente son ondas viajeras sinusoidales. En este capítulo sólo analizaremos la situación de ondas sinusoidales viajando a lo largo de una cuerda.

La constante k es el *número de onda* y ω es la *frecuencia angular*. La frecuencia angular está relacionada con el período T con que se repite la oscilación en un lugar fijo: $T = 2\pi/\omega$. Es claro que $vT = \lambda$ y, por lo tanto, el número de onda está relacionado con la longitud de onda λ por $k = 2\pi/\lambda$. La onda viajera sinusoidal también la podemos escribir de la forma

$$\cos(kx \pm \omega t) = \cos(k(x \pm vt)) .$$

Las ondas con el signo $-$ viajan hacia la derecha, mientras que las con el signo $+$ hacia la izquierda.

Analicemos ahora lo que pasa cuando la cuerda, digamos en el lugar $x = 0$, cambia de densidad. Como las densidades son distintas, también lo serán las velocidades de propagación. Sean éstas v_1 y v_2 , a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, respectivamente.

Supongamos que una onda viajera sinusoidal, de amplitud 1 y frecuencia ω_0 , se acerca de la izquierda al punto $x = 0$. Tal onda vendrá dada por la expresión $\cos(k_1x - \omega_0t)$, con $k_1 = \omega_0/v_1$.

Una vez que la onda llega al punto de interfase, lo que sucede es que parte de la onda es transmitida y parte es reflejada. En el régimen estacionario, la cuerda en el lado izquierdo ($-$) y en el lado derecho ($+$), serán de la forma

$$u_-(x, t) = \cos(k_1x - \omega t) + A \cos(-(k_1x + \omega_0t))$$

y

$$u_+(x, t) = B \cos(k_2x - \omega_0t) ,$$

donde A es la amplitud de la onda reflejada, mientras que B es la amplitud de la onda transmitida. Note que la frecuencia de la onda no cambia al pasar de un medio a otro; lo que cambia es el vector de onda (o equivalentemente, la longitud de onda). Evaluemos A y B .

En todo instante las deformaciones de la cuerda u_- y u_+ , para $x = 0$, deben coincidir, o sea,

$$u_-(0, t) = u_+(0, t) .$$

A partir de esta ecuación se encuentra que

$$1 + A = B . \tag{14.2}$$

Otra condición que debe cumplirse es que en ningún punto (en particular en $x = 0$) la cuerda puede tener una “punta”, es decir, en todas partes la derivada espacial de la cuerda debe ser continua:

$$\left. \frac{\partial u_-(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_+(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} .$$

Pero

$$\left. \frac{\partial u_-(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left[-k_1 \sin(k_1x - \omega_0t) + Ak_1 \sin(-(k_1x + \omega_0t)) \right] \Big|_{x=0}$$

y

$$\left. \frac{\partial u_+(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = Bk_2 \sin(\omega_0t) .$$

Luego la exigencia de que la cuerda no tenga una punta en $x = 0$ nos da la relación

$$k_1(1 - A) = k_2B . \tag{14.3}$$

De las ecuaciones (14.2) y (14.3) se encuentra que

$$A = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

y

$$B = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}.$$

En las expresiones anteriores, μ_1 y μ_2 son las densidades de la cuerda a la izquierda y derecha del punto $x = 0$, respectivamente.

Casos particulares:

- I) $\mu_1 = \mu_2$. En este caso la densidad no sufre variaciones y nada ocurren en $x = 0$. La magnitud de la onda reflejada es nula ($A = 0$), mientras que la onda transmitida tiene la magnitud de la onda incidente ($B = 1$).
- II) $\mu_2 \gg \mu_1$. En este caso la amplitud de la onda transmitida es casi nula ($B \simeq 0$), mientras que la onda reflejada tiene prácticamente la misma magnitud que la onda incidente, pero con un *cambio de fase* de 180° ($A \simeq -1$).
- III) $\mu_2 = \infty$. Ésta es la situación que se tiene si la cuerda está empotrada en $x = 0$. En ese caso no hay onda transmitida y la amplitud de la reflejada es $A = -1$.
- IV) $\mu_2 \ll \mu_1$. En este caso la amplitud de la onda transmitida es $B \simeq 2$, mientras que la onda reflejada tiene prácticamente la misma magnitud que la onda incidente.
- V) $\mu_2 = 0$. En este caso a la derecha de $x = 0$ no hay nada, es decir la cuerda de la izquierda tiene un extremo libre en $x = 0$ (eso sí, debe haber algún mecanismo que mantenga la tensión de la cuerda). Como no hay cuerda a la derecha, no existe onda transmitida; sólo hay una onda reflejada de magnitud $A = 1$.

Energía transportada por una onda viajera sinusoidal

Si una masa m oscila armónicamente con una frecuencia angular ω y amplitud A , su energía total (cinética más potencial) viene dada por

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 .$$

Ejercicio: Demuestre explícitamente que el resultado anterior se cumple para las oscilaciones de una masa colgada de un resorte y para un péndulo.

Supongamos que a lo largo de una cuerda de densidad μ se desplaza una onda viajera del tipo $u(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t)$. Consideremos un segmento de la cuerda de largo $d\ell$. La masa de tal segmento es $\mu d\ell$. Cada segmento de la cuerda realiza un movimiento armónico simple de amplitud A , luego su contribución a la energía total es

$$dE = \frac{1}{2}(\mu d\ell)\omega^2 A^2 .$$

La energía total de un sector de la cuerda, de longitud igual a la longitud de onda, es

$$E_\lambda = \frac{1}{2}\mu\lambda\omega^2 A^2 .$$

Como la onda avanza precisamente una distancia λ en un intervalo de tiempo igual al período T , se deduce que la potencia, o sea, la energía por unidad de tiempo, transmitida por la onda es

$$S = \frac{dE}{dt} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\mu\lambda}{2T}\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 .$$

Reflexión en un extremo fijo

Consideremos una cuerda tensa de densidad μ que va desde $-\infty$ hasta $x = 0$, punto en el cual está empotrada. Que la cuerda en $x = 0$ significa que $u(0, t) = 0, \forall t$. Supongamos que un pulso $f(x - vt)$ viaja a lo largo de la cuerda hacia $x = 0$. (Para $t < 0$ el pulso está a la izquierda de $x = 0$ y avanza hacia el origen; si la cuerda no estuviese empotrada, en el instante $t = 0$ el pulso pasaría por el origen.) ¿Qué pasa con el pulso cuando éste se acerca al origen? ¿Cómo evoluciona el pulso para $t > 0$?

Para contestar estas preguntas consideremos el siguiente problema: Una cuerda que va desde $-\infty$ hasta ∞ con dos pulsos convergiendo hacia $x = 0$, uno desde la derecha y otro desde la izquierda (ver figura 14.73):

$$u(x, t) = f(x - vt) - f(-(x + vt)) .$$

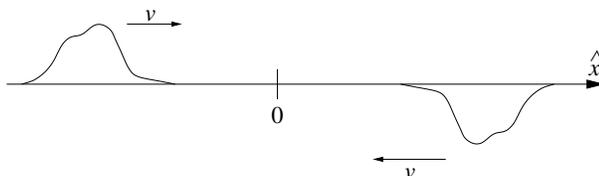


Figura 14.73

Note que la cuerda en $x = 0$ nunca se mueve; la superposición de los dos pulsos, en todo instante, da un desplazamiento total nulo en el origen. El lado izquierdo de la cuerda del segundo problema es idéntico al problema original: ambas satisfacen la misma ecuación de movimiento, tienen la misma condición inicial para $t \rightarrow -\infty$ (un pulso $f(x - vt)$) y ambas cuerdas tienen las mismas restricciones ($u(0, t) = 0 \forall t$). Como la solución es única, sabemos cómo se moverá la cuerda del problema original en todo instante: igual a la de la parte izquierda del segundo problema. para $t \gg 0$, a lo largo de la parte izquierda viajará un pulso invertido ($-f(-(x + vt))$) hacia la izquierda.

Consideremos nuevamente la cuerda tensa de densidad μ empotrada en $x = 0$. Pero ahora, en lugar de un pulso, supongamos que una onda viajera $u(x, t) = \cos(kx - \omega t)$ viaja continuamente desde la izquierda hacia $x = 0$. La onda viajera sinusoidal, en $x = 0$, se reflejará, invirtiendo su amplitud. La deformación de la cuerda, por lo

tanto, será

$$u(x, t) = \cos(kx - \omega t) - \cos(-(kx + \omega t)) = 2 \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(kx) .$$

Esta última ecuación ya no corresponde a una onda viajera, sino que a una onda estacionaria: estamos en presencia de una onda sinusoidal $\operatorname{sen}(kx)$, cuya amplitud $2\operatorname{sen}(\omega t)$ oscila en el tiempo. Para una onda estacionaria las crestas de las ondas no se trasladan. Una onda estacionaria tiene *nodos*, que son los lugares de la cuerda que se mantienen en reposo mientras transcurre el tiempo. La separación entre dos nodos es igual a la mitad de la longitud de la onda.

Reflexión en un extremo libre

Consideremos una cuerda tensa de densidad μ que va desde $-\infty$ hasta $x = 0$, punto en el cual tiene un extremo libre. Aunque el extremo sea libre, debe existir algún mecanismo que mantenga la tensión de la cuerda, por ejemplo, mediante un hilo extremadamente fino (de densidad despreciable) e infinitamente largo. Que la cuerda esté libre en $x = 0$ significa que ella puede desplazarse verticalmente en $x = 0$, pero debe cumplir la relación

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \forall t,$$

o sea, en todo instante la tangente a la cuerda en $x = 0$ debe ser horizontal. Si esta condición no se cumpliera, sobre un pedazo de cuerda infinitesimal en el extremo $x = 0$ actuaría una fuerza transversal infinita, lo que generaría aceleraciones infinitamente grandes.

Supongamos que un pulso $f(x - vt)$ viaja a lo largo de la cuerda hacia $x = 0$. ¿Qué pasa con el pulso cuando éste se acerca al extremo libre? ¿Cómo evoluciona el pulso para $t > 0$?

Para contestar estas preguntas consideremos nuevamente una cuerda que va desde $-\infty$ hasta ∞ , con dos pulsos convergiendo hacia $x = 0$, uno desde la derecha y otro desde la izquierda, tal como se muestra en la figura 14.74:

$$u(x, t) = f(x - vt) + f(-(x + vt)) .$$

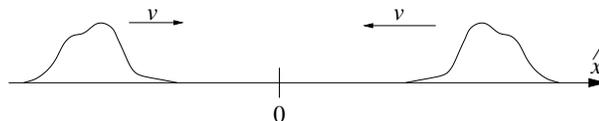


Figura 14.74

Observe que la pendiente de la cuerda en $x = 0$ de esta superposición de pulsos siempre es horizontal. También observe que el lado izquierdo de la cuerda del segundo problema es idéntico al problema original: ambas satisfacen la misma ecuación de movimiento, tienen la misma condición inicial para $t \rightarrow -\infty$ (un pulso $f(x - vt)$), y ambas cuerdas tienen las mismas restricciones (pendiente horizontal en $x = 0$). Como la solución es única, sabemos cómo debe moverse la cuerda del problema original: igual que la parte izquierda de la cuerda del segundo problema. En particular concluimos que para $t \gg 0$, a lo largo de la parte izquierda viajará un pulso $f(-(x + vt))$ hacia la izquierda.

Repitamos lo anterior, pero ahora con una onda viajera $u(x, t) = \cos(kx - \omega t)$ que incide continuamente desde la izquierda sobre el extremo libre. La onda viajera sinusoidal, en $x = 0$, se reflejará manteniendo la misma amplitud. La deformación de la cuerda, por lo tanto, será

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos(kx - \omega t) + \cos(-(kx - \omega t)) \\ &= 2 \cos(\omega t) \cos(kx) . \end{aligned}$$

Esta ecuación corresponde nuevamente a una onda estacionaria: una onda sinusoidal $\cos(kx)$, cuya amplitud $2 \cos(\omega t)$ oscila en el tiempo.

14.3. Ondas estacionarias en una cuerda de largo L

Consideremos una cuerda de largo L , bajo tensión τ , cuyos extremos se encuentran empotrados en $x = 0$ y $x = L$.

Una característica de las ondas estacionarias es que poseen nodos, que son los lugares de la cuerda que siempre están en reposo. Al empotrar la cuerda en dos de sus nodos, obtenemos las ondas estacionarias posibles en tal cuerda.

La distancia entre dos nodos siempre es $\lambda/2$, luego no todas las longitudes de onda son posibles, sino que sólo las que cumplen con

$$L = n \frac{\lambda}{2} ,$$

donde n es un entero positivo. Por otra parte, la longitud de onda y la frecuencia $\nu = 1/T$ con que oscila la onda estacionaria están relacionadas por

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = 2\pi \frac{v}{\omega} .$$

De las relaciones anteriores se deduce que las frecuencias angulares posibles son:

$$\omega_n = 2\pi \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{L} v .$$

Acá v es la velocidad con que se propaga una onda transversal por la cuerda, magnitud relacionada con la tensión τ y la densidad lineal de masa μ por

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

La desviación transversal de la cuerda cuando oscila en el modo estacionario correspondiente al entero n es

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t) ,$$

donde A_n es la amplitud máxima de la oscilación, k_n es el número de onda

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{L}$$

y ω_n es la frecuencia angular

$$\omega_n = n \frac{\pi v}{L} = n \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \right) = n \omega_1 ,$$

con

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

Observemos que el origen del tiempo se ha elegido en un instante en que la cuerda tenía su deformación máxima y, por consiguiente, estaba momentáneamente en reposo. La expresión más general para la desviación transversal de la cuerda cuando oscila en el modo estacionario correspondiente al entero n es

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}(k_n x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t)) .$$

Puesto que todas las partes de la cuerda oscilan armónicamente, los distintos estados estacionarios corresponden a distintos *modos normales* del sistema. El modo con $n = 1$ se llama *modo fundamental* y el modo correspondiente al entero n se llama *n-ésimo modo normal*.

Resumen: Para una cuerda de largo L con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, los modos normales vienen dados por:

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}(\pi n x / L) \cos(n \omega_1 t) , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

con

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

Ejercicio: Demuestre que para una cuerda de largo L con un extremo fijo en $x = 0$ y un extremo libre en $x = L$, los modos normales de oscilación vienen dados por

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2L} \right) \cos((2n-1)\omega_1 t) , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

con

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

Ejercicio: Demuestre que para una cuerda de largo L con extremos libres en $x = 0$ y $x = L$, los modos normales de oscilación vienen dados por

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos(n\omega_1 t) , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

con

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

La figura 14.75 muestra esquemáticamente la forma en la cual oscila una cuerda en los distintos modos normales. La tabla 14.1 da un resumen de las frecuencias de los distintos modos normales de una cuerda de largo L para las tres situaciones que pueden presentarse: ambos extremos fijos, ambos extremos libres, y un extremo fijo y el otro libre.

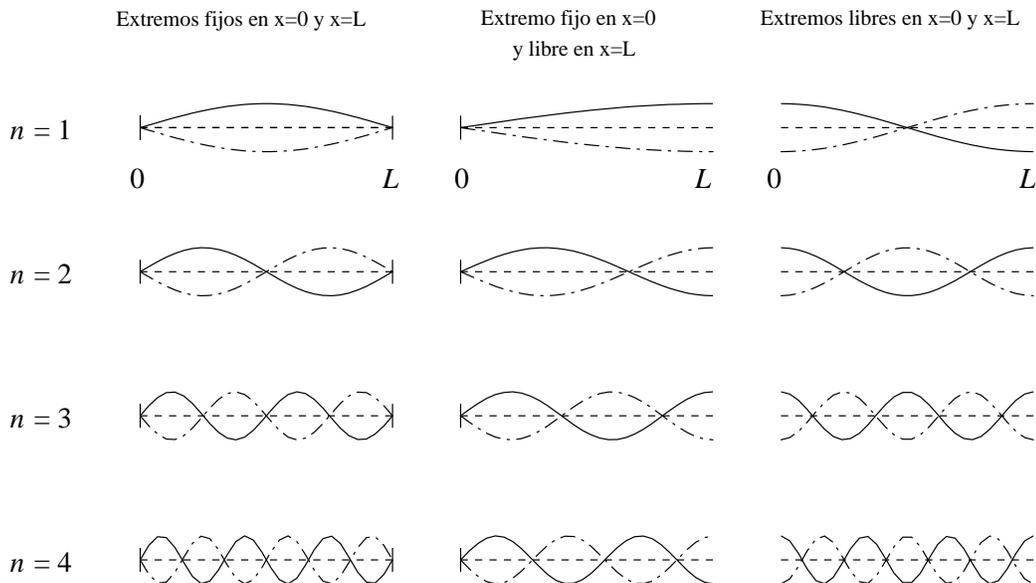


Figura 14.75

Cuadro 14.1 Frecuencias de los distintos modos de oscilación de una cuerda de largo L .

Modo de oscilación	n	Extremos fijos	Extremos fijo – libre	Extremos libres
Fundamental	1	ν_1	ν_1	ν_1
2º armónico	2	$2\nu_1$	$3\nu_1$	$2\nu_1$
3º armónico	3	$3\nu_1$	$5\nu_1$	$3\nu_1$
4º armónico	4	$4\nu_1$	$7\nu_1$	$4\nu_1$
5º armónico	5	$5\nu_1$	$9\nu_1$	$5\nu_1$
Frecuencia del modo fundamental	1	$\nu_1 = v/2L$	$\nu_1 = v/4L$	$\nu_1 = v/2L$
Frecuencia del modo n	n	$\nu_n = n\nu_1$	$\nu_n = (2n - 1)\nu_1$	$\nu_n = n\nu_1$

14.4. * Desarrollo de Fourier

La ecuación de ondas es lineal, es decir, una superposición (suma) de soluciones también es una solución. En particular, una superposición de los distintos modos normales también será un modo de oscilación de la cuerda. Más aún, todo movimiento posible de una cuerda se puede describir como una superposición de los distintos modos normales. Por ejemplo, para una cuerda de largo L con extremos fijos, cualquier solución se puede escribir de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sen(n\omega_1 t)) \sen(\pi n x / L) . \tag{14.4}$$

Observe que las frecuencias de los distintos modos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental ω_1 y, por lo tanto, el movimiento resultante de la superposición necesariamente será periódico. Los coeficientes A_n y B_n se determinan de manera que la solución cumpla con las condiciones iniciales. Ilustremos este procedimiento con un ejemplo.

Supongamos que se toma la cuerda desde el centro, se la desplaza una distancia h y luego se suelta. En ese caso las condiciones iniciales son

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & \text{para } 0 < x < L/2 \\ 2h - \frac{2h}{L}x & \text{para } L/2 < x < L \end{cases} \tag{14.5}$$

y

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 . \tag{14.6}$$

Derivando (14.4) se obtiene

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_1 (-A_n \operatorname{sen}(n\omega_1 t) + B_n \operatorname{cos}(n\omega_1 t)) \operatorname{sen}(\pi n x / L) .$$

Evaluándola en $t = 0$ se encuentra

$$0 = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_1 B_n \operatorname{sen}(\pi n x / L) .$$

La única forma de satisfacer esta relación para todo x es que todos los coeficientes B_n sean cero. De esta manera queda

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{cos}(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(\pi n x / L) .$$

Para $t = 0$ se tiene

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\pi n x / L) .$$

Multipliquemos ambos lados por $\operatorname{sen}(\pi \bar{n} x / L)$ e integremos sobre x entre $x = 0$ y $x = L$. De esta manera se obtiene

$$\int_0^L u(x, 0) \operatorname{sen}(\pi \bar{n} x / L) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \operatorname{sen}(\pi n x / L) \operatorname{sen}(\pi \bar{n} x / L) dx .$$

Pero

$$\int_0^L \operatorname{sen}(\pi n x / L) \operatorname{sen}(\pi \bar{n} x / L) dx = \frac{L}{2} \delta_{n\bar{n}} .$$

Ejercicio: Demuestre la última relación. Indicación: escriba las funciones seno en término de exponenciales complejas e integre.

Tenemos, pues:

$$\int_0^L u(x, 0) \operatorname{sen}(\pi \bar{n} x / L) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{L}{2} \delta_{n\bar{n}} = \frac{L}{2} A_{\bar{n}} .$$

Despejando A_n se encuentra

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \operatorname{sen}(\pi n x / L) dx .$$

Así, conociendo $u(x, 0)$ podemos evaluar los coeficientes A_n .

Ejercicio: Demuestre que si $u(x, 0)$ viene dado por (14.5), entonces

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8h}{\pi^2 n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} .$$

Usando los resultados anteriores se encuentra que el desplazamiento de la cuerda vendrá dado por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \text{ impar}} \frac{8h}{\pi^2 n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n\omega_1 t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \left[\cos(\omega_1 t) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) - \frac{1}{9} \cos(3\omega_1 t) \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{L} x \right) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_1 t) \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{L} x \right) - \dots \right] \end{aligned}$$

Esta serie nos da el desplazamiento de la cuerda en todos los lugares y en todos los instantes.

La serie converge rápidamente, es decir, bastan unos pocos términos para obtener un resultado relativamente preciso. La figura 14.76 muestra el resultado que se obtiene con 8 términos. De la figura se desprende que después de un período $T = 2\pi/\omega_1$ la cuerda volverá a su posición inicial. La situación mostrada en la figura 14.76 corresponde al movimiento de una cuerda de guitarra si ésta se pulsa exactamente al centro.

En el problema 14.22 se pide resolver este mismo problema pero usando el método gráfico introducido en la sección 14.2.

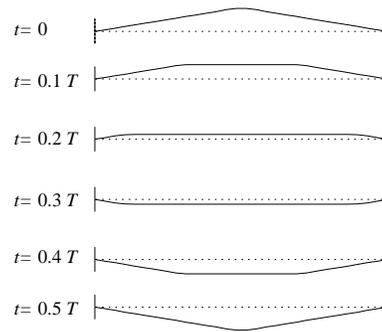


Figura 14.76

14.5. Problemas

1. Sabemos que si una onda viajera sinusoidal, que se propaga a lo largo de una cuerda, llega a un punto donde cambia de densidad, entonces parte de la onda es reflejada y parte es transmitida. Demuestre que la energía transportada (por unidad de tiempo) por la onda reflejada más la energía de la onda transmitida coincide con la energía de la onda incidente.

2. La figura 14.77 muestra la forma de un pulso que en $t = 0$ viaja en una cuerda en el sentido positivo del eje x con rapidez $v = 1$ m/s. Dibuje la forma de la cuerda en los instantes $t = 1, 2, 3, 4, 5,$ y 6 segundos. En todos los casos indique el sentido de la velocidad transversal de todos los puntos de la cuerda. En cada uno de los instantes, ¿qué puntos del pulso tienen velocidad nula?

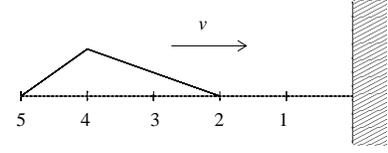


Figura 14.77

3. Una cuerda homogénea, de densidad μ y largo L , está fija en el extremo $x = 0$ y libre en el extremo $x = L$. Sea τ la tensión de la cuerda.

Usando tres alfileres se clava la cuerda a una pared vertical de manera de producir una deformación triangular centrada en $x = L/2$, tal como se muestra en la figura adjunta.

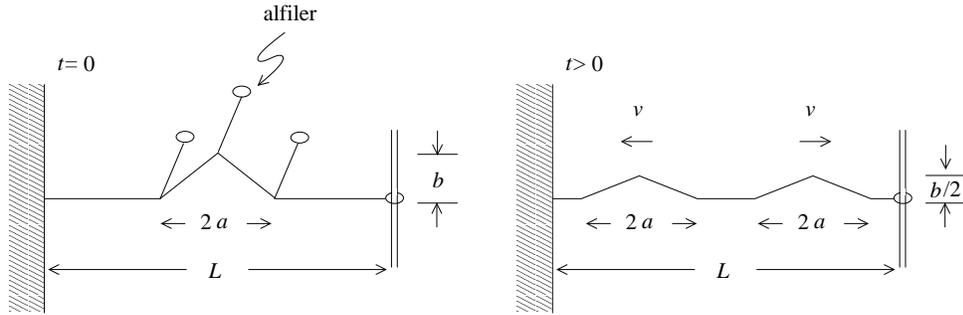


Figura 14.78

En $t = -$ se liberan simultáneamente los tres alfileres e inmediatamente se observa que la perturbación original se desdobla en dos pulsos triangulares idénticos, que viajan en sentidos opuestos con velocidad $v = \sqrt{\tau/\mu}$. La amplitud máxima de cada pulso es $b/2$ y su extensión $2a$.

- (a) Grafique la forma de la perturbación en $t_1 = L/v$ y en $t_2 = 2L/v$.
 (b) Haga un gráfico que indique la magnitud y dirección de la velocidad transversal de cada segmento de la cuerda en $t_1 = L/v$ y en $t_2 = 2L/v$.

4. Suponga que la función

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}[2\pi(1x - 5t)]$$

representa la deformación de una cuerda, con $u_0 = 0.3$ cm, y donde x se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la longitud de onda, el período, la velocidad, la dirección de propagación, la amplitud de la onda y la energía transportada por la onda.

5. Entre dos torres de un andarivel, separadas por 100 metros, cuelga un cable de acero cuyo peso es de 25 kg. Al recibir un golpe transversal cerca de uno de los extremos, el pulso creado demora 3 s en volver. ¿Cuál es la tensión del cable?
6. Una cuerda de acero de longitud 80 cm y masa 10 g está fija en ambos extremos y sometida a una tensión de 500 N.

Considere que la cuerda oscila en el modo fundamental y que la amplitud en el punto medio es 0.3 cm.

- (a) Encuentre la frecuencia con que oscila la cuerda. (Debido a que el acero ofrece resistencia a las deformaciones, las frecuencias deducidas con las expresiones deducidas para cuerdas flexibles no corresponderán exactamente a las de la cuerda de acero. ¿Serán levemente mayores o menores?)
- (b) Escriba la función que describe la forma de la cuerda para todo valor de x y para todo tiempo t . Suponga que en $t = 0$ todos los puntos de la cuerda se encuentran en la posición de máxima amplitud.
- (c) Calcule la velocidad transversal de la porción de la cuerda ubicada a 20 cm de uno de sus extremos, en el instante en que la cuerda pasa por la posición de equilibrio.
7. Una cuerda de largo L y masa M cuelga del cielo.
- (a) Muestre que un pulso transversal tarda un tiempo $2\sqrt{L/g}$ para recorrer toda la cuerda.
- (b) Usando el resultado de la parte (a), encuentre el tiempo que tarda el pulso en viajar la mitad inferior de la cuerda.
- (c) ¿Cómo se modifica el resultado si en el extremo inferior de la cuerda se cuelga una masa m ?
8. Un alambre de acero usado para confeccionar las cuerdas de un piano es capaz de sostener un peso de aproximadamente 25.000 kg por cm^2 de sección transversal. ¿Cuál es el máximo largo que podría tener la cuerda correspondiente al *Do* central del piano? ¿Dependerá este largo del grosor de la cuerda? Si la cuerda tiene un diámetro de 0.8 mm, ¿cuál es la tensión de la cuerda? (La frecuencia del *Do* central es de 262 Hz.)

9. Sea $v = \sqrt{\tau/\rho}$ la velocidad de propagación de ondas transversales en una cuerda, donde τ es la tensión y ρ la densidad lineal de la cuerda. ¿Cuáles de las siguientes expresiones corresponden a un movimiento posible de una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$?

- $u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\omega t)$, con $k = 2\pi/L$ y $\omega = kv$.
- $u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}(k_2x) \operatorname{sen}(\omega_2t) + 2u_0 \operatorname{sen}(k_4x) \operatorname{sen}(\omega_4t)$, con $\omega_n = n\omega_1 = nv\pi/L$ y $k_n = \omega_n/v$.
- $u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}(k_2x) \operatorname{sen}(\omega_2t) + 2u_0 \operatorname{sen}(k_3x) \operatorname{sen}(\omega_3t)$, con $\omega_n = n\omega_1 = nv\pi/L$ y $k_n = \omega_n/v$.
- $u(x, t) = u_0x(L - x) \operatorname{sen}(\omega t)$, con $\omega = v\pi/L$.
- $u(x, t) = \frac{u_0}{1 + (x - vt)^2} - \frac{u_0}{1 + (x + vt)^2}$.
- $u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(2nL + x - vt) - f(2nL - x - vt)]$, donde $f(s)$ es una función continua y derivable arbitraria (pero que para argumentos grandes decae a cero).

En los casos en que el movimiento sea periódico, indique el período.

10. La ecuación $\lambda\nu = v$ relaciona la longitud de onda λ de una perturbación armónica con su frecuencia ν y su velocidad v . Esta relación también es válida para las ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío. La velocidad con que se propagan las ondas electromagnéticas es de $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.
- (a) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas electromagnéticas emitidas por la radio Beethoven? La frecuencia de esa estación de radio es de 96.6 MHz.
 - (b) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas electromagnéticas de longitud de onda de 3 cm (microondas)?
 - (c) Para estudiar la estructura cristalina de los sólidos frecuentemente se usan rayos X (que también son ondas electromagnéticas). La razón del uso de tales ondas electromagnéticas se debe a que su longitud de onda es del orden de la separación entre átomos vecinos del cristal. Sabiendo que la separación entre átomos vecinos en un cristal es de aproximadamente $2 \text{ \AA} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 0.2 \text{ nm}$, encuentre la frecuencia típica de una onda electromagnética correspondiente a un rayo X .

11. El pulso mostrado en la figura 14.79 se propaga hacia la derecha donde la cuerda tiene un extremo libre. La velocidad del pulso es de 1 m/s. Grafique la forma de la cuerda en los instantes $t = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 s. Haga un gráfico de la velocidad del extremo libre en función del tiempo.

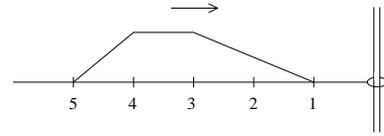


Figura 14.79

12. Las frecuencias propias (o de resonancia) de tres modos normales de oscilación sucesivos de una cuerda flexible son 60, 100 y 140 Hz, respectivamente.
- La cuerda ¿tiene extremos fijos, libres o uno fijo y uno libre?
 - ¿A qué armónicos (o sea, especifique los valores de n) corresponden estas frecuencias de resonancia?
13. Una cuerda con ambos extremos fijos tiene modos de resonancia (normales) sucesivos, cuyas longitudes de onda son 0.54 m y 0.48 m.
- ¿Cuál es el n de estos armónicos?
 - ¿Cuál es la longitud de la cuerda?
14. Un oscilador (por ejemplo diapason) unido al extremo de una cuerda tensa, genera en ella ondas transversales con una frecuencia de 500 Hz. La potencia entregada a la cuerda por el oscilador es de 0.3 Watts. La densidad lineal de masa de la cuerda es $\mu = 0.01$ kg/m y está sometida a una tensión de 1000 N. Encuentre la velocidad de propagación, la longitud de onda y el número de onda de la perturbación generada. Encuentre la expresión que describe a la perturbación en la cuerda. Expresé la amplitud de la perturbación en términos de las magnitudes numéricas conocidas.
15. Dos cuerdas flexibles de diferente densidad lineal están unidas en un extremo y sometidas a la misma tensión τ . La velocidad de propagación para ondas transversales en la primera cuerda es el doble que en la segunda. Cuando una onda armónica que viaja en la primera cuerda es reflejada en el punto de unión entre ambas, la onda reflejada tiene la mitad de la amplitud de la onda transmitida. Si la amplitud de la onda incidente es A , ¿cuál es la amplitud de las ondas reflejada y transmitida? ¿Qué fracción de la potencia incidente es transmitida?
16. Considere una cuerda de masa M y largo L , que se sujeta en un extremo y se hace girar (como un aspa de helicóptero) con una frecuencia angular ω_0 . Demuestre que la velocidad de propagación para ondas transversales a lo largo de la cuerda es

$$v(x) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - x^2},$$

donde x es la distancia a lo largo de la cuerda medida desde el eje de rotación.

17. Una cuerda de 4 m de largo, con ambos extremos fijos, oscila en una superposición del tercer, cuarto y sexto modo normal de oscilación. La velocidad de propagación para ondas transversales es de 20 m/s.
- ¿Cuál es el período de las oscilaciones de la cuerda?
 - ¿Cómo se podría eliminar el cuarto modo de oscilación sin afectar a los otros dos modos normales?
 - ¿Cuánto vale el período de oscilación de la cuerda una vez que quede oscilando sólo en una superposición del tercer y sexto modo normal?
18. Demuestre que la velocidad de una onda transversal a lo largo de un resorte de constante de restitución k y estirado hasta tener un largo L , viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{k(L - L_0)L}{M}},$$

donde M es la masa del resorte y L_0 su largo natural.

19. Considere una onda viajera que se propaga a lo largo de una cuerda de densidad de masa μ y bajo tensión τ . Debido a procesos de disipación, paulatinamente las amplitudes de la oscilación disminuirán en tamaño. Suponga que la deformación de la cuerda viene dada por la relación

$$u(x, t) = Ae^{-\eta x} \cos(kx - \omega t).$$

Encuentre la potencia transportada por esta onda en el punto x y compárela con la potencia en el lugar $x = 0$.

20. Considere una cuerda de densidad μ y largo L , sometida a una tensión τ , que en el instante $t = 0$ tiene la forma mostrada en la figura y la velocidad transversal de cada porción de ella es nula. A medida que el tiempo avanza, la forma de la perturbación cambia, pero se observa que el movimiento es periódico. ¿Cuál es el período del movimiento? Justifique su respuesta.

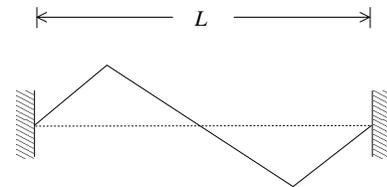


Figura 14.80

21. Tres segmentos de cuerda de densidad μ están atados tal como se muestra en la figura 14.81. Suponga que se conocen las distancias L_1 y L_2 y el ángulo α . Un pulso que parte de A tarda un tiempo T_B para llegar a B y un tiempo T_C para llegar a C . Encuentre la longitud de la cuerda L_3 . Encuentre la tensión de la cuerda L_1 .

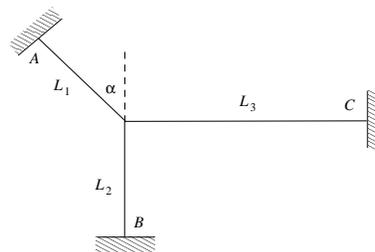


Figura 14.81

22. Considere una cuerda de largo L que inicialmente tiene la forma mostrada en la figura 14.82 y cuya velocidad transversal es nula. Determine gráficamente la forma de la cuerda en los instantes $t = 0$, $t = 0.1T$ y $t = 0.2T$, donde T es el período del movimiento de la cuerda.

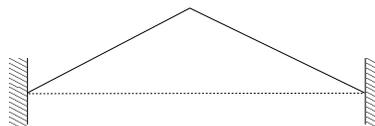
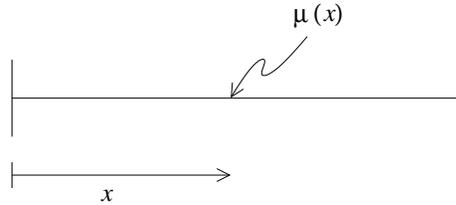


Figura 14.82

23. Suponga que cierta onda (armónica) se propaga a lo largo de una cuerda con una velocidad $v = 12$ m/s (en la dirección $+\hat{x}$). La longitud de onda es $\lambda = 0.4$ m. La densidad lineal de masa de la cuerda es $\rho_0 = 15$ g/cm. La amplitud de la onda es de 3 cm.
- Determine la frecuencia ν de la onda.
 - Determine la tensión de la cuerda.
 - Determine la máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.
 - Determine la potencia propagada a lo largo de la cuerda.
 - Determine la función $u(x, t)$ que representa la deformación de la cuerda en el lugar x e instante t .
24. Considere una cuerda horizontal de longitud L , fija en ambos extremos, sometida a una tensión τ . En dicha cuerda, la densidad de masa a una distancia x de uno de los extremos es

$$\mu(x) = \mu_0 \frac{x}{L} + \tilde{\mu}_0 ,$$

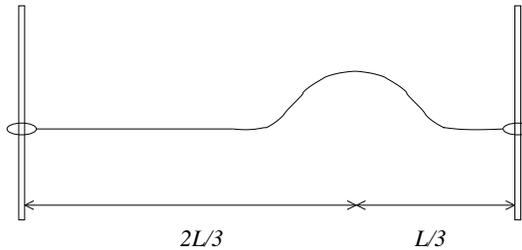
donde $\mu_0, \tilde{\mu}_0$ son constantes.



Encuentre el tiempo T_0 que tarda un pulso en llegar desde un extremo de la cuerda al otro.

Encuentre una expresión para T_0 válida para $\mu_0/\tilde{\mu}_0 \ll 1$, y usando dicha expresión, muestre que en el límite $\mu_0 \rightarrow 0$ se recupera el resultado esperado.

25. Considere una cuerda de largo L , densidad lineal de masa μ y sometida a una tensión τ , libre por ambos extremos. Inicialmente, se le da a la cuerda una deformación gaussiana centrada a una distancia $2L/3$ del extremo izquierdo, como muestra la figura:



Es decir, la deformación de la cuerda está dada por:

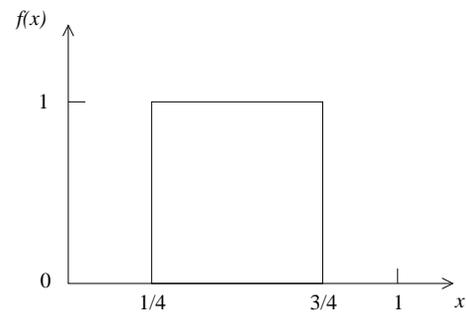
$$u(x, 0) = Ae^{-(x-2L/3)^2/\sigma^2} ,$$

donde x es la distancia desde el extremo izquierdo, y A y σ son ciertas constantes.

En $t = 0$ se suelta la cuerda. Encuentre la deformación de la cuerda para todo tiempo $t > 0$, en términos de la velocidad v de propagación de ondas en la cuerda.

Haga una representación esquemática de la forma de la cuerda para $t = L/v$ y $t = 2L/v$.

26. Determine el desarrollo de Fourier para un pulso cuadrado de altura 1 y ancho $1/2$, sobre una cuerda de largo 1, fija en ambos extremos, como se muestra en la figura:



Grafique, en un mismo gráfico, el desarrollo de Fourier usando los primeros N términos de la serie, con $N = 1$, $N = 3$, $N = 5$ y $N = 15$.

14.6. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 3

Después de transcurrido un tiempo $t_1 = L/v$, tanto el pulso que viaja hacia la izquierda como el que viaja hacia la derecha son reflejados (por el extremo fijo y libre respectivamente), estando de nuevo en el punto de partida. Sin embargo, el reflejado por el extremo fijo se habrá invertido mientras que el reflejado por el extremo libre no. La suma (superposición) de los dos pulsos, en el instante t_1 , dará una deformación nula de la cuerda.

Después de un tiempo t_2 (medio período para una cuerda con un extremo libre y otro fijo) el pulso será el inverso del pulso inicial. La figura adjunta muestra la deformación de la cuerda y su velocidad transversal para varios instantes.

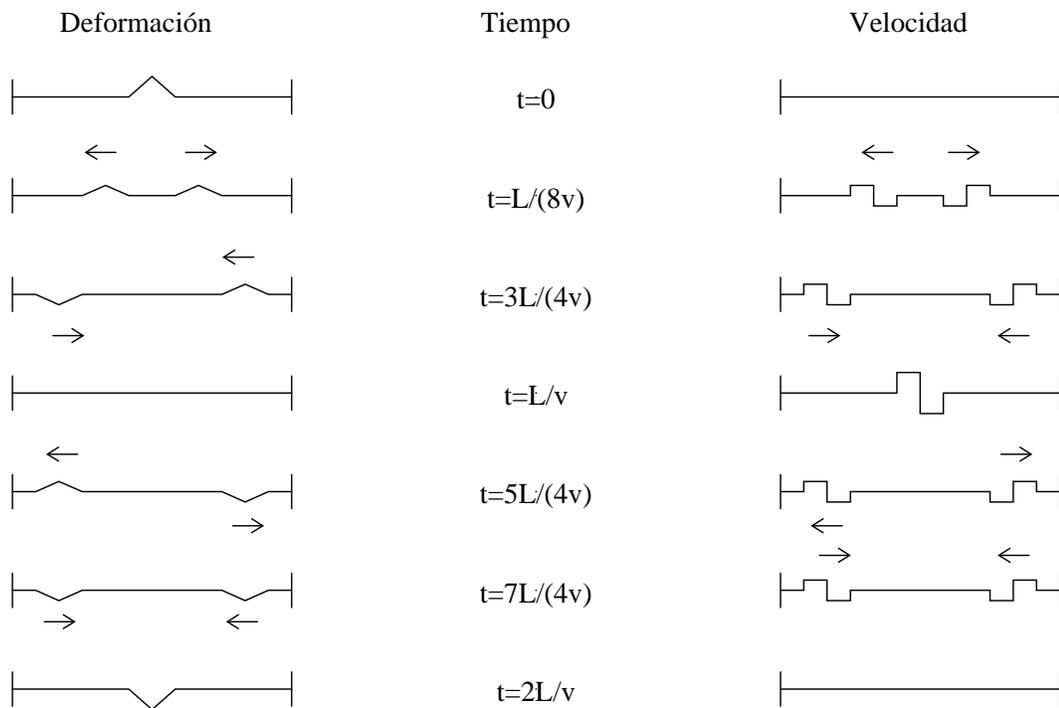


Figura 14.83

Solución al problema 5

La densidad lineal del cable es $\rho_0 = 25/100 \text{ kg/m} = 0.25 \text{ kg/m}$. Si el pulso demora 3 s en viajar 200 m, entonces la velocidad de propagación es $v = 200/3 \text{ m/s} = 66.6 \text{ m/s}$. Conocidos ρ_0 y v podemos encontrar la tensión:

$$\tau = \rho v^2 = 0.25 \cdot (66.6)^2 \text{ N} \simeq 1109 \text{ N} .$$

Solución al problema 6

Sea \hat{z} el eje vertical con $z = 0$ y $z = L$ correspondiendo a los extremos inferior y superior de la cuerda, respectivamente.

- a) La tensión de la cuerda, que se debe a su propio peso, no es constante siendo, por lo tanto, también la velocidad del pulso a lo largo de la cuerda no constante. Para la tensión y densidad lineal de la cuerda se tiene $\tau(z) = Mgz/L$ y $\mu = M/L$. De esta manera, para la velocidad del pulso, cuando se encuentra a una altura z , se obtiene

$$v(z) = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{gz} .$$

El tiempo dt que tarda el pulso en recorrer la distancia entre z y $z + dz$ es $dt = dz/v(z)$. Sumando sobre todos los dz de la cuerda se encuentra

$$\int_0^{t_0} dt = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{gz}} dz ,$$

o sea,

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^L z^{-1/2} dz = 2 \sqrt{\frac{z}{g}} \Big|_0^L = 2\sqrt{\frac{L}{g}} ,$$

donde t_0 es el tiempo que tarda el pulso en recorrer toda la extensión de la cuerda.

- b) Usando la expresión anterior con $L \rightarrow L/2$ se encuentra el tiempo que tarda el pulso en recorrer la mitad inferior. Observe que esto no es la mitad del tiempo evaluado en la parte a).
- c) Cuando a la cuerda se le agrega una masa m en su extremo la respuesta es

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \left[\sqrt{1 + \frac{m}{M}} - \sqrt{\frac{m}{M}} \right] .$$

Demuestre que si la masa de la cuerda M es despreciable en comparación con la masa m que se le cuelga, entonces de la ecuación anterior se obtiene el resultado esperado $t_0 = L\sqrt{\mu/\tau_0}$, donde $\tau_0 = mg$ es, en ese caso, la tensión constante.

Solución al problema 9

Los requisitos que debe cumplir una función $u(x, t)$ para que ella describa la deformación de una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ son:

- i) $u(x, t)$ debe ser solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 .$$

- ii) $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t$.

Analicemos si cada una de las funciones propuestas cumple con estos requisitos.

- a) $u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\omega t)$, con $k = 2\pi/L$ y $\omega = kv$, cumple con ambos requisitos y por lo tanto corresponde a un movimiento posible de la cuerda. El periodo del movimiento es $T = L/v$ (la mitad del modo fundamental); la cuerda oscila en su segundo armónico ($n = 2$).
- b) $u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}(k_2 x) \operatorname{sen}(\omega_2 t) + 2u_0 \operatorname{sen}(k_4 x) \operatorname{sen}(\omega_4 t)$, con $\omega_n = n\omega_1 = nv\pi/L$ y $k_n = \omega_n/v$, cumple con ambos requisitos y por lo tanto corresponde a un movimiento posible de la cuerda. En este caso la cuerda oscila en una superposición del segundo ($n = 2$) y cuarto ($n = 4$) armónicos. El periodo es nuevamente $T = L/v$.
- c) $u(x, t) = u_0 \operatorname{sen}(k_2 x) \operatorname{sen}(\omega_2 t) + 2u_0 \operatorname{sen}(k_3 x) \operatorname{sen}(\omega_3 t)$, con $\omega_n = n\omega_1 = nv\pi/L$ y $k_n = \omega_n/v$, cumple con ambos requisitos y por lo tanto corresponde a un movimiento posible de la cuerda. En este caso la cuerda oscila en una superposición del segundo ($n = 2$) y tercer ($n = 3$) armónicos. El periodo ahora es el del modo fundamental $T = 2L/v$.
- d) $u(x, t) = u_0 x(L - x) \operatorname{sen}(\omega t)$, con $\omega = v\pi/L$, cumple con el requisito ii), pero no es solución de la ecuación de ondas, por lo tanto no corresponde a un movimiento posible de la cuerda.

- e)

$$u(x, t) = \frac{u_0}{1 + (x - vt)^2} - \frac{u_0}{1 + (x + vt)^2} ,$$

es solución de la ecuación de onda y cumple con la condición $u(0, t) = 0 \quad \forall t$, pero no cumple con $u(L, t) = 0$ para $t \neq 0$, luego no corresponde a un movimiento posible de la cuerda.

- f) $u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(2nL + x - vt) - f(2nL - x - vt)]$, donde $f(s)$ es una función continua y derivable arbitraria, es solución de la ecuación de ondas. También es

evidente que cumple con $u(0, t) = 0 \quad \forall t$. Demostremos que también $u(L, t) = 0 \quad \forall t$. En efecto,

$$u(L, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[(2n+1)L - vt] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[(2n-1)L - vt].$$

Cambiando en la segunda sumatoria el índice mudo $n - 1 = n'$ se observa que ambas sumatorias efectivamente son iguales. Dejaremos al lector que demuestre que $u(x, t + T) = u(x, t)$ con $T = 2L/v$.

Solución al problema 12

Del hecho de que las frecuencias 60, 100 y 140 no son múltiplos de enteros sucesivos de cierta frecuencia fundamental, se deduce que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo. Planteando las relaciones $(2n - 1)\nu_0 = 60$ Hz, $(2n + 1)\nu_0 = 100$ Hz y $(2n + 3)\nu_0 = 140$ Hz, se encuentra que $\nu_0 = 20$ Hz y $n = 2$. Los modos normales que corresponden a estas frecuencias son los con $n = 2, 3$ y 4 , siendo sus frecuencias $3\nu_0$, $5\nu_0$ y $7\nu_0$, respectivamente.

Capítulo 15

Ondas sonoras

versión 30 diciembre 2008

Se conoce como “sonido” a la sensación que, percibida por el oído, tiene su origen en el movimiento vibratorio de los cuerpos, el cual es transmitido por un medio, por ejemplo, el aire. En el vacío no hay propagación de sonido: para su propagación, el sonido requiere de un medio.

15.1. Propagación del sonido

La figura 15.84 muestra en forma esquemática la distribución, para varios instantes, de las moléculas del aire en una región del espacio por la que atraviesa una onda sonora. Los lugares en que el aire está comprimido (alta densidad de puntos) se alternan con regiones en las que el aire está enrarecido (baja densidad de puntos).

Si en un instante observamos la densidad de aire (o sea, centramos nuestra atención en una franja en particular) notaremos que ésta varía espacialmente en forma periódica. La distancia entre dos máximos sucesivos de la densidad es la *longitud de onda*.

Por otra parte, si en un lugar fijo observamos las variaciones temporales de la densidad del aire (o sea, en algún lugar realizamos un corte vertical de la figura 15.1), observaremos que ésta también variará periódicamente. El tiempo que transcurre entre dos máximos sucesivos de la densidad es lo que se denomina período de la onda. Las siete franjas de la figura 15.84 corresponden a siete instantes equiespaciados dentro de un período.

Es importante comprender que al propagarse una onda de sonido, las partículas del aire realizan sólo un pequeñísimo movimiento oscilatorio. En la figura 15.84 se han destacado tres moléculas con un pequeño círculo. Notemos que a medida que transcurre el tiempo, las tres moléculas oscilan, volviendo después de un período a la posición original. De hecho, la última franja de la figura 15.84 (correspondiente al instante $t = T$) es idéntica a la primera ($t = 0$). Más aún, fijándose en la figura 15.84

con mayor detención es posible seguir las oscilaciones de todo un grupo de moléculas y observar cómo el grupo oscila como un todo y es comprimido y luego descomprimido al paso de una onda sonora. Esto es un efecto general y sucede en todos los lugares de cualquier medio que transmite sonido.

Figura 15.84

En presencia de sonido, las partículas del aire, en promedio, no se desplazan una distancia neta, aun cuando el sonido continúa alejándose a 340 m/s de la fuente sonora. Algo análogo ocurre con las olas en el agua: una gaviota que flota en el mar sólo describe un pequeño movimiento de ascenso y descenso al paso de una ola; aunque la ola se propaga, ésta no arrastra la gaviota con ella.

¿De qué tamaño son las oscilaciones de las moléculas de aire al paso de una onda sonora? Para un sonido de 100 dB (decibeles) que, como veremos, corresponde aproximadamente a la intensidad del sonido de una orquesta sinfónica tocando *fortísimo*, la amplitud de las oscilaciones es de sólo aproximadamente 0.01 mm.

Es bien sabido que el sonido se propaga no sólo a través del aire, sino también a través de todos los cuerpos sólidos y sustancias líquidas y gaseosas. De hecho, la mayoría de los sólidos y líquidos son buenos transmisores del sonido.

No todas las sustancias propagan el sonido con la misma facilidad: existen buenos y malos transmisores del sonido. Los gases y las sustancias porosas y sueltas, como el algodón y la lana, son malos conductores del sonido, razón por la cual se usan como aislantes acústicos. Por su parte, las sustancias poco compresibles, como el acero y el agua, son buenas conductoras del sonido.

15.2. Velocidad del sonido

Numerosas experiencias de la vida cotidiana enseñan que el sonido se propaga a una velocidad menor que la de la luz. Por ejemplo, el ruido producido por un avión a turbina que pasa a gran altura, pareciera no provenir del lugar donde se ve el avión, sino de uno ya superado. Otro ejemplo se presenta durante las tempestades eléctricas. Después de caer un rayo, transcurre un lapso antes de que se escuche el trueno. De hecho, es usual medir el tiempo que transcurre entre la observación del relámpago y el trueno, para estimar la distancia a que se encuentra la tormenta.

Los ejemplos anteriores muestran claramente que el sonido se propaga en el aire con una velocidad finita. En el aire, a una temperatura de 15° C, el sonido se propaga con una velocidad de 340 m/s. Hemos indicado la temperatura del aire, porque experimentalmente se encuentra que la velocidad de propagación del sonido depende ligeramente de ella —por encima de los 0° CV, por cada grado que aumente la temperatura, la velocidad se acrecienta en aproximadamente 0.6 m/s.

Hidrógeno (0° C)	1260
Aire (0° C)	331
Aire (100° C)	387
Anhídrido carbónico	254
Oxígeno (0° C)	316
Vapor de agua (130° C)	450
Agua (20° C)	1480
Alcohol	1168
Glicerina	1950
Madera	~4500
Hielo	3200
Cobre (20° C)	3560
Aluminio	5040
Plomo	1200
Vidrio	hasta 5300
Acero	~5200
Goma vulcanizada	~35

Cuadro 15.1 Velocidad del sonido en m/s.

La tabla 15.1 recopila la velocidad de propagación del sonido en varias sustancias. De ella inferimos que, en general, la velocidad del sonido es bastante mayor en los líquidos y sólidos que en los gases, siendo una excepción el gas de hidrógeno.

En el caso de los gases se observa que, a medida que aumenta su peso específico, disminuye la velocidad de propagación del sonido.

No es tan sencillo encontrar una relación similar para la velocidad de propagación del sonido en sólidos. Además de la densidad ρ , el otro factor que determina la velocidad del sonido es la elasticidad e del medio. Mientras más rígido el material, tanto mayor es e . Se puede demostrar que la velocidad del sonido (la cual en el presente capítulo denotaremos con la letra c) en un medio viene dada por la relación $c = \sqrt{e/\rho}$. A grandes rasgos: a medida que la densidad del sólido aumenta, la velocidad del sonido tiende a disminuir; sin embargo, ésta no es una característica de validez universal.

En la sección anterior hemos visto que en el aire el sonido se propaga en forma de una onda de compresión y rarefacción. Lo mismo es cierto para la propagación del sonido en todos los demás medios. Al paso de un sonido, el (usualmente pequeño) desplazamiento oscilatorio de una partícula del medio coincide con la dirección de propagación de la onda. A este tipo de ondas se las conoce por el nombre de *ondas longitudinales*.

15.3. La ecuación de ondas

En esta sección determinaremos la ecuación dinámica que gobierna el comportamiento de las ondas sonoras en un gas. Para ello usaremos algunas relaciones termodinámicas de los gases, que aquí presentaremos sin demostración. La relación

$$PV = Nk_B T \quad (15.1)$$

es la así llamada *ecuación de estado de los gases ideales*, y relaciona el volumen V que ocupan N moléculas, con la temperatura T en (Kelvin) y la presión del gas P . k_B es una constante (la *constante de Boltzmann*) y su valor es $k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Sea m la masa de cada molécula, entonces

$$P = \frac{Nm k_B}{V} T = \rho \frac{k_B}{m} T, \quad (15.2)$$

donde ρ es la densidad de masa del gas. Esta última ecuación muestra que para un gas, a temperatura constante, la presión es proporcional a su densidad.

Al comprimir rápidamente un gas, su temperatura aumenta (es fácil observar esto al usar un bombín de bicicleta). Cuando la compresión de un gas ocurre rápidamente de manera que éste no alcance a termalizarse con su entorno, entonces las magnitudes ρ y P no son proporcionales sino que ecumplen la relación

$$P\rho^{-\gamma} = \text{constante}, \quad (15.3)$$

donde γ es una constante que depende de la naturaleza del gas. A temperatura ambiente, para el aire como también para el O_2 y el N_2 , $\gamma = 1.40$.

A continuación, usando las ecuaciones anteriores, deduciremos la ecuación dinámica para las ondas sonoras. Supongamos que en cierto lugar del espacio, el aire es perturbado levemente por una onda sonora que avanza a lo largo del eje x . La presión del aire y su densidad serán entonces funciones de la posición x y del tiempo t , que designaremos por $P(x, t)$ y $\rho(x, t)$, respectivamente.

Como la onda sonora genera compresiones y rarefacciones rápidas del aire, éste no alcanza a termalizarse y, por lo tanto, se tiene que

$$P(x, t)\rho^{-\gamma(x, t)} = \text{constante}.$$

Derivando respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (15.4)$$

Cuando las variaciones son pequeñas, como lo es en el caso del sonido, podemos escribir

$$\frac{\partial P}{\partial x} \simeq \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (15.5)$$

donde P_0 y ρ_0 son la presión y densidad media del aire (los valores en ausencia de sonido).

Consideremos ahora un tubo imaginario de aire, de área A orientado a lo largo de la dirección de propagación del sonido. Cuando no hay sonido, las moléculas de aire estarán en “reposo”, es decir, no realizarán movimiento colectivo alguno. Por otra parte, cuando hay sonido, las moléculas de aire sí realizarán un movimiento colectivo. Sea $u(x, t)$ el desplazamiento en el instante t de las moléculas que están en el plano transversal que pasa por x , respecto a la posición que tenían en ausencia de sonido (ver también la figura 15.85).

Figura 15.85

Apliquemos la segunda ley de Newton a un segmento de grosor dx . La masa del aire del segmento es $(A dx)\rho_0$, su aceleración $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$, mientras que la fuerza neta (ejercida por la presión atmosférica) es

$$F = P(x)A - P(x + dx)A = -A \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx .$$

La segunda ley de Newton nos da la relación

$$A\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = -A \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx ,$$

o sea,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = -\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx , \quad (15.6)$$

Pero

$$N = \rho_0 A dx = \rho(x, t) A [dx + u(x + dx, t) - u(x, t)] ,$$

luego

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} .$$

Como $|\partial u/\partial x| \ll 1$, tenemos que

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right) .$$

Derivando respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Reemplazando este resultado en (15.6), se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

o sea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \quad (15.7)$$

con

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} . \quad (15.8)$$

La ecuación (15.7) es la ecuación dinámica que estábamos buscando: ¡es la ecuación de ondas! Esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación que obtuvimos en el capítulo anterior para los desplazamientos transversales en una cuerda tensa. La magnitud c , por lo tanto, es la velocidad de propagación de las ondas de compresión en el aire. Usando la ecuación (15.2) podemos reescribirla de la forma

$$c = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} . \quad (15.9)$$

Con esta relación es posible entender algunas cosas. Por ejemplo, una molécula de oxígeno pesa 16 veces más que una molécula de hidrógeno y para el hidrógeno $\gamma = 1.41$, valor casi idéntico al del oxígeno. Luego, de acuerdo a (15.9), la velocidad del sonido en el hidrógeno debería ser 4 veces mayor que en el oxígeno. Esto se cumple extraordinariamente bien (ver tabla 15.1).

Conociendo la masa de una molécula de oxígeno, y midiendo γ podemos encontrar la velocidad del sonido. La masa de un protón es $1.6725 \cdot 10^{-24}$ g, y por lo tanto, la masa de una molécula de hidrógeno aproximadamente

$$m_{\text{H}_2} \simeq 3.34 \cdot 10^{-24} \text{ g} .$$

Usando (15.9), para la velocidad del sonido (en hidrógeno) a una temperatura $T = 0^\circ \text{ C} = 273 \text{ K}$, se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{1.41 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{3.34 \cdot 10^{-27}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1261 \frac{\text{m}}{\text{s}} ,$$

resultado que prácticamente coincide con el valor experimental.

15.4. Frecuencia

Llamaremos *tono* al sonido producido por fuentes sonoras que oscilan de manera regular (oscilaciones sinusoidales). Lo más característico de un tono es su bien definido grado de “elevación” o “altura”, fácilmente identificable.

La elevación de un tono depende de la prefuencia de la perturbación periódica introducida por la fuente sonora en el medio en que el sonido se propaga. Los tonos agudos corresponden a frecuencias mayores que los tonos graves.

Hay varias maneras de representar gráficamente una onda sonora. Una consiste en medir, en un lugar fijo y a medida que transcurre el tiempo, las fluctuaciones de la densidad del aire inducidas por un sonido. Por ejemplo, si en el lugar en que se realiza la medición se escucha un tono de una frecuencia ν bien definida, se encontrará que la densidad del aire variará periódicamente alrededor del valor de equilibrio ρ_0 . Son estas reiterativas fluctuaciones las que se muestran esquemáticamente en la figura 15.86.

Figura 15.86

Figura 15.87

Una representación gráfica distinta se obtiene si las mediciones de la densidad se realizan en un único instante, pero en lugares distintos (a lo largo de la dirección de propagación). En ese caso, un sonido de frecuencia bien definida también corresponderá a fluctuaciones regulares de la densidad, fluctuaciones que e repiten después de una distancia λ (la *longitud de onda*). La figura 15.87 muestra esta representación para dos tonos de frecuencias distintas, el sonido de frecuencia mayor se muestra en la parte inferior. A medida que la frecuencia del sonido aumenta, la longitud de onda disminuye.

Para estudiar experimentalmente los sonidos y obtener un registro de ellos se usa generalmente un micrófono, dispositivo que transforma las variaciones de presión (que son proporcionales a las variaciones de densidad) en variaciones de una corriente eléctrica. Al amplificarlas, estas corrientes pueden ser desplegadas en un osciloscopio o ser escuchadas con un parlante.

¿Cómo varía la presión del aire, en función del tiempo, para distintos tipos de sonidos? En la figura 15.86 se mostró en forma esquemática cómo varía la densidad del aire (el gráfico para la presión es idéntico pues ambas magnitudes son proporcionales),

a medida que transcurre el tiempo, para un tono de frecuencia bien definida.

Por otra parte, un ruido —por ejemplo, el ruido producido al llenar una bañera— genera fluctuaciones de la presión, que varía, en este caso, irregularmente (ver figura 15.88).

Figura 15.88

Llamaremos *tono puro* o *tono simple* a un sonido para el cual el gráfico de presión en función del tiempo viene dado por una función sinusoidal; esto significa que la presión P varía, a medida que transcurre el tiempo, de acuerdo a la expresión

Figura 15.89

$$P(t) = P_0 + \hat{P} \cos(2\pi\nu t) .$$

(Denotaremos por \hat{P} a la amplitud de la oscilación; \hat{P} es un escalar y no un vector unitario.)

La figura 15.89 muestra un gráfico presión-tiempo para un tono puro.

Cuando el tono no es simple y es, por ejemplo, como el mostrado en la figura 15.86, entonces se habla de *tono compuesto*.

Es claro que la longitud de onda de un sonido es igual al producto de la velocidad con que se propaga por su período, o sea, es la distancia que alcanza a recorrer un máximo de densidad en un período:

$$\lambda = cT = c \frac{1}{\nu} . \quad (15.10)$$

La elevación de un tono que escuchamos depende de la frecuencia con que vibra la fuente sonora. El oído humano es capaz de percibir tonos cuyas frecuencias varían entre 16 Hz y aproximadamente 20.000 Hz —o sea, 20 kHz (kilohertz). Con la edad, la posibilidad de escuchar frecuencias altas disminuye de manera significativa, siendo el límite superior para varones de edad avanzada de sólo unos 5.000 Hz.

La figura 15.90 muestra el teclado completo de un piano moderno, indicando el nombre que se da a las distintas notas, la frecuencia del sonido por ellas generadas (en Hz) y la notación musical que se usa para representarlas en un pentagrama.

Figura 15.90

Fuente de sonido	Presión	Nivel de intensidad L	Potencia acústica relativa
Umbral de sonido	0.00002 Pa	0 dB	1
Respiración	0.000063 Pa	10 dB	10^1
Ruido de hojas	0.0002 Pa	20 dB	10^2
Cuchicheo	0.00063 Pa	20 dB	10^3
Conversación (separación 1 m)	0.002 Pa	40 dB	10^4
Violín (pianísimo)	0.0036 Pa	45 dB	$10^{4.5}$
Ruido en sala de clase	0.0063 Pa	50 dB	10^5
Altoparlante (fuerte)	0.02 Pa	60 dB	10^6
Ruido callejero fuerte	0.063 Pa	70 dB	10^7
Grito fuerte	0.2 Pa	80 dB	10^8
Orquesta sinfónica (fortísimo)	2.0 Pa	100 dB	10^{10}
Discoteca	6.3 Pa	110 dB	10^{11}
Bocina de camión (a 1 m)	6.3 Pa	110 dB	10^{11}
Turbina de avión	20.0 Pa	120 dB	10^{12}
Martillo neumático	20.0 Pa	120 dB	10^{12}
Umbral del dolor	63.0 Pa	130 dB	10^{13}

Cuadro 15.2 Intensidad del sonido producido por varias fuentes.

15.5. Intensidad

Hemos definido un *tono* como el sonido producido por una fuente sonora que realiza oscilaciones periódicas. Además de la frecuencia hay otras dos propiedades básicas que caracterizan a un tono; éstas son su intensidad y su timbre. En la presente sección analizaremos algunos aspectos relacionados con la intensidad.

Como sabemos, un sonido puede tener un amplio rango de intensidades. Un sonido débil puede ser no audible; por otro lado, un sonido intenso puede producir dolor, e incluso lelgar a romper el tímpano.

¿Cómo podríamos medir la intensidad de un sonido? Es bien sabido que un aumento de la presión del aire conlleva un aumento de su densidad. Esto permite usar las variaciones de la presión del aire generadas por una onda sonora para caracterizar su intensidad. En la práctica se usa el valor *efectivo* (dado por la *raíz del valor cuadrático medio*)

$$\Delta P_{\text{eff}}(x) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau (P(x, t) - P_0)^2 dt}.$$

Para un tono puro $P(x, t) = P_0 + \hat{p} \cos(kx - \omega t)$, el valor de la presión efectiva es $\Delta P_{\text{eff}}(x) = \hat{P}/\sqrt{2}$.

En el sistema de unidades *MKS*, la unidad de presión es el *Pascal*. Recordemos que un Pascal equivale a proximadamente un cien milésimo de la presión atmosférica.

Cuando se escucha un tono, la presión atmosférica que actúa sobre el tímpano no es uniforme, sino que varía periódicamente. Experimentalmente se encuentra que, para que el oído sea capaz de percibir un sonido, la variación de la presión efectiva debe ser al menos de unos 0.00002 Pa. Esta *presión umbral* es pequeñísima —de sólo $2 \cdot 10^{-10}$ atmósferas— y muestra la extraordinaria sensibilidad de nuestro sistema auditivo.

Otra unidad usada comúnmente para caracterizar el nivel de intensidad de un sonido es el *decibel* (dB). La tabla ?? muestra la magnitud de las variaciones de presión atmosférica generadas por varias fuentes de sonido, como también su equivalencia en dB. El nivel de intensidad (para designarlo usaremos la letra L) viene definido por

$$L = 20 \log_{10} \left(\frac{\Delta P_{\text{eff}}}{P_u} \right) \quad \text{dB} ,$$

donde $P_u \equiv 0.00002$ Pa es la presión efectiva para el umbral de sonido.

La potencia acústica, por unidad de área, viene dada por

$$I(x) = \frac{\Delta P_{\text{eff}}^2}{\rho_0 c} ,$$

donde c es la velocidad del sonido y ρ_0 la densidad de masa del medio en que éste se propaga. (La densidad del aire, en la vecindad de la superficie terrestre, a 20°C es aproximadamente $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$).

También se muestra en la tabla la potencia acústica relativa de los distintos sonidos.

Evaluemos ΔP_{eff} para una suma de dos perturbaciones sinusoidales:

$$P(x, t) = P_0 + \hat{P}_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \hat{P}_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t) .$$

Para esta magnitud al cuadrado se tiene

$$\begin{aligned} (\Delta P_{\text{eff}})^2 &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (P(x, t) - P_0)^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [\hat{P}_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \hat{P}_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \hat{P}_1^2 \cos^2(k_1 x - \omega_1 t) dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \hat{P}_2^2 \cos^2(k_2 x - \omega_2 t) dt \\ &\quad + \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \hat{P}_1 \hat{P}_2 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \cos(k_2 x - \omega_2 t) dt \\ &= (\Delta P_{\text{eff},1})^2 + (\Delta P_{\text{eff},2})^2 + \text{término de interferencia} \end{aligned}$$

Si las frecuencias son diferentes, el término de interferencia no contribuye ya que el integrando es oscilatorio. De esta manera se obtiene que

$$(\Delta P_{\text{eff}})^2 = (\Delta P_{\text{eff},1})^2 + (\Delta P_{\text{eff},2})^2 .$$

Como la intensidad por unidad de área de un sonido es proporcional a $(\Delta P_{\text{eff}})^2$, se obtiene que la intensidad de dos sonidos superpuestos es simplemente la suma de la intensidad de cada uno de ellos por separado.

El rango dinámico del oído es enorme: Entre el umbral de audibilidad y el umbral del dolor, las ondas sonoras difieren en un factor 10^{13} , en cuanto a la energía transportada por unidad de tiempo.

Cabe señalar que la sensibilidad del oído depende fuertemente de la frecuencia del sonido (ver figura ??), siendo máxima para frecuencias de entre 500 y 6.000 Hz. El oído es relativamente sordo para frecuencias mucho más altas o mucho más bajas que éstas. Por ejemplo, para un sonido de 20 Hz, la variación mínima de presión requerida para oírlo es casi 10^4 veces mayor que para un sonido de 1000 Hz. Las líneas continuas en la figura ?? unen puntos correspondientes a estímulos sonoros de tonos puros que el oído humano percibe como de la misma intensidad. Así, un sonido de 20 Hz debe tener una intensidad de alrededor de 90 dB para que se perciba como si tuviera la misma intensidad que un sonido de 1000 Hz a 30 dB.

Lo expuesto en los párrafos anteriores corresponde a resultados que pueden obtenerse experimentalmente, midiendo las propiedades de los sonidos con instrumentos físicos. Esto, sin embargo, no siempre coincide necesariamente con lo que una persona percibe. Analicemos entonces lo que subjetivamente tal persona escucha en lo que a intensidad del sonido se refiere.

Si consideramos un sonido de 1000 Hz, para un humano, la intensidad del sonido aumenta aproximadamente al doble cada vez que hay un aumento de intensidad de 10 dB. O sea: de dos sonidos que difieren en 20 decibeles, uno es percibido como si fuera cuatro veces más intenso que el otro; si difieren en 30 decibeles, uno parece ser ocho veces más intenso que el otro. ¡La sensación de intensidad es proporcional al logaritmo del estímulo!

15.6. Propagación del sonido

Reflexión y absorción

Volvamos a las ondas sonoras y analicemos algunos fenómenos que pueden modificarlas en su trayecto desde la fuente sonora hasta su detección por nuestro sistema auditivo. Uno de ellos es la reflexión. Una onda de sonido se refleja especularmente al chocar con un objeto de al menos el tamaño de su longitud de onda, interpuesto en su camino. El sonido se refleja bien en superficies duras y rígidas, y mal en superficies porosas, blandas y deformables. Al incidir el sonido sobre, por ejemplo, un cortinaje, hay varios fenómenos que causan que se absorba la energía de la onda sonora, siendo el más importante el debido al roce viscoso con el aire.

Para vislumbrar lo que ocurre en el interior del cortinaje ilustremos primero el efecto del roce en un caso más familiar. Consideremos un río no muy turbulento. A pesar de que el río fluye y en el centro su velocidad puede llegar a ser de varios

Material	Frecuencia (Hz)					
	125	250	500	1000	2000	4000
Pared de ladrillos	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06
Pared de ladrillos estucada y pintada	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02
Paneles de madera terciada	0.60	0.30	0.10	0.09	0.09	0.09
Piso de madera	0.15	0.11	0.10	0.07	0.06	0.07
Cortinaje grueso	0.14	0.35	0.55	0.72	0.70	0.66
Alfombra gruesa sobre piso de concreto	0.02	0.06	0.15	0.40	0.60	0.60
Vidrio de una ventana	0.30	0.20	0.20	0.10	0.07	0.04
Butaca (sin ocupar)	0.20	0.40	0.60	0.70	0.60	0.60
Butaca ocupada	0.40	0.60	0.80	0.90	0.90	0.90
Silla metálica o de madera	0.02	0.03	0.03	0.06	0.06	0.05

Cuadro 15.3 Coeficiente de absorción de sonido para algunos materiales. Un coeficiente de absorción igual a 1 significa absorción total.

metros por segundo, cerca de la orilla el agua estará prácticamente en reposo. Se tiene pues que en distintos sectores del río el agua avanza con distintas velocidades. Este movimiento relativo de aguas vecinas ocasiona roce y disipa energía de movimiento. (Si no fuera por este roce, el agua de un río debería correr cada vez más rápido a medida que se acerca al mar.) Algo análogo ocurre con el aire del cortinaje. El aire muy cercano a las fibras está siempre prácticamente en reposo. El sonido que incide sobre el cortinaje sólo puede inducir a moverse a las moléculas del aire que no están muy cerca de las fibras. Por consiguiente, en el interior del corinaje hay distintos sectores del aire con distintas velocidades; la fricción, consecuencia de la viscosidad del aire, se encarga de disipar la energía de la onda sonora.

Existen además otros mecanismos que contribuyen a la atenuación de una onda sonora cuando es reflejada por una superficie. Sin entrar en más detalles, mencionamos algunos de ellos:

- a) La transmisión térmica de energía desde la onda sonora a la superficie reflectora.
- b) La conducción de sonido desde el reflector hacia otras estructura y ambientes.
- c) La deformación no elástica que la onda sonora refleja en el “reflector”.

La tabla 15.4 muestra la fracción de la energía de un sonido que es absorbida al reflejarse en diversos materiales. Se observa que, para un sonido de 1000 Hz, una pared sólida de ladrillos refleja del orden de un 98 % del sonido que incide sobre ella, mientras que un cortinaje grueso absorbe cerca de un 72 %. Por ello en una sala de conciertos hay que evitar exagerar en felpas y alfombras para disminuir el ruido

ambiente, ya que esto podría causar serios problemas de acústica, al eliminarse, en muy alto grado, los rebotes de los sonidos en la sala.

Observemos cómo distintos materiales absorben de manera distinta a los sonidos. Por ejemplo, una pared de madera terciada absorbe eficientemente los sonidos de frecuencia baja y sólo en un grado mucho menor los de frecuencias altas. Lo contrario ocurre con un cortinaje grueso: éste es un absorbente más efectivo para sonidos de frecuencias altas.

Acústica de salas

Volvamos a la reflexión de las ondas sonoras. Como es fácil imaginarse, tal reflexión juega un papel importante en la acústica de salas y piezas. La percepción sonora en una sala de conciertos depende de la intensidad y de la relación temporal entre el *sonido directo* —el que viaja en línea recta desde la fuente sonora hasta el receptor— y el *sonido indirecto* —el reflejado por las paredes de la sala.

Empíricamente, una diferencia de tiempo entre el sonido directo y el indirecto menor que 0.05 s resulta ser acústicamente favorable. Las reflexiones en este caso no son molestas para entender la voz hablada, todo lo contrario, aumentan la intensidad del sonido que llega al oído y, en el caso de la música, favorecen la amalgamación de los sonidos, contribuyendo al colorido musical.

Por otra parte, diferencias de tiempo entre el sonido directo y el indirecto aproximadamente mayores que 0.05 s son perjudiciales para entender la voz hablada y para la óptima percepción de la música, si ambos tienen intensidades similares. En efecto, 0.05 segundos es aproximadamente el tiempo mínimo que requiere el oído para percibir el sonido original y el reflejado como dos sonidos diferentes. Si el tiempo es menor, los dos sonidos, el directo y el indirecto, se confunden y el oído los acepta como uno solo.

Ejercicio

Demuestre que lo expuesto en el párrafo anterior limita el radio de las conchas acústicas a aproximadamente ocho metros.

Cuando el sonido es reflejado en forma reiterativa se tiene lo que se conoce como *reverberación*. Paredes paralelas que reflejan bien el sonido favorecen este fenómeno. La reverberación en las salas de conciertos se puede minimizar recurriendo a superficies inclinadas o absorbentes. Cuando la reverberación es excesiva, situación que ocurre en la mayoría de las grandes iglesias, los distintos tonos de una melodía comienzan a confundirse y si, por ejemplo, hay un coro cantando, al público le parecerá que la ejecución es poco precisa. La reverberación puede incluso llegar a ser tan seria que termina por desorientar a los mismos músicos.

La figura 15.91 muestra un caso típico de la evolución temporal a la que está expuesto un oyente en una sala de conciertos cuando en el escenario algún músico toca con su instrumento un sonido continuo durante el intervalo temporal $[t_i, t_f]$.

Figura 15.91

A pesar de que el sonido comienza a emitirse en el instante t_i , éste llega recién en el instante t_d hasta el oyente. El producto de la velocidad del sonido c por la diferencia de tiempo $(t_d - t_i)$ es igual a la distancia L que separa al oyente del músico con su instrumento, o sea, $L = c \cdot (t_d - t_i)$.

Analicemos detalladamente la figura 15.91. Durante el intervalo de tiempo $[t_i, t_d]$, el oyente sólo escucha el *ruido de fondo*, que necesariamente siempre está presente. Para el caso mostrado en la figura, éste es de unos 30 dB. En el instante t_d , el oyente percibe el sonido directo del instrumento; supondremos que la intensidad del sonido directo corresponde a unos 70 decibeles. Si la sala no tuviese paredes o un cielo, el nivel de intensidad se mantendría en ese valor. En una sala, sin embargo, las sucesivas reflexiones incrementarán paulatinamente la intensidad del sonido. En el instante t_r llega al oyente el primer sonido reflejado. Tal como ya se señaló, es importante que el lapso transcurrido entre t_d y t_r no sea superior a $1/20$ de segundo, para que el oyente no perciba el “escalón”. Para el ejemplo mostrado en la figura, la primera reflexión aumenta la intensidad del sonido en unos 3 decibeles (lo que equivale a aproximadamente un factor 2 en la energía sonora). Sucesivas reflexiones múltiples siguen aumentando la intensidad hasta que la energía por unidad de tiempo del sonido absorbido por las paredes, el alhajamiento y las personas presentes en la sala iguale a la potencia sonora que emana del instrumento. Para nuestro ejemplo, esto ocurre cuando la intensidad del sonido (en el lugar en que se encuentra el oyente) llega a los 80 decibeles. Nótese que la energía sonora en este nivel de intensidad es 10 veces mayor que la del sonido directo (que sólo era de 70 dB), en otras palabras, las múltiples reflexiones del sonido son fundamentales para incrementar su intensidad.

De acuerdo con nuestras suposiciones, el músico deja de tocar su instrumento el instante t_f . Sin embargo, recién en el instante \tilde{t}_d deja de llegar el sonido directo hasta el oyente, percibiendo éste una pequeña disminución en la intensidad (recordemos que para el ejemplo mostrado en el gráfico, el sonido directo es sólo un 10% de la intensidad total). Posteriormente, en el instante \tilde{t}_r , deja de llegar la primera reflexión produciéndose una nueva disminución de la intensidad. El sonido seguirá siendo todavía bastante intenso ya que (como se ha indicado) la mayor parte de la intensidad proviene de las reflexiones múltiples (la reverberación). El decaimiento del sonido es relativamente lento.

Es usual caracterizar la reverberación por el tiempo T^* que tarda la intensidad de un sonido en decaer 60 dB una vez que se apaga la fuente de sonido. Para el ejemplo mostrado en la figura 15.91, $T^* = \tilde{t}^* - \tilde{t}_d$, o sea, aun cuando la intensidad no puede disminuir en 60 decibeles debido al ruido de fondo, para determinar el tiempo de reverberación se extrapola el decaimiento de la intensidad como si el ruido de fondo no existiese, hasta que la disminución es de 60 dB.

En contraposición a lo que ocurre en una sala, al aire libre, la ausencia de reflexiones múltiples hace que el sonido que se escucha sea mucho menos intenso. También, una vez que el músico ha dejado de tocar y el sonido directo deja de llegar al oyente (o sea, para instantes posteriores a \tilde{t}_d), la intensidad del sonido abruptamente baja hasta coincidir con el ruido de fondo.

Hoy en día, las salas de conciertos son diseñadas para que tengan cierta determinada reverberación (un valor considerado óptimo para el tipo de espectáculos para el que se está diseñando la sala). El valor óptimo para música de cámara es menor que para una gran orquesta u ópera. Naturalmente, la cantidad de público presente en la sala también afecta a este valor. Una reverberación óptima ayuda a que los distintos ejecutantes de una pieza musical se escuchen mutuamente. Cuando no hay reverberación, el sonido parece no tener vida, se desvanece rápidamente y los distintos ejecutantes pueden tener dificultades para escucharse mutuamente, haciéndose difícil una óptima presentación (situación usual en conciertos realizados al aire libre).

Se ha determinado que, para frecuencias de entre 500 Hz y 1000 Hz, el valor óptimo de T^* para una sala de conciertos es de entre 1.6 y 2 segundos. El valor típico de T^* para una sala de clases es de 0.5 s; para la famosa sala de óperas *Alla Scala* de Milán, $T^* \sim 1.5$ s; para la del *Teatro Colón* de Buenos Aires, considerada entre las cinco mejores salas de conciertos del mundo, $T^* \sim 1.8$ s; y para la inmensa Catedral de Colonia, este valor es $T^* \sim 13$ s.

Es claro que el tamaño de una sala afecta directamente el tiempo T^* : cuando más grande la sala, tanto más demora el sonido en viajar entre las paredes y, por lo tanto, el tiempo de reverberación T^* aumenta. Una sala para música de cámara, que para su óptima ejecución requiere tiempos de reverberación del orden de 1 s, debe tener un volumen de entre 500 y 5000 m³. Para la representación de una ópera, el tiempo de reverberación óptimo es de alrededor de 1.6 s, lo que se logra en salas con un volumen de entre 10000 y 30000 m³. En salas grandes hay que cuidar que el tiempo transcurrido entre el sonido directo y la primera reflexión no sea mayor que 1/20 s (de otro modo, los dos sonidos no se amalgaman sino que se escuchan como dos sonidos separados). Esto usualmente se logra suspendiendo desde los cielos de la sala y del escenario, grandes paneles reflectores. Los paneles ubicados sobre el escenario son además fundamentales para que los músicos se escuchen bien unos a otros. Si estos paneles se encuentran suspendidos a más de 6 m, se hace muy difícil ejecutar una obra musical en forma completamente coordinada.

Atenuación del sonido

La experiencia cotidiana muestra que, a medida que nos alejamos de una fuente de sonido, su intensidad disminuye. La principal razón de esto es puramente geométrica. Si rodeamos la fuente sonora con cáscaras esféricas concéntricas imaginarias (ver figura 15.92, una de radio R y otra de radio $2R$), observamos que la onda sonora, al llegar a la cáscara exterior, debe repartirse sobre una superficie mucho mayor que sobre la cáscara interior.

Figura 15.92

Como el área de la esfera exterior es cuatro veces el área de la interior, la razón de la potencia sonora por unidad de área entre ambas esferas, también será cuatro. Como 3 decibeles corresponden a un factor 2 en la potencia acústica, un factor 4 corresponderá a 6 dB. O sea, al alejarnos de la fuente sonora aumentando la distancia al doble, la intensidad del sonido, por razones puramente geométricas, disminuye en 6 decibeles.

En general, para una fuente puntual, en ausencia de reflexiones y refracciones, la intensidad del sonido disminuye, por razones geométricas, en forma proporcional al inverso de la distancia al cuadrado.

La viscosidad del aire también afecta a la intensidad de la onda sonora en su propagación libre. Como ya sabemos, un sonido genera pequeñas oscilaciones de fracciones de un milímetro de las moléculas del aire (recordemos las oscilaciones de las tres moléculas mostradas en la figura 15.84). Al analizar cuidadosamente esa figura se observa que las moléculas no oscilan en la misma dirección en el mismo instante; de hecho, moléculas ubicadas en regiones separadas por media longitud de onda siempre tienen velocidades opuestas. Esto significa que también durante la propagación libre de una onda sonora hay, entre distintos sectores del medio, velocidades relativas. Pero, como ya hemos visto, cuando distintos sectores de aire se mueven unos respecto a los otros, debido a la viscosidad habrá necesariamente disipación de energía (roce).

Afortunadamente para sonidos de interés musical, estas regiones o sectores en movimiento relativo están relativamente distantes unas de las otras (separados por media longitud de onda) y, por consiguiente, el efecto de la viscosidad es mucho menor que en el caso del cortinaje mencionado anteriormente, donde las distancias involucradas eran las que hay entre fibras vecinas. Sin embargo, cuando la longitud de onda es pequeña (como ocurre en los sonidos de altas frecuencias), la absorción de la intensidad debida a la viscosidad del aire es importante.

La tabla adjunta muestra la distancia que alcanza a recorrer el sonido en el aire antes de perder la mitad de su intensidad debido al roce viscoso (en la tabla no está considerado el efecto de la disminución de la intensidad del sonido debido al factor geométrico).

Frecuencia del Sonido	Distancia
1 kHz	22.2 km
10 kHz	220 m
60 kHz	6.14 m
100 kHz	2.2 m
1 MHz	2.2 cm

Notemos cómo la distancia disminuye rápidamente a medida que aumenta la frecuencia del sonido. Esto explica por qué sólo se percibe el retumbar grave como efecto de una fuerte explosión ocurrida lejos.

Superposición de ondas sonoras

El hecho que la ecuación de ondas sea lineal, significa que una combinación lineal de soluciones también será solución. Esto se conoce con el nombre de *principio de superposición*.

El principio de superposición permite entender un fenómeno interesante. En la figura ?? se muestra la representación gráfica de la presión de dos sonidos que tienen la misma amplitud y casi la misma frecuencia (situación que se presenta a menudo al afinar un piano o una guitarra). ¿Cómo percibe el oído el sonido de ambas cuerdas pulsadas simultáneamente?

De acuerdo al principio de superposición, debemos sumar ambas perturbaciones. También se muestra tal suma en la figura. Observamos que la suma consiste en oscilaciones con esencialmente la misma frecuencia que las ondas originales, moduladas por una oscilación de frecuencia mucho menor. La amplitud de la onda-suma no es constante sino que varía periódicamente.

Ejercicio:

Muestre que la suma de ambas ondas consiste en rápidas oscilaciones con frecuencia $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, cuya amplitud viene modulada por una frecuencia mucho más lenta, igual a $(\nu_2 - \nu_1)$.

Estas variaciones de amplitud de la onda suma originan una variación en la

intensidad del sonido que es fácil de percibir y se conoce con el nombre de *pulsaciones* o *batimientos*. Al afinar una guitarra, dos cuerdas estarán bien afinadas si al hacer sonar con ellas simultáneamente la misma nota, no se escuchan pulsaciones. Si, por ejemplo, se perciben pulsaciones de 2 Hz, será porque la frecuencia de las dos cuerdas difieren en esa magnitud.

15.7. Timbre

Una de las características de un tono que aún no hemos abordado es el timbre, la propiedad que permite distinguir, por ejemplo, entre una nota tocada por una flauta y la misma nota ejecutada por un violín.

Al pulsar, por ejemplo, una cuerda de guitarra, el movimiento resultante no corresponderá al asociado a un modo normal puro, sino que será el resultado de una superposición de numerosos armónicos. Aun cuando el movimiento de la cuerda se deba a una suma de distintos modos de oscilación (de frecuencias ν_1 , $2\nu_1$, $3\nu_1$, $4\nu_1$, etc.), el movimiento resultante tendrá la frecuencia ν_1 , siendo, por consiguiente, también ésa la frecuencia del tono generado por ella.

¿Será posible invertir la argumentación anterior? Al observar un movimiento periódico complejo de frecuencia ν_1 , ¿podrá descomponerse este movimiento en una superposición de modos normales que tengan frecuencias que sean múltiplos enteros de ν_1 ? La respuesta es sí, procedimiento que se conoce con el nombre *análisis de Fourier*. (Esencialmente coincide con lo realizado en la sección 16.5).

Mostremos algunos ejemplos concretos. En las figuras ??, ?? y ?? se presenta la descomposición de Fourier (o *descomposición espectral*) de tres movimientos periódicos compuestos (por ejemplo, la presión de tonos musicales en función del tiempo).

En cada caso, en la parte superior se despliegan las variaciones de la presión (en función del tiempo) generadas por los tonos y en la parte inferior, su descomposición en armónicos. En todos los casos se grafica la función original sobre un intervalo temporal que abarca cuatro períodos completos. Para simplificar la discusión, nos hemos restringido a mostrar ejemplos para los cuales la variable original es una superposición de a lo sumo los cuatro primeros armónicos. Al lado derecho de cada uno de los armónicos, se indica la amplitud con que contribuye al tono original.

Observe que:

- El tono compuesto resultante de la superposición de los armónicos es siempre un tono cuya frecuencia coincide con la del primer armónico (ambos tienen la misma periodicidad). Lo anterior es incluso cierto cuando el 1^{er} armónico está ausente, es decir, cuando contribuye con una amplitud nula (ver figura ??).
- Las amplitudes de los distintos armónicos mostrados en las figuras ?? y ?? son iguales. A pesar de ello, la superposición da origen a tonos compuestos que

en ambos casos tienen una evolución temporal bastante distinta. La diferencia entre los dos ejemplos radica en que el segundo armónico en la figura ??, se ha desplazado en $1/4$ de longitud de onda respecto al caso mostrado en la figura ??.

Los tonos compuestos mostrados en las figuras anteriores, por tener todos la misma frecuencia, los escuchamos como teniendo todos la misma altura. Sin embargo, no todos ellos tendrán el mismo *timbre*. ¿Cuál es la propiedad de un tono que permite que exista una amplia gama de timbres? La respuesta a este interrogante fue descubierta por Hermann von Helmholtz (1821-1894):

Para sonidos continuos, el timbre de un tono depende sólo de la amplitud de los distintos armónicos que lo componen.

El oído es bastante sensible a la intensidad (o amplitud) de los distintos armónicos de un tono compuesto, siendo, por otra parte, esencialmente insensible a la fase (o “corrimiento”) con que ellos aparecen en su descomposición. De acuerdo a este notable descubrimiento de von Helmholtz, deducimos que los tonos mostrados en las figuras ?? y ?? tienen el mismo timbre. Los sonidos generados por la onda mostrada en la figura ?? y ??, difieren en el timbre, pues, en su descomposición espectral, los distintos armónicos que lo componen aparecen con intensidades distintas.

La elevación o altura de un tono resulta determinada sólo por su frecuencia ν . Lo anterior sigue siendo válido aun cuando en la descomposición espectral del tono, el armónico fundamental de frecuencia ν esté ausente.

En la caracterización del timbre de un sonido continuo, lo único relevante para el oído humano son las amplitudes de los distintos armónicos de su descomposición espectral. Por esta razón, para analizar el timbre, en lugar de mostrar el comportamiento temporal de un tono compuesto, basta graficar las amplitudes de los distintos armónicos que lo configuran.

La figura ?? muestra la intensidad relativa (en decibeles) de los distintos armónicos en que se descompone un sonido típico de un clarinete. En este ejemplo se observan 26 armónicos distintos. Para los armónicos de orden bajo, dominan los con n impar; lo que da origen al característico sonido “aterciopelado” del clarinete.

15.8. Consonancia y disonancia

El descubrimiento de las relaciones existentes entre la música, la matemática y la física se remonta al siglo VI antes de Cristo, época en que la *Escuela de Pitágoras*

realizó un exhaustivo estudio de la cuerda vibrante (monocuerda). Los descubrimientos de Pitágoras y sus discípulos fueron el punto de partida de todos los estudios posteriores de la armonía en la música y, sin lugar a dudas, influyeron en forma importante en lo que hoy día conocemos como la música del mundo occidental.

Pitágoras se dio cuenta de que si una cuerda tensa se acortaba a la mitad, entonces la frecuencia del sonido aumentaba al doble, elevándose su sonido en una *octava*. Si, por ejemplo, el tono de la cuerda entera corresponde a un *Do*, las oscilaciones de la mitad de la cuerda generan el *Do'* siguiente, una octava más agudo (para distinguirlo del primer *Do*, le hemos agregado una comilla).

El descubrimiento importante de la escuela de Pitágoras consistió en percatarse de que los intervalos musicales más consonantes con respecto a la cuerda total—es decir, los que suenan más agradables al oído al sonar conjuntamente—se obtienen cuando, al acortarla, el pedazo de cuerda que oscila corresponde a una fracción (irreductible) n/m de la cuerda completa, en la que tanto el numerador n como el denominador m son enteros pequeños. Cuanto más pequeños son estos enteros, tanto más consonante se percibe el sonido simultáneo de los dos sonidos.

Al permitir que vibre la mitad de la cuerda, la frecuencia aumenta en un factor $2/1$, siendo el intervalo entre los dos sonidos lo que se conoce con el nombre de *octava*.

Algunas notas de la escala natural mayor

Al permitir que vibren $2/3$ de la longitud de una cuerda, la frecuencia aumenta en un factor $3/2$. El intervalo entre los sonidos nuevo y original se denomina *quinta justa* o *quinta perfecta*. El intervalo *Do-Sol* corresponde a una quinta justa, y por lo tanto se tiene

$$\frac{\nu_{\text{Sol}}}{\nu_{\text{Do}}} = \frac{3}{2}.$$

Esta última ecuación permite, conociendo la frecuencia del *Do*, determinar la frecuencia del *Sol*.

Continuando de la misma manera, el cociente que sigue en complejidad es $3/4$. Al acortar una cuerda a $3/4$ de su longitud original, la frecuencia del sonido emitido aumenta en un factor $4/3$. En este caso, el intervalo musical entre el tono original y el nuevo se denomina *cuarta justa*. El intervalo *Do-Fa*, como también el *Sol-Do'*, corresponden a cuartas justas. En este caso se tiene

$$\frac{\nu_{\text{Fa}}}{\nu_{\text{Do}}} = \frac{4}{3}.$$

Si las frecuencias de dos sonidos están en la razón 1:1, entonces tienen la misma frecuencia, y se dice que están al *unísono*.

El unísono, la octava, la quinta y la cuarta justa, son los intervalos musicales más consonantes y tienen su origen en las fracciones más simples: $1/1$, $1/2$, $2/3$ y

$3/4$, respectivamente. Estos intervalos desempeñan un papel especial en la armonía musical.

En la mayor parte de la música del mundo occidental, el desarrollo armónico y melódico de las piezas musicales transcurre en una *tonalidad* y en torno a una nota central o eje, la así llamada *tónica*. La última nota de la melodía de una pieza musical coincide, generalmente, con la tónica.

Las notas musicales a las que se llega partiendo de la tónica por medio de un intervalo de quinta y cuarta justa tienen nombres especiales: se llaman *dominante* y *subdominante* de la tonalidad, respectivamente. Si la tónica es el *Do*, entonces la dominante corresponde a la nota *Sol* y la subdominante al *Fa*.

Evaluemos la razón entre las frecuencias de las notas *Sol* y *Fa*. Usando álgebra elemental se encuentra que

$$\frac{\nu_{\text{Sol}}}{\nu_{\text{Fa}}} = \frac{\text{Sol}}{\text{Fa}} = \frac{\text{Sol Do}}{\text{Do Fa}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

(Observe que hemos usado la razón de dos notas para referirnos en realidad al cociente de sus frecuencias.) Los enteros que intervienen en la última fracción ya no son tan pequeños y tal intervalo (que se llama *segunda mayor*) suena disonante.

Volvamos a la monocuerda y acortémosla ahora a $4/5$ de su longitud original. La frecuencia de la cuerda aumentará en un factor $5/4$. Esta fracción aún está constituida por enteros relativamente pequeños y los dos sonidos, separados por un intervalo que se suele llamar *tercera mayor*, efectivamente se perciben como consonantes. El intervalo *Do-Mi* corresponde a una tercera mayor y, por supuesto, se tiene que

$$\frac{\nu_{\text{Do}}}{\nu_{\text{Mi}}} = \frac{5}{4}.$$

El acorde perfecto mayor

Hasta aquí hemos establecido las frecuencias (relativas) de las notas *Do*, *Mi*, *Fa*, *Sol* y *Do'*. ¿Cómo podemos obtener las demás notas de la escala musical?

Para ello introduzcamos la noción de acorde. El acorde más importante de la música occidental es el acorde perfecto mayor; por ejemplo, el dado por las notas *Do – Mi – Sol*. El placer producido al escucharlo se debe a que la razón entre las frecuencias, $4:5:6$, sólo involucra números enteros pequeños¹.

¹Se podría argumentar que un acorde formado por tres notas cuyas frecuencias están en la razón $3:4:5$, debe producir un sonido aún más placentero que el acorde perfecto mayor. Esto es efectivamente así. Pero observemos que ese acorde es esencialmente el mismo que el acorde perfecto mayor: al trasladar la nota más grave del acorde $3:4:5$ a la octava superior (el 3 se transforma en 6), se obtiene un acorde cuyas frecuencias están en la razón $4:5:6$. El acorde *Sol – Do' – Mi'* está compuesto por notas cuyas frecuencias están en la razón $3:4:5$ – tal acorde es simplemente una “variación” (en el lenguaje técnico, la segunda inversión) del acorde perfecto mayor *Do, Mi, Sol*. Cuando las notas están en la razón $1:2:3$ no se tiene realmente un acorde, ya que la segunda nota es esencialmente la misma nota que la primera, sólo que trasladada en una octava. Lo mismo sucede con notas en la

Los acordes perfectos mayores, basados en la tónica, subdominante y dominante, permiten encontrar las frecuencias de las demás notas de la escala musical mayor (ver problemas de la sección 15.11). La figura ?? muestra las razones para las notas sucesivas de la escala *Do mayor* en la afinación natural o *justa*.

15.9. Oscilaciones de una columna de aire

Las oscilaciones de una columna de aire cilíndrica completamente encerrada son en muchos aspectos análogas a las oscilaciones de una cuerda con ambos extremos fijos. Recordemos que ambos movimientos satisfacen la misma ecuación diferencial – la *ecuación de ondas*. La diferencia más importante entre estos dos sistemas es que, en un caso, la cuerda realiza oscilaciones transversales, mientras que, en el otro caso la masa de aire realiza oscilaciones longitudinales.

En los demás aspectos, las oscilaciones de una columna de aire cerrada en ambos extremos, que denotaremos por $c-c$, y las oscilaciones de una cuerda con ambos extremos fijos, tienen muchas semejanzas. En efecto:

1. Tanto en la cuerda como en la columna de aire, el movimiento es nulo en los extremos.
2. Ambos sistemas poseen varios modos de oscilación, llamados modos normales o armónicos. Estos modos tienen frecuencias múltiplos de la del modo de oscilación fundamental (o primer armónico). La figura ?? da una idea de cómo oscila el aire en el interior de la columna en el modo fundamental y en el segundo modo.
3. La longitud de onda de la oscilación correspondiente al n -ésimo modo, en ambos casos viene dada por

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

4. La relación que existe entre la frecuencia ν y la longitud de onda λ , en ambos casos, es

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (15.11)$$

Para la columna de aire, c es la velocidad del sonido en ese medio.

A partir de las dos últimas ecuaciones, deducimos que

$$\nu_n = n \frac{c}{2L}, \quad (15.12)$$

relación 2:3:4; en este caso, la tercera nota esencialmente coincide con la primera.

es decir, la frecuencia es inversamente proporcional al largo del tubo.

En la figura ?? se muestra la presión del aire en el interior de la columna cuando ésta oscila en el modo fundamental y en el segundo armónico. La presión es alta (por encima de la presión ambiental p_0) si el aire está comprimido, y baja, cuando está enrarecido.

La velocidad del aire para una columna de aire c—c siempre es nula en los extremos. En la figura ??, velocidades positivas indican que el aire se mueve hacia la derecha; velocidades negativas, que se mueve hacia la izquierda. Cuando la presión alcanza uno de sus valores extremos (es decir, es mínima o máxima), el aire se encontrará momentáneamente en reposo. Algo similar ocurre con las oscilaciones de una cuerda (o las oscilaciones de un columpio): cuando el desplazamiento desde su posición de equilibrio es máximo, el sistema se encontrará momentáneamente en reposo.

Columna de aire abierta por un extremo

Analicemos las oscilaciones que pueden generarse en una columna de aire cilíndrica, cerrada en un extremo y abierta en el otro, que denotaremos por c—a.

La clave para poder analizar este problema consiste en darse cuenta de que el aire ubicado en la vecindad del extremo abierto del cilindro, por estar en contacto con el exterior, estará (en primera aproximación) sometido en todo instante a la presión atmosférica.

Ahora notemos que en la columna de aire c—c, cuando la columna de aire oscila en el modo fundamental, la presión en el centro nunca varía, coincidiendo siempre con la presión atmosférica p_0 . Esto significa que, si la columna c—c oscila en su modo fundamental, la podemos cortar por la mitad, y alejar una de las mitades sin que se modifique el modo de oscilación de la parte restante. En particular, para el pedazo de cilindro c—a de longitud $L' = L/2$ que queda, no hay cambio de la longitud de onda y, por consiguiente, tampoco en la frecuencia. Ahora bien, en la columna de aire c—c la longitud de onda del modo fundamental es el doble del largo L . Al acortarla por la mitad, la longitud de onda del modo fundamental resulta ser cuatro veces el largo L' del cilindro que queda, es decir, $\lambda = 4L'$.

Reiteramos que la columna de aire c—c cercenada al centro es precisamente un cilindro c—a. De esta manera, hemos encontrado la frecuencia ν de las oscilaciones correspondientes al modo fundamental ($n = 1$) de tal sistema:

$$\nu_1 = \frac{c}{4L'}.$$

La figura ?? muestra la velocidad del aire y la presión en el interior del tubo (cerrado en el extremo O y abierto en L'). Notemos que estas figuras coinciden exactamente con la mitad izquierda de las correspondientes al modo fundamental de la columna c—c, mostradas en las figuras ?? y ??.

Para obtener el segundo armónico del sistema c—a podemos usar un “truco” parecido. Notemos que la columna de aire c—c, al oscilar en el segundo armónico, en

los lugares $L/4$ y $3L/4$, la presión nunca varía, coincidiendo siempre con la atmosférica. Luego, podemos cortar el tubo en el lugar $3L/4$ y descartar la parte más corta, sin modificar las vibraciones del aire en el interior de la parte más larga. De esta manera, encontramos la frecuencia de oscilación para el segundo armónico de una columna cilíndrica de aire c—a. Designemos su longitud con la letra L' . Se deduce que $3\lambda/4 = L'$. La frecuencia de este segundo armónico es, por lo tanto,

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3c}{4L'} = 3\nu_1.$$

Continuando del mismo modo, se encuentran las frecuencias de todos los demás modos de oscilación de una columna de aire c—a. Las frecuencias posibles resultan ser los múltiplos impares de la frecuencia del modo fundamental $\nu_1 = v/(4L)$, es decir:

$$\nu_n = (2n - 1) \frac{c}{4L} = (2n - 1)\nu_1, \quad (15.13)$$

con $n = 1, 2, 3 \dots$

La figura ?? muestra la presión y la velocidad del aire dentro del cilindro cuando la columna oscila en el segundo ($n = 2$) y tercer ($n = 3$) modo normal, respectivamente.

Columna de aire abierta por ambos extremos

Analicemos ahora las oscilaciones que pueden generarse en una columna de aire cilíndrica a—a (abierta por ambos extremos).

En este caso, en la vecindad de ambos extremos (abiertos) del cilindro, la presión del aire será en todo instante igual a la presión atmosférica p_0 . Nuevamente podemos descubrir cuáles serán los modos de oscilación en este caso, cortando el cilindro c—c en lugares apropiados (donde la presión es p_0).

En la figura ?? se observa que el modo fundamental del cilindro c—c no posee dos nodos de presión, es decir, lugares en que la presión del aire no varíe, pero que el segundo armónico sí los tiene. Cortemos el cilindro c—c (al oscilar en el segundo armónico) en los lugares $x = L/4$ y $x = 3L/4$. De este modo, la sección central dará el modo fundamental de un tubo cilíndrico a—a de largo $\bar{L} = L/2$. Notemos que $\lambda = 2\bar{L}$, o sea, la longitud de onda es dos veces el largo \bar{L} . La frecuencia del modo fundamental para un tubo abierto en ambos lados será dada por

$$\nu_1 = \frac{v}{2\bar{L}},$$

resultado que coincide con el obtenido del tubo cilíndrico c—c. La figura ?? muestra la presión y la velocidad del aire para el modo de oscilación fundamental en el interior de una columna cilíndrica a—a.

Para obtener el segundo armónico, es casi evidente que la columna de aire tendrá un nodo de presión adicional al centro. La figura ?? muestra cómo se comportan la presión y la velocidad del aire en este caso. La longitud de onda del segundo armónico coincide con el largo \bar{L} del tubo, siendo la frecuencia $\nu_2 = 2\nu_1$.

Modo de Oscilación	n	Cilindro c—c	Cilindro c—a	Cilindro a—a
Fundamental	1	ν_1	ν_1	ν_1
2º modo	2	$2\nu_1$	$3\nu_1$	$2\nu_1$
3º modo	3	$3\nu_1$	$5\nu_1$	$3\nu_1$
4º modo	4	$4\nu_1$	$7\nu_1$	$4\nu_1$
5º modo	5	$5\nu_1$	$9\nu_1$	$5\nu_1$
Frecuencia del modo fundamental	1	$\nu_1 = \frac{c}{2L}$	$\nu_1 = \frac{c}{4L}$	$\nu_1 = \frac{c}{2L}$
Frecuencia del modo n	n	$\nu_n = n\nu_1$	$\nu_n = (2n - 1)\nu_1$	$\nu_n = n\nu_1$

Cuadro 15.4 Frecuencias de los modos normales de oscilación de una columna de aire.

Continuando de esta manera se encuentra que, para el caso de un cilindro abierto en ambos extremos, las frecuencias de los distintos modos de oscilación son expresadas por

$$\nu_n = n \frac{c}{2L} = n\nu_1, \tag{15.14}$$

con $n = 1, 2, 3 \dots$. La tabla adjunta recapitula los resultados de esta sección. Compárela con la tabla análoga para las oscilaciones de una cuerda tensa mostrada en el capítulo anterior.

15.10. Efecto Doppler

Considere un observador que escucha el sonido de una fuente sonora. Supongamos que la fuente sonora genera un sonido continuo de frecuencia ν_0 . Si la separación entre la fuente y el observador varía en función del tiempo, entonces la frecuencia que escuchará el observador no será ν_0 . Este fenómeno se conoce por *efecto Doppler*.

Supongamos que una fuente de sonido fija emite un sonido de frecuencia ν_0 y que el observador se observa con velocidad v . (Suponemos además que no corre viento, es decir, el aire está en reposo para la fuente). La separación de dos máximos de presión sucesivos de la onda sonora es $\lambda_0 = c/\nu_0$, donde c es la velocidad del sonido. Pero como el observador va al encuentro de ellos, el tiempo que tarda en recibir a dos máximos sucesivos será menor, y por lo tanto la frecuencia mayor (ver figura ??). Un simple análisis muestra que la frecuencia que escucha el observador será

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{c + v}{c}. \quad (\text{fuente fija, observador se acerca}).$$

Si en lugar de acercarse, el observador se aleja de la fuente, se debe cambiar el signo de v . En tal caso la frecuencia resulta ser

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{c - v}{c}. \quad (\text{fuente fija, observador se aleja}).$$

Consideremos el otro caso. Supongamos que el observador se encuentra fijo y que la fuente de sonido, que emite un sonido de frecuencia ν_0 , se mueve hacia el observador con una velocidad v (ver figura ??). En este caso, debido a que la fuente se acerca, la longitud de onda (es decir, la distancia entre dos máximos sucesivos de la presión) no será c/ν_0 , sino que algo menor. Un análisis simple muestra que la frecuencia que escucha el observador en este caso será

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{c}{c - v}. \quad (\text{observador fijo, fuente se acerca}).$$

Si en lugar de acercarse, la fuente se aleja, entonces se debe cambiar el signo de v . En tal caso, la frecuencia resulta ser

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{c}{c + v}. \quad (\text{observador fijo, fuente se aleja}).$$

Cono de Mach

Al propagarse un objeto con velocidad supersónica, la *envolvente* de las ondas sonoras que emite el objeto formarán un cono (llamado *cono de Mach*). No hay sonido en el exterior del cono. La envolvente se mueve con la velocidad del sonido. Cuando la envolvente llega a un observador, este escuchará la típica explosión supersónica. El ángulo del cono de Mach viene dado por

$$\sin \phi = \frac{c}{v}.$$

15.11. Problemas

1. El oído humano puede escuchar sonidos cuyas frecuencias varían entre 16 y 20 000 Hz. Encuentre la longitud de onda de estas ondas sonoras.
2. Las variaciones de presión para el umbral del sonido son de sólo 0,00002 Pa. Para comprender lo que significa en la práctica esta pequeñísima magnitud, recuerde cómo se tapan los oídos al descender rápidamente en un ascensor o bajar en automóvil una cuesta; basta descender verticalmente unos veinte metros para sentirlo. Demuestre que el cambio de presión de 2×10^{-10} atm ya se produce al descender sólo 1,6 milésimo de un milímetro!
3. a) Demuestre que la suma de dos sonidos de 0 dB tiene un nivel de intensidad de 3dB.

- b) Tres sonidos por separado, en cierto lugar, tienen un nivel de intensidad de 40, 70 y 80 decibeles, respectivamente. Encuentre el nivel de intensidad que se sentía en ese lugar si las tres fuentes de sonido sonaran simultáneamente.
4. Suponga que en una orquesta, 30 violinistas tocan su violín con la misma intensidad. El nivel de intensidad del sonido que se escucha en cierto lugar de la sala es de 66 dB. ¿Cuál sería la intensidad en ese lugar si sólo tocara un violín?
5. Considere una onda sonora (plana) sinusoidal:

$$P(x, t) = P_0 + \hat{P} \cos(kx - \omega t).$$

(Denotaremos por \hat{P} a la amplitud de la oscilación: en este problema, \hat{a} será un escalar y no un vector unitario.)

- a) Demuestre que la amplitud \hat{u} de las oscilaciones de las moléculas del medio, al paso de la onda sonora viene dada por

$$\hat{u} = \frac{\hat{P}}{\rho_0 c \omega},$$

donde c es la velocidad del sonido y ρ_0 su densidad de masa.

- b) Demuestre que la potencia acústica I transmitida por unidad de área, viene dada por

$$I = \frac{1}{2} c \rho_0 \omega^2 \hat{u}^2.$$

(Note la similitud de esta expresión con la ecuación para la energía transportada por una onda sinusoidal en una cuerda, deducida en el capítulo anterior.)

- c) Demuestre que otra expresión alternativa para la potencia acústica por unidad de área es

$$I = \frac{\hat{P}^2}{2\rho_0 c}.$$

6. a) Las notas musicales $Fa - La - Do'$ corresponden a un acorde perfecto mayor. Usando este hecho, demuestre que la razón entre las frecuencias de las notas La y Do es 5:3.
- b) También el acorde $Sol - Si - Re'$ es un acorde perfecto mayor. Determine la razón de frecuencias entre el Re y el Do .
- c) Determine la razón de frecuencias entre el Mi y el Re . (En la escala mayor, con afinación natural, ¡no todos los intervalos *segunda mayor* son iguales!)

7. Determine el valor de la velocidad del sonido en gas de nitrógeno si este se encuentra a una temperatura de -30°C .
8. Considere las oscilaciones de la columna de aire al interior de un tubo. Demuestre que la frecuencia de un modo normal particular de oscilación varía con un cambio de temperatura de acuerdo a la relación

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta T}{2T}$$

9.
 - a) Encuentre una expresión para el desplazamiento $u(x, t)$ de las moléculas de aire al interior de un tubo c—a, cuando este está oscilando en su tercer modo normal.
 - b) Derivando con respecto al tiempo, encuentre una expresión para la velocidad de las moléculas al interior del tubo.
 - c) Usando la relación

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

encuentre una expresión para la presión $p(x, t)$.

- d) Convéznase de que los resultados anteriores están en concordancia con lo mostrado en la figura ??.
10. Un automóvil, cuyo chofer toca la bocina, se acerca con velocidad v a una pared. El eco que escucha el chofer es una *tercera mayor* más agudo que el sonido de la bocina. Encuentre la velocidad v .
11. Una persona A genera sonido induciendo oscilaciones en el aire encerrado en el interior de un tubo cilíndrico c—a de 20 cm de largo.
 - a) Si las oscilaciones inducidas corresponden al segundo modo normal de oscilación, determine la frecuencia del sonido emitido.
 - b) Supongamos que la persona A se encuentra sobre un carrito abierto que se mueve con velocidad v hacia una gran pared. ¿Cuál es la frecuencia del eco que escucha A ? (Suponga que no corre viento).
 - c) Una persona B se encuentra entre el carrito y la pared. ¿Con qué frecuencia escuchará B el sonido directamente emitido por A y el eco que rebota en la pared?
12. Un plomero debe destapar un tubo que se encuentra obstruido. Al soplar por encima de la apertura del tubo, escucha un sonido de 200 Hz. ¿A qué distancia de la apertura se encuentra la obstrucción?

13. Demuestre que una onda sinusoidal de 1000 Hz, con vibraciones de presión $\Delta P_{\text{eff}} = P_u = 0.00002$ Pa, corresponde aproximadamente a una intensidad de $I \sim 10^{-12}$ W/m².
14. Para un sonido de 1000 Hz, la sensibilidad del oído humano es de aproximadamente 10^{-12} W/m². Encuentre la amplitud de las oscilaciones de las moléculas de aire para un sonido de esa intensidad. Observe que las amplitudes de las oscilaciones son menores que el tamaño de las moléculas de aire.
15. ¿Cuál será la intensidad del sonido (en decibeles) de una bocina de camión cuya potencia acústica es de 5 Watt, si se la escucha a 5 m de distancia? Desprecie los efectos (refracción, difracción, etc.) que modifican a la onda sonora durante su propagación.
16. Un día de verano, en que corre un viento sur de 30 km/hora, un automovilista viaja a 100 km/h hacia el norte. Al hacer sonar la bocina, el chofer al interior del automóvil la escucha emitiendo un sonido de 440 Hz. ¿Con qué frecuencia percibe el sonido una persona, parada junto a la carretera, antes y después de que haya pasado el automóvil?
17. Una persona escucha el sonido de una campana de una iglesia que está a 2 km de distancia. La campana emite un sonido de 500 Hz. Además corre un viento de 50 km/hora, transversal a la línea que une a la persona con la iglesia.
 - a) ¿Cuánto tarda el sonido para propagarse desde la iglesia hasta la persona?
 - b) ¿Con qué frecuencia escuchará la persona el sonido?
18. Un automóvil se mueve con velocidad v hacia un observador A fijo. Se hace sonar la bocina del automóvil, cuya frecuencia es ν_0 . Encuentre la frecuencia del sonido detectado por A , si corre un viento con velocidad \tilde{v} en la misma dirección en que avanza el automóvil.
19. Una persona observa un avión supersónico que vuela horizontalmente con velocidad constante. 10 segundos después de pasar por encima de su cabeza, escucha la “explosión supersónica” del *cono de Mach*. Si en ese instante el avión forma un ángulo de 30° con la normal, ¿cuál es la velocidad del avión y a qué altura está volando?
20. Dos fuentes de sonido puntuales, separadas por una distancia $D = 4$ m, se perciben separadamente, en el punto medio entre las dos, como teniendo intensidades sonoras L de 70 y 50 decibeles, respectivamente.
 - a) ¿Qué intensidad sonora L (en decibeles) tendrá el sonido si se escuchan ambas fuentes en forma simultánea?

- b) ¿En qué lugar entre ambas fuentes uno debe ubicarse para escuchar las dos fuentes con la misma intensidad? (Para resolver este problema, sólo considere los aspectos geométricos del problema, despreciando efectos como la reflexión, refracción, absorción del sonido por objetos en el entorno, y también la atenuación del sonido por mecanismos disipativos.)
21. Un observador A deja caer una fuente sonora desde la azotea de un edificio. Sea ν_0 la frecuencia del sonido que emite la fuente.

Sea $t = 0$ el instante en que la fuente sonora comienza a caer. Determine la frecuencia $\nu(t)$ con que A percibe el sonido. (Observe que hay un tiempo que transcurre entre el instante en que se emite el sonido y el instante en que A lo escucha.)

15.12. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 2

La fórmula barométrica que nos da la presión de la atmósfera en función de la altura es

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{g\rho_0}{P_0}h\right),$$

donde P_0 es la presión atmosférica y $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del aire a nivel del mar. Derivando esta expresión se obtiene

$$\frac{dP(h)}{dh} = -g\rho_0 \exp\left(-\frac{g\rho_0}{P_0}h\right).$$

Evaluando en $h = 0$ (esto es en la superficie terrestre), se encuentra que

$$dP = -g\rho_0 dh.$$

Usando esta relación se deduce finalmente que la altura dh para la cual la presión cambia en $dP = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ es

$$dh = \frac{dP}{g\rho_0} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{9,81 \cdot 1,29} [m] \simeq 1.6 \cdot 10^{-6} [m] = 0,0016 [mm].$$

Solución al problema 5

- a) Derivando $P(x, t)$ respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = -k\hat{P} \sin(kx - \omega t).$$

Pero (de acuerdo a la ecuación (15.5))

$$\frac{\partial P}{\partial x} \simeq \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

luego

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{\gamma P_0} k\hat{P} \sin(kx - \omega t). \quad (15.15)$$

De esta relación deducimos que

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \hat{P} \cos(kx - \omega t),$$

o sea, la amplitud de las variaciones de densidad es

$$\hat{\rho} = \rho_0 \frac{P_0}{\gamma \hat{P}_0}. \quad (15.16)$$

También sabemos que (ver deducción de la ecuación de ondas presentada en la sección 15.3)

$$\rho(x, t) = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Combinando las ecuaciones (15.15) y (15.16) se obtiene que

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{\hat{P}}{\gamma P_0} \cos(kx - \omega t).$$

Integrando se encuentra la función $u(x, t)$ que describe el desplazamiento de las moléculas

$$u(x, t) = -\frac{\hat{P}}{k\gamma P_0} \sin(kx - \omega t).$$

La amplitud de estas oscilaciones de las moléculas de aire es, por lo tanto,

$$\hat{u} = \frac{\hat{P}}{k\gamma P_0}.$$

Pero $k = \omega/c$ y $c^2\rho_0 = \gamma P_0$, luego

$$\hat{u} = \frac{\hat{P}}{\rho_0 c \omega}.$$

- b) Consideremos ahora un cilindro (imaginario) de sección transversal A y longitud $L = cT = \lambda$, con el eje del cilindro orientado a lo largo de la dirección de propagación del sonido. La masa del aire encerrado en ese cilindro es $m = A\lambda\rho_0$. Cada molécula realiza un movimiento armónico de frecuencia angular ω y amplitud \hat{u} . Por lo tanto, la energía total (debido al sonido) de las moléculas encerradas por el cilindro es

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{u}^2.$$

Esta energía, en un tiempo $T = 2\pi/\omega$ avanza en una distancia λ (que es justamente el largo del cilindro), luego la potencia acústica propagada a lo largo del cilindro es

$$\frac{E}{T} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{u}^2\frac{1}{T} = \frac{1}{2}A\lambda\rho_0\omega^2\hat{u}^2\frac{1}{T} = \frac{1}{2}Ac\rho_0\omega^2\hat{u}^2.$$

De esta manera se encuentra que la potencia acústica por unidad de área viene dada por

$$I = \frac{1}{2}c\rho_0\omega^2\hat{u}^2.$$

- c) Usando los resultados de la parte (a) y (b) encontramos

$$I = \frac{\hat{P}^2}{2\rho c}.$$

Por último, recordemos que una onda sinusoidal para $\Delta P_{\text{eff}} = \hat{P}/\sqrt{2}$, luego también se puede escribir

$$I = \frac{\Delta P_{\text{eff}}^2}{\rho c},$$

que es precisamente la expresión que se usó en la sección 15.5.

Solución al problema 10

Sea ν_0 la frecuencia con la que la bocina emite el sonido. Al acercarse el automóvil con velocidad v a la pared, un observador junto a ella escuchará el sonido de la bocina con una frecuencia

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c}{c - v}.$$

Con esa misma frecuencia la pared hace rebotar el sonido. La persona en el automóvil que ahora se acerca a una fuente de sonido (ν_1) con velocidad v lo escuchará con frecuencia

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c + v}{c} = \nu_0 \frac{c + v}{c - v}.$$

De acuerdo al enunciado, la razón entre las frecuencias de los sonidos ν_2 y ν_0 es $5/4$ (corresponde a un intervalo de tercera mayor), luego,

$$\frac{5}{4} = \frac{c + v}{c - v}.$$

Despejando, se encuentra que la velocidad del automóvil es $v = c/9 \simeq 136$ km/h.

Solución al problema 20

- a) El nivel de intensidad sonora L y la intensidad (potencia) por unidad de área I están relacionadas por

$$L = 20 \log_{10} \left(\frac{\Delta P_{\text{eff}}}{P_u} \right) [db] = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} [dB].$$

Recordemos que cuando hay dos (o más) sonidos, la magnitud aditiva es la potencia I y no el nivel de intensidad L . Para un sonido

$$L_1 = 50 [dB] = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} [dB]$$

se encuentra que $I_1 = I_0 \cdot 10^5$. Análogamente para el sonido de 70 dB se encuentra que $I_2 = I_0 \cdot 10^7$. Al escuchar ambas fuentes conjuntamente, intensidad será $I = I_1 + I_2 = 1.01 \cdot I_0 \cdot 10^7$, lo que corresponderá a un nivel de intensidad

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} [dB] = 10 (7 + \log_{10} 1.01) [dB] \simeq 70.04 [dB]$$

- b) Para una fuente sonora puntual se tiene que $I(r) = P/(4\pi r^2)$, donde P es la *potencia acústica* de la fuente. Conociendo las intensidades I de las fuentes en el punto medio $r = D/2$, podemos deducir la potencia de ellas:

$$P_1 = 4\pi I_1 \frac{D^2}{4} = \pi I_0 10^5 D^2$$

y

$$P_2 = 4\pi I_2 \frac{D^2}{4} = \pi I_0 10^7 D^2.$$

Sea x la distancia de la fuente #1 a la que debemos situarnos para escuchar ambas con la misma intensidad sonora (en ese caso la distancia a la fuente sonora #2 es $(D - x)$). Para que las dos fuentes sonoras se escuchen con el mismo nivel sonoro, debe cumplirse

$$\frac{P_1}{x^2} = \frac{P_2}{(D - x)^2}.$$

Despejando x se encuentra

$$\frac{x}{D} = \frac{1 \pm \sqrt{\Gamma}}{1 - \Gamma},$$

donde $\Gamma \equiv P_2/P_1 = 100$, o sea,

$$\frac{x}{D} = \frac{1 \pm 10}{-99}.$$

Tenemos dos soluciones: $x_1 = +D/11$ corresponde a una solución en que el observador se encuentra entre las dos fuentes (m
as cerca de la fuente #1) y $x_2 = -D/9$, solución es que el observador se encuentra al lado izquierdo de la fuente #1 (ver figura ??).

Solución al problema 21

Sea $t = 0$ el instante en que se suelta la fuente sonora desde la azotea. Después de transcurrido un tiempo t , la fuente habrá caído una distancia $x(t) = gt^2/2$ y tendrá una rapidez $v(t) = gt$. El sonido que la fuente emite en ese instante, el observador en la azotea eventualmente lo escuchará teniendo una frecuencia

$$\nu = \nu_0 \frac{c}{c + gt}.$$

Es importante, sin embargo, darse cuenta que tal sonido el observador no lo escuchará en el instante t , sino que en un instante levemente posterior (ya que el sonido

aun debe recorrer la distancia x). En efecto, el sonido emitido en el instante t , el observador recién lo escuchará en el instante $t' = t + t^*$, donde $t^* = x(t)/c$ es el tiempo que el sonido tarda en recorrer la distancia $x(t)$. La relación entre t y t' es

$$t' = t + \frac{x(t)}{c} = t + \frac{gt^2}{2c}.$$

Despejando t se encuentra

$$\frac{gt}{c} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2gt'}{c}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la expresión para ν se obtiene finalmente

$$\nu(t') = \nu_0 \frac{c}{c + gt} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 + \frac{2gt'}{c}}}.$$