Capítulo 11

Gravitación

Agosto 2003

El presente capítulo tratará algunos aspectos de la teoría de gravitación de Newton. Comenzaremos este capítulo con un complemento matemático sobre elipses.

11.1. Elipses

Consideremos dos puntos, f_1 y f_2 ubicados en un plano. Consideremos adicionalmente un tercer punto P (en el mismo plano), y denotemos por r y r' a las distancias de este punto y f_1 y f_2, respectivamente. Por definición, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano para los cuales $r + r' = 2a$, en que $2a$ es una constante (mayor que la separación entre f_1 y f_2).

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesiano, con el origen en el centro de la figura geométrica y el eje $\hat{x}$ a lo largo de la recta que une los dos *focos* f_1 y f_2. Es claro que el *semi–eje mayor* de la elipse es a. Sea $2c$ la distancia entre los dos focos, entonces

$$\text{semi–eje menor} = b = \sqrt{a^2 - c^2}\ .$$

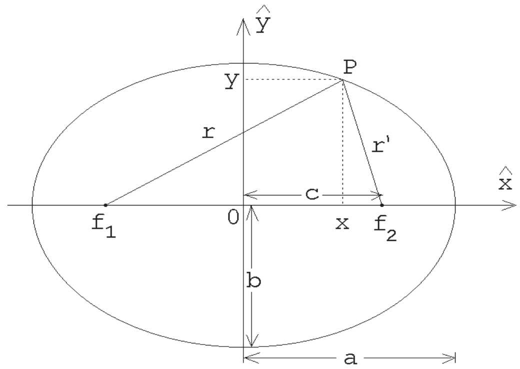

Figura 11.1

Elipse en coordenadas cartesianas

De la figura 11.1 se deduce que

$$\begin{aligned} 2a &= r + r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) + 2cx} + \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) - 2cx} \,. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$2(c^2 + x^2 + y^2) + 2\sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) + 2cx} \cdot \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) - 2cx} = 4a^2 \,,$$

o sea,

$$\begin{aligned} 2a^2 - (c^2 + x^2 + y^2) &= \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) + 2cx} \cdot \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2) - 2cx} \\ &= \sqrt{(c^2 + x^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} \;. \end{aligned}$$

Elevando nuevamente al cuadrado queda

$$4a^4 - 4a^2(c^2 + x^2 + y^2) + (c^2 + x^2 + y^2)^2 = (c^2 + x^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 \,,$$

o sea,

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 \,.$$

Usando la relación $c^2 = a^2 - b^2$ se deduce finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,. \tag{11.1}$$

Elipse en coordenadas polares

Otra representación útil y común de la elipse es en términos de coordenadas polares (r, ϕ), tomando como origen a uno de los focos (ver figura 11.2).

1

Se tiene que

$$x = r\cos\phi - c \,,$$

$$y = r\sin\phi$$

y

$$y^2 = r^2\,(1 - \cos^2\phi) \,.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas dada por la ecuación (11.1), se obtiene

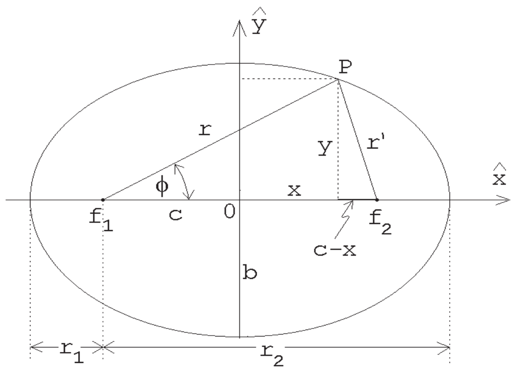

Figura 11.2

$$b^2\,(r\,\cos\phi - c)^2 + a^2 r^2\,(1-\cos^2\phi) = a^2 b^2\ ,$$

$$b^2 r^2 \cos^2\phi - 2b^2 rc\cos\phi + b^2 c^2 + a^2 r^2 - a^2 r^2\cos^2\phi = a^2 b^2\ ,$$

o sea,

$$\begin{aligned} a^2 r^2 &= (a^2 - c^2)\,b^2 + 2b^2 cr\,\cos\phi + (a^2-b^2)\,r^2\cos^2\phi \\ &= b^4 + 2b^2\sqrt{a^2-b^2}\,r\cos\phi + (a^2-b^2)\,r^2\cos^2\phi \\ &= \left[b^2 + \sqrt{a^2-b^2}\,r\cos\phi\,\right]^2\ . \end{aligned}$$

Extrayendo la raíz, se deduce que

$$ar = b^2 + \sqrt{a^2-b^2}\ r\cos\phi\ . \tag{11.2}$$

Introduzcamos los parámetros

$$r_0 \equiv \frac{b^2}{a} \tag{11.3}$$

y

$$\epsilon \equiv \frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \qquad \text{(excentricidad)}\ . \tag{11.4}$$

Con estas definiciones la ecuación (11.2) se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\,(1-\epsilon\,\cos\phi\,)\ . \tag{11.5}$$

—————-

Resumen: Las dos formas más usuales para representar una elipse son:

i) Coordenadas cartesianas x, y (con el origen al centro):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \tag{11.6}$$

donde los parámetros a y b representan a los semi–ejes mayor y menor, respectivamente.

ii) Coordenadas polares r, ϕ (con el origen en uno de los focos):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\,(1-\epsilon\,\cos\phi\,)\ . \tag{11.7}$$

Las ecuaciones (11.3) y (11.4) relacionan los parámetros a, b con r_0, ϵ.

Veamos algunas propiedades adicionales de las elipses.

Coloquemos el origen en uno de los focos y sea r_1 la distancia mínima (*perigeo*) y r_2 la distancia máxima (*apogeo*) entre el origen y la elipse. (¡No confundir el perigeo y apogeo con los semi–ejes menor y mayor de la elipse!) Se tienen las siguientes relaciones:

$$r_1 = a - c$$

y

$$r_2 = a + c \; ,$$

de donde se deduce que

$$r_1 + r_2 = 2\, a$$

y

$$r_1 r_2 = a^2 - c^2 = b^2 \; .$$

En otras palabras, el semieje mayor es el promedio aritmético

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

y el semieje menor el promedio geométrico

$$b = \sqrt{r_1 r_2}$$

del apogeo y perigeo.

La excentricidad, en términos de r_1 y r_2, es

$$\epsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \; .$$

Ejercicio: Conociendo el área de un círculo y las ecuaciones en coordenadas cartesianas de un círculo y de una elipse, demuestre que el área A de una elipse viene dada por

$$A = \pi a b \; ,$$

donde a y b son sus semiejes.

Mostraremos finalmente que si un rayo (por ejemplo, de luz) emerge de un foco y éste se refleja especularmente en la elipse, entonces tal rayo pasará necesariamente por el otro foco.

Para demostrar esta propiedad consideremos dos puntos P y P' sobre la elipse, infinitesimalmente cercanos. Sean R_1 y R_1' los rayos que unen los puntos P y P' con el foco f_1 y R_2 y R_2' los rayos que unen los puntos P y P' con el foco f_2 (ver figura 11.3). Como $R_1 + R_2 = R_1' + R_2' = 2a$, se deduce que $\overline{PA} = \overline{P'B}$. Los triángulos PAP' y $P'BP$ son equivalentes, luego los ángulos β y δ son iguales. Pero $\delta = \alpha$, luego $\beta = \alpha$. Esta última relación implica que los rayos R_1 y R_1' corresponden a rayos reflejados en forma especular por la elipse.

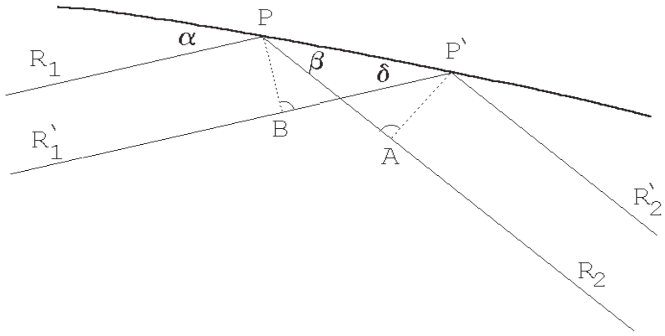

Figura 11.3

Ejercicio: Considere la función siguiente (en coordenadas polares):

$$\frac{1}{r} = 1 - \epsilon \cos \phi .$$

Grafique $r(\phi)$ para $\epsilon = 0,\ 0.5,\ 1.0$ y 1.5.

11.2. Las leyes de Kepler

Basándose en precisas mediciones de la posición de los planetas realizadas por Tycho Brahe, Johannes Kepler (1571–1630) pudo establecer las siguientes leyes para describir el movimiento de los planetas alrededor del Sol:

1. Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos.

2. Cada planeta “barre” áreas iguales en tiempos iguales.

3. El cuadrado del período de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje major de su trayectoria.

Estas leyes empíricas se conocen como *Leyes de Kepler*.

Comentarios:

a) Por lo que sabemos, la primera ley de Kepler no puede ser completamente correcta. Si dos cuerpos son libres excepto por la fuerza de interacción que existe entre ellos, entonces éstos deben moverse de manera que el centro de masas se mantenga en reposo (o en movimiento uniforme). O sea, el Sol necesariamente también tiene que estar moviéndose. Sin embargo, siendo la masa del Sol muy superior a la de los planetas, el centro de masas Sol–planeta esencialmente coincide con la posición del Sol y en ese caso resulta ser una muy buena aproximación suponer que el Sol está en reposo en uno de los focos de la elipse. (La masa del Sol es de $1,99 \cdot 10^{30}$ kg mientras que la de la Tierra es de $5,98 \cdot 10^{24}$ kg.)

b) Tal como se demostró en el ejemplo 1 de la sección 9.2, el hecho de que un planeta "barre" áreas iguales en tiempos iguales es equivalente a decir que el momento angular $\vec{\ell}$ no varía en función del tiempo. Esto a su vez implica que el torque ejercido por el Sol sobre el planeta es nulo, lo que a su vez implica que la fuerza entre los dos cuerpos debe ser a lo largo de la línea que los une. En otras palabras, la segunda ley de Kepler implica que la fuerza entre el Sol y el planeta debe ser radial. La fuerza gravitacional, por lo tanto, es de la forma

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = -f(r)\,\hat{r}\ .$$

c) La tabla adjunta muestra algunos de los parámetros para los planetas pertenecientes al sistema solar.

Planeta	Semieje mayor u.a.	Período [s]	Excentricidad	Inclinación	Masa [kg]
Mercurio	0,387	$7,60 \cdot 10^6$	0,205	7° 00'	$3,28 \cdot 10^{23}$
Venus	0,723	$1,94 \cdot 10^7$	0,006	3° 23'	$4,83 \cdot 10^{24}$
Tierra	1,000	$3,16 \cdot 10^7$	0,016	—	$5,98 \cdot 10^{24}$
Marte	1,523	$5,94 \cdot 10^7$	0,093	1° 51'	$6,37 \cdot 10^{23}$
Júpiter	5,202	$3,74 \cdot 10^8$	0,048	1° 18'	$1,90 \cdot 10^{27}$
Saturno	9,554	$9,30 \cdot 10^8$	0,055	2° 29'	$5,67 \cdot 10^{26}$
Urano	19,218	$2,66 \cdot 10^9$	0,046	0° 46'	$8,80 \cdot 10^{25}$
Neptuno	30,109	$5,20 \cdot 10^9$	0,008	1° 46'	$1,03 \cdot 10^{26}$
Plutón	39,60	$7,82 \cdot 10^9$	0,246	17° 07'	$5,4 \cdot 10^{24}$

Los astrónomos, para medir distancias, frecuentemente usan la *unidad astronómica* u.a.. Una u.a. es igual al semieje mayor de la órbita terrestre. 1 u.a.= $1,495 \cdot 10^{11}$ m.

La excentricidad $\epsilon = (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)$ de la mayoría de los planetas es bastante pequeña, siendo sus órbitas, por lo tanto, casi circulares. (Al dibujar una elipse con una excentricidad $\epsilon = 0,05$ es difícil, sólo mirándola, darse cuenta de que difiere de un círculo.)

Si asumimos que, en primera aproximación, las órbitas de los planetas son circulares, entonces, a partir de la tercera ley de Kepler, podemos encontrar una expresión para la magnitud de la fuerza gravitacional. En efecto:

La tercera ley de Kepler dice que

$$T^2 = Kr^3 \ ,$$

donde K es una constante (la misma para todos los planetas) y r es el radio de la órbita "circular". El radio r de la órbita, la velocidad v y el período T están relacionados por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \ .$$

Por otra parte la magnitud de la fuerza gravitacional debe coincidir con la fuerza centrípeta, o sea,

$$f(r) = \frac{mv^2}{r} \ ,$$

donde m es la masa del planeta. Usando estas tres ecuaciones, despejando v y T, se encuentra

$$f(r) = \frac{4\pi^2 m}{K} \frac{1}{r^2} \ .$$

La constante K, de acuerdo a la tercera ley de Kepler, no depende de ninguna propiedad de los planetas, pero si podría depender de alguna propiedad del Sol. Es más o menos evidente, por razones de simetría, que si la fuerza gravitacional depende de la masa m del planeta, entonces debe tener la misma dependencia de la masa del Sol M. Esta última observación sugiere escribir

$$\frac{4\pi^2}{K} = GM \ ,$$

donde G es una nueva constante que ahora es independiente de las masas del Sol y del planeta. De esta manera se deduce que la fuerza gravitacional entre dos masas m y M, separadas por una distancia r, es

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = -G\frac{mM}{r^2}\,\hat{r} \ .$$

La última ecuación precisamente es la *ley de gravitación universal de Newton* siendo G la asi llamada *constante gravitacional.* Usando una balanza de torsión (ver figura 11.4), Cavendish en el año 1798 midió G en el laboratorio.
El dispositivo experimental fue el siguiente: dos masas m se colocan en los extremos de una barra rígida y se cuelgan desde el centro de un alambre (hilo de torsión) que se sujeta firmemente del cielo. El sistema puede girar libremente en el plano horizontal, pero tiene una orientación para la cual está en equilibrio.

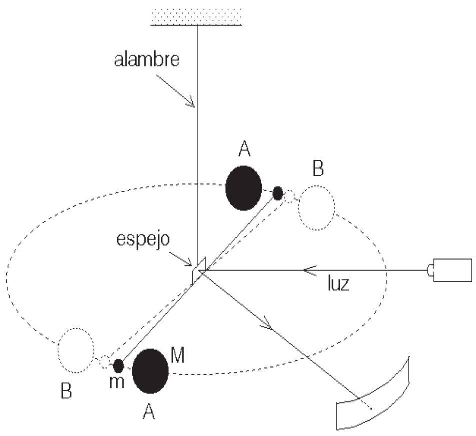

Figura 11.4

Si las masas m se sacan del equilibrio, por ejemplo, dándoles una pequeña velocidad de rotación, entonces el sistema comenzará a oscilar teniéndose un *péndulo de torsión.* A partir del período de este movimiento oscilatorio se puede deducir la constante de restitución de torsión (o sea, el torque que ejerce el hilo de torsión cuando este se gira en una magnitud α).

La orientación del péndulo se dedecta con un rayo de luz que es reflejado por un pequeño espejo adosado a la varilla.

El experimento mismo se realiza en dos etapas. Primero se colocan dos masas M en las posiciones A y se registra la orientación de la varilla. Luego se rotan las masa M a las posiciones B y se vuelve a registrar la orientación de la varilla. A partir de la variación de la orientación de la varilla en estas dos mediciones se puede deducir la fuerza entre m y M.

El experimento es bastante difícil ya que la fuerza de atracción de las dos masas es muy pequeña. Por ejemplo, una masa $m = 20$ kg es atraída por otra de masa $M = 150$ kg con una fuerza de sólo $2, 3.5 \cdot 10^{-5} \cdot g$ N (esto es, el peso de una masa de 23 milligramos) cuando la separación de sus centros es de 30 cm.

El valor actualmente aceptado para el valor de G es:

$$G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} .$$

Ejercicio: Conocidos el período y el radio de la órbita terrestre alrededor del Sol y usando el valor de G recién dado, determine la masa del Sol.

11.3. Satélites

En esta sección analizaremos algunos aspectos del movimiento de *satélites* que orbitan gravitacionalmente entorno a un objeto masivo. Algo es un satélite si su masa m es mucho menor que la masa M del objeto alrededor del cual orbita. En particular, los resultados de la presente sección podrán aplicarse al movimiento de los planetas alrededor del Sol, de las lunas alrededor de los planetas y de los satélites artificales alrededor de la Tierra. Las trayectorias de todos estos objetos corresponden a elipses (y círculos), o sea, a cónicas con excentricidades $0 \leq \epsilon < 1$.

En la sección 11.1 se relacionaron los parámetros r_0 y ϵ de una elipse con el semieje mayor a y el semieje menor b y también con el perigeo $r_1 = r_{\rm min}$ y el apogeo $r_2 = r_{\rm max}$ de ella. A continuación estudiaremos la dependencia de estos parámetros de las *constantes de movimiento* de la órbita; específicamente del momento angular orbital ℓ y de la energía total E.

La condición $m \ll M$ implica que la masa mayor esencialmente se matendrá en reposo en uno de los focos de la elipse, lugar en que ubicaremos el origen.

La fuerza sobre la partícula m (el satélite) viene dada por

$$\vec{F}(r) = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\hat{r}\ .$$

Esta fuerza, que es conservativa, da origen a una energía potencial

$$U(r) = -G\,\frac{mM}{r}\ .$$

Si en cierto instante la posición y velocidad de la partícula m es $\vec{r}$ y $\vec{v}$, entonces la energía total del sistema será

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}\ .$$

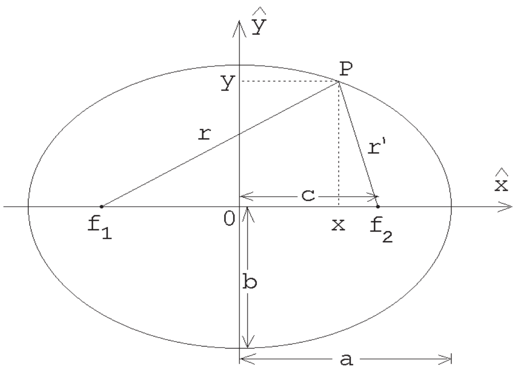

Figura 11.1

Sean P_1 y P_2 los puntos correspondientes al perigeo y apogeo, respectivamente (ver figura 11.5). Como la energía total se conserva ésta debe ser igual a E tanto en el apogeo como en el perigeo, o sea,

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{r_2}\ . \tag{11.8}$$

Como la fuerza que actúa sobre m es central se tiene que también el momento angular (respecto al origen) se conserva. Evaluando el momento angular en el apogeo y perigeo, se encuentra

$$\ell = mr_1v_1 = mr_2v_2 \; . \tag{11.9}$$

De esta ecuación se obtiene

$$v_1 = \frac{\ell}{mr_1}$$

y

$$v_2 = \frac{\ell}{mr_2} \; .$$

Sustituyendo esto en (11.8) se encuentra

$$E = \frac{1}{2m}\frac{\ell^2}{r_1^2} - G\frac{mM}{r_1} \tag{11.10}$$

y

$$E = \frac{1}{2m}\frac{\ell^2}{r_2^2} - G\frac{mM}{r_2} \; . \tag{11.11}$$

De estas dos ecuaciones se deduce

$$2mEr_1^2 = \ell^2 - 2Gm^2Mr_1$$

y

$$2mEr_2^2 = \ell^2 - 2Gm^2Mr_2 \, .$$

Restándolas se obtiene

$$E(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = -GmM(r_2 - r_1)$$

$$E = -G\frac{mM}{r_1 + r_2} = -G\frac{mM}{2a} \; ,$$

o sea, el semieje mayor de la órbita viene determinado sólo por la energía E:

$$a = -G\frac{mM}{2E} \; . \tag{11.12}$$

Encontremos ahora una relación entre b (el semieje menor de la órbita) y el momento angular y energía del satélite. Esta se obtiene restando las ecuaciones (11.11) de (11.10):

$$\frac{\ell^2}{2mr_1^2} - \frac{\ell^2}{2mr_2^2} - G\frac{mM}{r_1} + G\frac{mM}{r_2} = 0$$

$$\ell^2\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = 2Gm^2M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\ell^2\,\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2r_2^2} = 2Gm^2M\frac{r_1 - r_2}{r_1r_2}$$

$$\ell^2 \, \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} = 2Gm^2 M$$

$$\ell^2 \, \frac{2a}{b^2} = 2Gm^2 M \ ,$$

o sea,

$$b^2 = \frac{a\ell^2}{Gm^2 M} = -\frac{\ell^2}{2Em} \ . \tag{11.13}$$

La importancia de las ecuaciones (11.12) y (11.13) radica en que son éstas las que relacionan las constantes de movimiento de la órbita con su forma geométrica.

Otra relación importante se obtiene usando la segunda Ley de Kepler: como el momento angular se conserva se tiene que la partícula m "barre" áreas iguales en tiempos iguales. La cantidad de área que el satélite "barre" en un intervalo de tiempo dt lo podemos evaluar cuando éste se encuentra en el apogeo:

$$dA = \frac{1}{2} r_2 v_2 dt = \frac{\ell}{2m} \, dt \ .$$

De esta relación se deduce que el área total, $A = \pi ab$, la partícula m lo barre en un tiempo T dado por

$$\pi ab = \frac{\ell}{2m} T \ ,$$

es decir,

$$T^2 = \frac{4m^2 \pi^2 a^2 b^2}{\ell^2} \ .$$

Usando (11.13) se obtiene, finalmente,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \, a^3 \ , \tag{11.14}$$

resultado que no es otro que la tercera ley de Kepler. Pero observe que ahora conocemos la constante de proporcionalidad entre T^2 y a^3.

Deseamos recalcar que las ecuaciones (11.13) y (11.14) son sólo válidas en el límite $m \ll M$. Cuando las dos masas son del mismo orden las ecuaciones deben corregirse).

Ilustremos el uso de las ecuaciones anteriores resolviendo un problema:

Problema:

Si la Tierra conservara su energía total, pero perdiera la mitad de su cantidad de momento angular respecto al Sol (por ejemplo, cambiándole bruscamente la dirección de su velocidad),

a) ¿Qué tanto se acercaría al Sol?

b) ¿Cuál sería la distancia de alejamiento máxima (apogeo) de la Tierra en su nueva órbita?

c) ¿Cuál sería el largo del año en ese caso?

d) ¿Cuál tendría que ser el ángulo en que se varía bruscamente la dirección de la Tierra?

Suponga que inicialmente la órbita es circular.

Solución:

Sea R el radio de la órbita circular en torno al Sol (estamos suponiendo que el centro de masas del sistema coincide con la posición del Sol). La órbita circular es un caso particular de elipse para la cual $a = b = R$. Sean a' y b' los semiejes mayor y menor de la elipse final (después de haberle cambiado bruscamente su dirección).

Como la energía de la Tierra no cambia, se tiene que $a' = a = R$. De la ecuación (11.13) se deduce que el semieje menor disminuirá a la mitad, o sea, $b' = b/2 = R/2$. Para el perigeo y apogeo se encuentra

$$r_1 = a' - \sqrt{a'^2 - b'^2} = R - \sqrt{R^2 - R^2/4} = R\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

y

$$r_2 = a' + \sqrt{a'^2 - b'^2} = R\,\frac{2+\sqrt{3}}{2}\,.$$

Como el período sólo depende de a (tercera ley de Kepler) y a no cambia, se encuentra que el año de la Tierra en su nueva órbita seguiría siendo de 365 días.

La magnitud del momento angular viene dada por la magnitud del momento lineal por el brazo. Como el momento lineal no cambia, para disminuir el momento angular a la mitad debemos disminuir el brazo a la mitad. De la figura 11.6 se desprende inmediatamente que el ángulo debe ser $\alpha = 60°$.

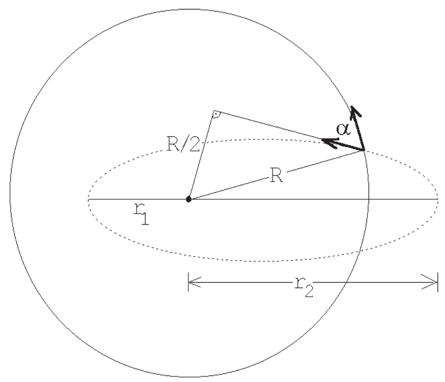

Figura 11.6

11.4. Potencial efectivo

Sea $\vec{r}$ el vector posición de m. La fuerza que actúa sobre m es

$$\vec{F}(r) = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\hat{r}\ , \tag{11.15}$$

y la energía potencial asociada a esta fuerza es

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}\ . \tag{11.16}$$

A continuación mostraremos que cuando la energía potencial es central, es decir, sólo depende de la magnitud del vector $\vec{r}$ y no de su dirección, entonces el problema de determinar la trayectoria del satélite se puede reducir a un problema unidimensional.

Es evidente que si la energía potencial de una partícula es central, entonces el campo de fuerzas generador del potencial, es radial. Por otra parte, una fuerza radial no ejerce torque respecto al origen. Si el torque respecto al origen es nulo, el momento angular $\vec{\ell}$ de la partícula no puede alterarse, luego el momento angular (para una partícula moviéndose en un potencial central) es una constante de movimiento (igual que, por ejemplo, la energía total). Que el momento angular sea una constante de movimiento significa que ni la magnitud ni la dirección del momento angular cambian a medida que transcurre el tiempo. También sabemos que la velocidad de la partícula es siempre perpendicular al momento angular. Como la dirección del momento angular no cambia se concluye que el movimiento de la partícula necesariamente debe transcurrir en un plano.

Debido a la importancia de este resultado lo volvemos a remarcar:

> *En un potencial central la fuerza siempre es solamente radial. Un potencial central no ejerce un torque sobre la partícula respecto al origen, lo que a su vez implica que el momento angular de la partícula respecto a tal origen nunca varía (es una constante de movimiento). Una consecuencia de lo anterior es que el movimiento de una partícula en un potencial radial siempre trancurre en un plano.*

El papel que juega el momento angular como constante de movimiento es similar al papel de constante de movimiento que juega la energía total; ambos son magnitudes que, de alguna manera, están determinadas por las condiciones iniciales del problema. Supongamos, por consiguiente, que conocemos la energía total E, la magnitud del momento angular ℓ del sistema y el plano en el que transcurre el movimiento.

Descompongamos la velocidad $\vec{v}(\vec{r}\,)$ de la partícula, cuando ella se encuentra en el lugar $\vec{r}$, en una componente radial y una componente perpendicular a $\hat{r}$ (ver figura 11.7):

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = v_r\,\hat{r} + v_\phi\,\hat{\phi} \quad . \tag{11.17}$$

Acá $\hat{r}$ y $\hat{\phi}$ son vectores unitarios; el primero en la dirección radial, el segundo perpendicular a $\hat{r}$, pero en el plano de la trayectoria.

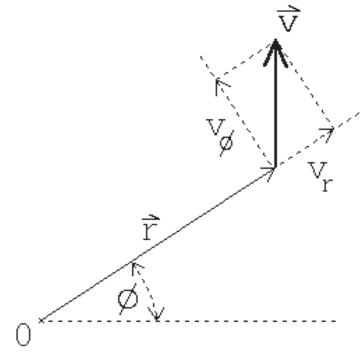

Figura 11.7

El módulo del momento angular de la partícula es

$$\ell = r\,m\,v_\phi \quad ,$$

o sea, una vez conocido ℓ la velocidad v_ϕ queda determinada por la distancia r de la partícula al centro:

$$v_\phi(r) = \frac{\ell}{mr} \quad . \tag{11.18}$$

De lo anterior concluimos que el problema queda esencialmente resuelto si logramos establecer cómo varía la distancia r en función del tiempo. Una vez conocido $r(t)$, no sólo se conoce la velocidad radial $v_r = \dot{r}$, sino que también, usando la ecuación (11.18), la velocidad v_ϕ. A su vez, conocida la velocidad en función del tiempo podemos, integrando, obtener la posición $\vec{r}\,(t)$ de la partícula en todo instante.

De la discusión anterior se desprende que debemos centrar la atención en resolver el movimiento radial de la partícula de masa m.

Sabemos que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = K + U \quad . \tag{11.19}$$

Por otra parte, la energía cinética viene dada por

$$K = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,\left(v_r^2 + v_\phi^2\right) \quad , \tag{11.20}$$

que, usando $\dot{r} = v_r$ y la ecuación (11.18), queda de la forma

$$K = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}\right) \quad . \tag{11.21}$$

Sustituyendo este resultado en (11.19) se obtiene

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \left(\frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)\right) \quad . \tag{11.22}$$

Esta es una ecuación que sólo depende del radio r, de la velocidad radial $\dot{r}$ y constantes de movimiento. Esta ecuación, por lo tanto, se puede reinterpretar como la correspondiente al problema de una partícula de masa m y energía total E, que se mueve en una dimensión (dada por la coordenada r) en un potencial dado por

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \ . \tag{11.23}$$

De esta manera hemos reducido el problema original a un problema unidimensional: el de una partícula de masa m afectada por una fuerza

$$F_{\text{eff}}(r) = -\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} \ . \tag{11.24}$$

$U_{\text{eff}}(r)$ se llama el *potencial efectivo*, mientras que $\ell^2/(2mr^2)$ es el así llamado *potencial centrífugo*. Cuando el momento angular es cero, el potencial efectivo coincide con el potencial original.

La ecuación (11.22) podemos escribirla como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \ .$$

Derivándola respecto al tiempo se obtiene

$$0 = m\,\dot{r}\,\ddot{r} + \frac{dU_{\text{eff}}}{dr}\,\dot{r} \ , \tag{11.25}$$

de donde, dividiendo por $\dot{r}$ y usando (11.24), encontramos una ecuación de movimiento para $r(t)$:

$$m\,\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} \ . \tag{11.26}$$

Es esta la ecuación que resolveremos en la próxima sección para encontrar las trayectorias de los satélites.

———–-

De acuerdo a lo discutido más arriba, para establecer cómo se comporta el vector $\vec{r}$, debemos resolver el problema de una partícula de masa m moviéndose en el potencial dado por la ecuación (11.23):

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} \ . \tag{11.27}$$

La energía total $E = K + U$ y el momento angular ℓ son constantes de movimiento, es decir, para un problema físico en particular, tienen valores fijos bien determinados.

A Caso $\ell = 0$.

Consideremos brevemente el caso de momento angular $\ell = 0$. Este valor para el momento angular implica que la partícula nunca tiene una velocidad tangencial, o sea, la partícula siempre se mueve a lo largo de la recta que une M con m.

La figura 11.8 muestra el potencial $U_{\text{eff}}(r)$ que, en este caso, coincide con $U(r)$. Si la energía de la partícula es $E < 0$, entonces la máxima distancia a la que se puede alejar es r_0.

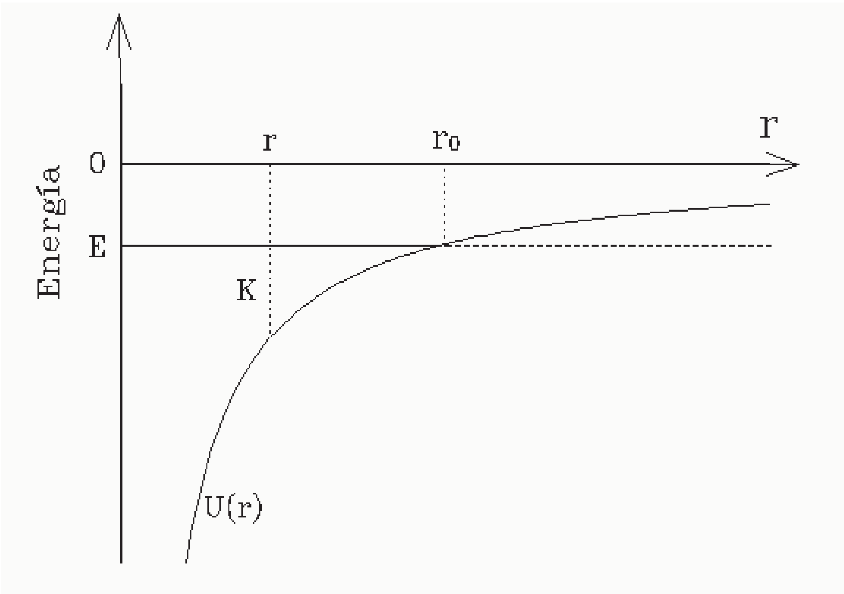

Figura 11.8 : Potencial efectivo para $\ell = 0$.

Si la partícula en un instante está en r_0, entonces su energía total E coincide con la energía potencial $U(r_0)$ y la energía cinética, por lo tanto, es nula — la partícula se encuentra en reposo. Sin embargo, sobre la partícula actúa una fuerza ya que la pendiente de la energía potencial en r_0 no es nula. De hecho, la pendiente es positiva, luego sobre m actúa una fuerza negativa que la hace acelerar hacia el origen. A medida que transcurre el tiempo la distancia entre m y M disminuirá progresivamente. La energía cinética de m (y por consiguiente el módulo de la velocidad radial), como también la fuerza atractiva irán aumentando. Finalmente, después de transcurrido un tiempo finito, la masa m llegará al origen, teniendo una energía cinética infinita. (No debemos preocuparnos demasiado por este infinito que apareció. Obviamente ningún potencial físico es de la forma $-GmM/r$ hasta $r = 0$. Todos los objetos físicos tienen un tamaño, y a más tardar cuando la distancia entre los objetos es menor que la suma de sus "radios", la interacción cambia de carácter.)

B Caso $\ell \neq 0$.

La figura 11.9 muestra el potencial $U(r)$, el potencial centrífugo $\ell^2/(2mr^2)$ y el potencial efectivo $U_{\text{eff}}(r)$ para dos valores del momento angular ($\ell_1 > \ell_2$). Es este último, el potencial efectivo, él que es útil para analizar el comportamiento de la variable $r = |\vec{r}|$ en función del tiempo.

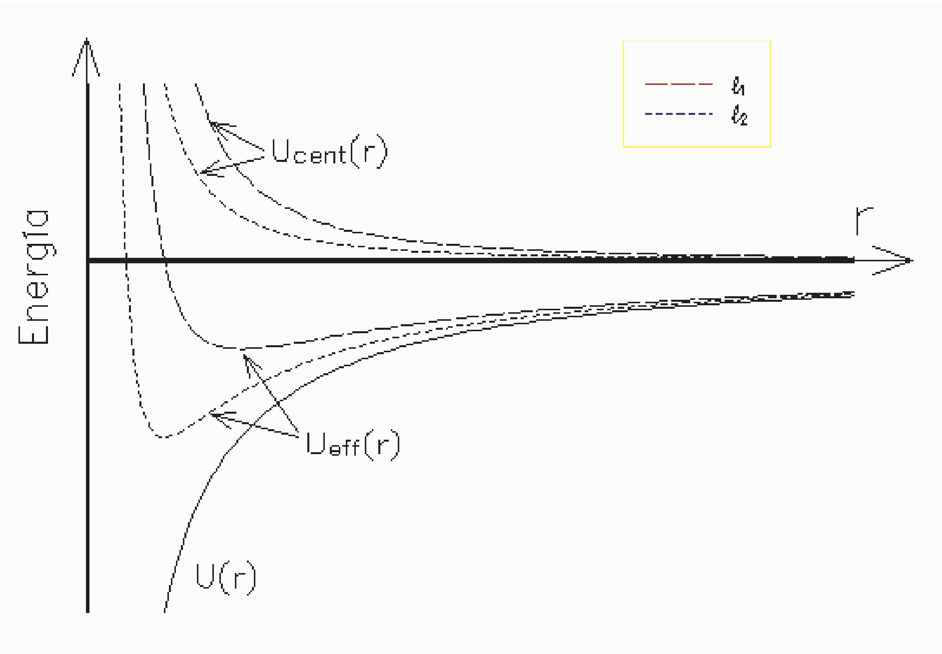

Figura 11.9: Potencial centrífugo y efectivo para dos valores del momento angular distintos (no nulos).

Consideremos nuevamente una partícula con energía $E < 0$ (ver figura 11.10). La partícula, en este caso, está restringida a moverse entre r_1 y r_2. (Para el caso del movimiento de la tierra alrededor del sol el vector $\vec{r}$ recorre una trayectoria elíptica y las magnitudes r_1 y r_2 corresponden a la distancia mínima y máxima de esa elipse). La energía cinética de la partícula es $K = E - U(r)$, siendo $K_r = E - U_{\text{eff}}(r)$ la energía cinética radial y $K_t = U_{\text{eff}}(r) - U(r)$ la energía cinética tangencial. Cuando la partícula se encuentra en el perigeo r_1 o en el apogeo r_2, ella no tiene energía cinética radial, pero sí tiene una energía cinética tangencial. Note que la energía cinética tangencial es mayor en el perigeo que en el apogeo.

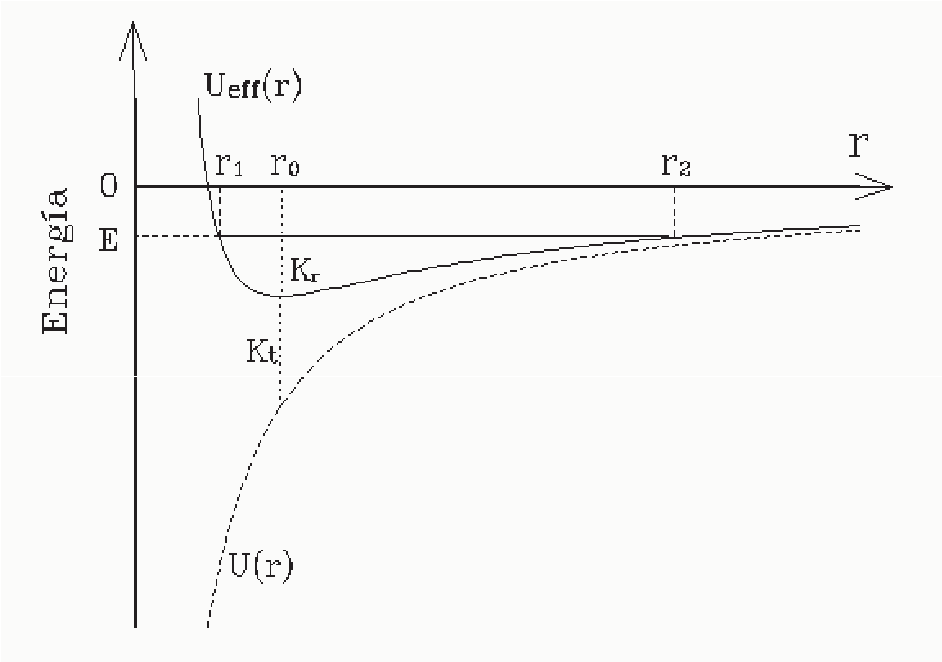

Figura 11.10: Potencial efectivo para $\ell \neq 0$.

Si la energía es positiva ($E > 0$), entonces la partícula no está ligada; la partícula se acerca hasta una distancia mínima y luego se aleja indefinidamente, para no volver. (Estas trayectorias corresponden a las soluciones hiperbólicas del problema; los cometas que provienen de fuera del sistema solar son un ejemplo de tales trayectorias.) Cuando la energía total es exactamente cero, la trayectoria tampoco es acotada y la trayectoria, como veremos en la siguiente sección, corresponde a una parábola.

Cuando la energía total es igual al mínimo del potencial efectivo, entonces la partícula no tiene energía cinética radial, pero sí una energía cinética tangencial; tal trayectoria corresponde a la solución circular del problema gravitatorio.

11.5. Trayectorias de los satélites

En esta sección analizaremos las posibles trayectorias de un satélite de masa m cuando es atraído gravitacionalmente por un cuerpo masivo de masa M de acuerdo a la ley de gravitación universal.

Del analisis hecho en la sección anterior (ver ecuación 11.26) se desprende que debemos estudiar la ecuación de movimiento

$$m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} \ . \tag{11.28}$$

El momento angular ℓ es una constante de movimiento y viene determinada por las condiciones iniciales del problema, es decir, para un problema en particular no cambia su valor a medida que transcurre el tiempo.

Sabemos que al menos algunas de las soluciones de esta ecuación deben ser elipses. En coordenadas polares la ecuación de una elipse es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\,(1 - \epsilon\,\cos\phi\,) \ \ .$$

Esto sugiere que, en lugar de analizar una ecuación para r en función de t, sería mejor buscar una ecuación para $w = w(\phi) \equiv 1/r$ en función de ϕ, pues tal ecuación probablemente sea simple.

Realicemos esos cambios de variable. Tenemos

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\,r = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{w} = -\frac{1}{w^2}\,\frac{dw(\phi)}{dt} = -\frac{1}{w^2}\,\frac{dw}{d\phi}\,\frac{d\phi}{dt} \ .$$

Pero

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{\ell w^2}{m} \ ,$$

luego

$$\dot{r} = -\frac{\ell}{m}\,\frac{dw}{d\phi} \ .$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo se obtiene

$$\ddot{r} = -\frac{\ell}{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{dw}{d\phi}\right) = -\frac{\ell}{m}\left(\frac{d}{d\phi}\frac{dw}{d\phi}\right)\,\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\ell}{m}\,\frac{d^2w}{d\phi^2}\,\,\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\ell^2}{m^2}w^2\,\frac{d^2w}{d\phi^2} \ .$$

Sustituyendo esta expresión en (11.28) y usando que $w = 1/r$, se obtiene

$$-\frac{\ell^2}{m}w^2\frac{d^2w}{d\phi^2} = -GmMw^2 + \frac{\ell^2}{m}w^3 \ ,$$

o sea,

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w = \frac{1}{r_0} \ . \tag{11.29}$$

En la ecuación anterior se introdujo r_0 definido por

$$r_0 \equiv \frac{\ell^2}{GMm^2} \ .$$

Tal como sospechábamos, la ecuación diferencial para w en función de ϕ, efectivamente es muy simple. Si el lado derecho fuese nulo, la solución sería

$$w(\phi) = A\cos(\phi) \ ,$$

donde A es una constante. (Elegir la función *seno* en lugar *coseno* sólo redefine el lugar desde el cual estamos midiendo los ángulos.) Es claro que al agregarle la constante $1/r_0$ a la última expresión, se encuentra una solución de (11.29). Por último, si en lugar de A introducimos ϵ dado por

$$\epsilon = -A\, r_0 \ ,$$

entonces la expresión para $r(\phi) = 1/w(\phi)$ queda de la forma

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \epsilon\,\cos(\phi)\ \right) \ . \tag{11.30}$$

Hemos encontrado una expresión para la distancia r en función del ángulo polar. Como es usual para ecuaciones diferenciales de segundo grado, la solución general tiene dos constantes (en este caso r_0 y ϵ) que deben determirse a partir de las condiciones iniciales.

La ecuación (11.30), de acuerdo al valor de épsilon, corresponde a las distintas secciones cónicas:

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 &\quad \text{corresponde a un círculo} \\ 0 < \epsilon < 1 &\quad \text{corresponde a una elipse} \\ \epsilon = 1 &\quad \text{corresponde a una parábola} \\ 1 < \epsilon &\quad \text{corresponde a una hipérbola} \end{aligned}$$

11.6. El campo y potencial gravitacional

La ley de gravitación universal de Newton nos da la fuerza de atracción debido a la gravedad que actúa entre dos masas, en efecto,

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = -G\frac{mM}{r^2}\,\hat{r}$$

es la fuerza que actúa sobre la masa m debido a la masa M donde r es la separación entre las masas y $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta de M a m.

Es conveniente introducir el concepto de campo gravitacional para describir el efecto que una masa M introduce en su entorno. Definimos el *campo gravitacional de la masa M* por

$$\vec{g}(\vec{r}\,) \equiv -G\frac{M}{r^2}\hat{r} \ .$$

Si en el lugar $\vec{r}$ de este campo gravitacional generado por la masa M colocamos una masa m, entonces sobre m actuará una fuerza

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r}\,) \ .$$

Un campo es un ente que está definido en todos los puntos del espacio que nos interesa. Como $\vec{g}$ es un vector, el campo gravitacional se dice que es un *campo vectorial*.

No sólo existen campos vectoriales, también existen campos escalares, tensoriales, etc.. Un ejemplo de un campo escalar es la temperatura. Supongamos que en todos los puntos de una pieza puedo medir la temperatura T, entonces $T(\vec{r}\,)$ define un campo escalar (el campo de temperatura) de la pieza. Que un campo sea vectorial significa que en cada punto no sólo tiene una magnitud sino que también una dirección.

El campo gravitacional satisface el principio de superposición: si distintas masas m_1, m_2, ...,m_N ubicados en los lugares $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ...,$\vec{r}_N$ generan campos gravitacionales $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, ...,$\vec{g}_N$, entonces el campo gravitacional en el punto $\vec{r}$ será

$$\vec{g}(\vec{r}\,) = \sum_j \vec{g}_j(\vec{r} - \vec{r}_j) = -G\sum_j \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}\,(\vec{r} - \vec{r}_j) \ .$$

Cuando se tiene un campo de fuerzas conservativo, resulta muy conveniente introducir el concepto de energía potencial. El campo gravitacional es conservativo y en un capítulo anterior demostramos que la energía potencial de dos masas M y m, separadas por una distancia r, viene dado por

$$U(r) = -G\frac{mM}{r} \ .$$

La constante aditiva arbitraria se ha elegido de manera que la energía potencial sea nula cuando las dos masas están separadas por una distancia infinita ($r \longrightarrow \infty$). La relación anterior sugiere definir otro campo, un campo escalar, por

$$\phi(r) = -G\frac{M}{r} \ .$$

$\phi(\vec{r}\,)$ se llama el *potencial gravitatorio* de la masa M. Si se coloca una masa m en el potencial gravitatorio ϕ de una masa M, entonces la energía potencial del sistema es

$$U(r) = m\phi(r) \ ,$$

donde r es la separación entre las masas m y M.

El potencial gravitacional también satisface el principio de superposición: si distintas masas m_1, m_2, ...,m_N ubicados en los lugares $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ...,$\vec{r}_N$ generan potenciales gravitacionales ϕ_1, ϕ_2, ...,ϕ_N, entonces el potencial gravitacional total en el punto $\vec{r}$ será

$$\phi(\vec{r}\,) = \sum_j \phi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) = -G\sum_j \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \ .$$

Ilustremos los conceptos anteriores con dos problemas.

Problema 1:

Considere dos masas, de valor m y $2m$, que se encuentran separados por una distancia $2a$ (ver figura adjunta).

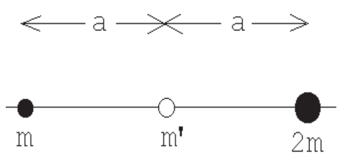

Figura 11.11

a) Calcule el valor de la energía potencial gravitacional de una masa m' ubicada en el punto medio entre las dos.

b) ¿Cuál es la fuerza gravitacional ejercida sobre m' ?

c) ¿Cuál es la *velocidad de escape* v_e ? ¿Dependerá ésta de la dirección ?

Solución

La energía potencial de una masa m' ubicada en el punto central es

$$U = m'\phi = -G\frac{mm'}{a} - G\frac{2mm'}{a} = -G\frac{3mm'}{a} \ .$$

La fuerza que actúa sobre m' es

$$\vec{F} = m'\vec{g} = m'\left[-G\frac{m}{a^2}\hat{x} + G\frac{2m}{a^2}\hat{x}\right] = -G\frac{mm'}{a^2}\hat{x} \ .$$

La velocidad de escape es la mínima velocidad que debe darse a la partícula para que se aleje llegando hasta infinito (se escape del sistema). Para que la masa m' escape su energía debe ser no negativa. La mínima energía que debe tener es por lo tanto $E = 0$, o sea, la energía cinética debe ser de igual magnitud que la energía potencial pero de signo contrario:

$$K = \frac{1}{2}m'v_e^2 = G\frac{3mm'}{a} \ .$$

Finalmente, para la velocidad de escape, que no depende de la dirección, se encuentra

$$v_e = \sqrt{\frac{6Gm}{a}} \ .$$

Problema 2:

Considere dos partículas, de masas m y M, que inicialmente están en reposo y separadas por una distancia muy grande (infinita). Demuestre que en cualquier instante su velocidad relativa de acercamiento atribuible a la atracción gravitacional es

$$v = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{D}} \ ,$$

donde D es la distancia que las separa.

Solución

Situémonos en el sistema del centro de masas. Si en cierto instante las velocidades de las dos masas (observadas desde el centro de masas) son $\vec{v}_m$ y $\vec{v}_M$, estas cumplen con

$$m\vec{v}_m = -M\vec{v}_M \ .$$

Para la energía cinética de ambas partículas se obtiene

$$K = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}mv_m^2\left(1+\frac{m}{M}\right) \ .$$

Inicialmente tanto la energía potencial (la separación es grande) como la cinética son nulas. Como la energía total se conserva, esta deberá ser nula en todo instante. Cuando las partículas están separadas por una distancia D la energía potencial es

$$U = -G\frac{mM}{D} \ ,$$

y, por lo tanto, la energía cinética debe ser de la misma magnitud pero de signo contrario:

$$K = \frac{1}{2}mv_m^2\left(1+\frac{m}{M}\right) = G\frac{mM}{D} \ .$$

Despejando v_m se obtiene

$$v_m^2 = \frac{2GM^2}{D(m+M)} \ .$$

La velocidad relativa es igual a $v = v_m + v_M$, luego

$$v = \sqrt{\frac{2GM^2}{D(m+M)}} + \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2GM^2}{D(m+M)}} = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{D}} \ .$$

11.7. El caso eléctrico: la ley de Coulomb

Resulta conveniente, en este punto, mostrar brevemente la gran analogía existente entre la fuerza de gravedad entre dos masas y la fuerza eléctrica entre dos cargas q_1 y q_2.

Caso gravitatorio

La fuerza gravitatoria sobre la masa # 2, debido a la masa # 1 viene dada por la *ley universal de gravitación de Newton*:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta de la partícula # 1 a la # 2.
El campo y potencial gravitacional asociado a una masa M es

$$\vec{g}(\vec{r}\,) = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

y

$$\phi(\vec{r}\,) = -G\frac{M}{r} \ .$$

La relación entre $\vec{g}$ y ϕ es:

$$\phi(\vec{r}\,) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{r_0}^{r} \vec{g}(\vec{r}\,)\cdot\vec{dr} \ .$$

Al colocar una masa m en el campo gravitacional de una masa M, entonces la fuerza sobre m y su energía potencial vienen dadas por

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = m\vec{g}(\vec{r}\,)$$

y

$$U(\vec{r}) = m\phi(\vec{r}) \ .$$

Caso electrostático

La fuerza electrostática sobre la carga # 2, debido a la carga # 1 viene dada por la *ley de Coulomb*:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta de la partícula # 1 a la # 2.
El campo y potencial electrostático asociado a una carga Q es

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

y

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{r} \ .$$

La relación entre $\vec{E}$ y ϕ es:

$$\phi(\vec{r}\,) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{r_0}^{r} \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot\vec{dr} \ .$$

Al colocar una carga q en el campo gravitacional de una carga Q, entonces la fuerza sobre q y su energía potencial vienen dadas por

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = q\vec{E}(\vec{r}\,)$$

y

$$U(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}) \ .$$

Observaciones:

a) Las ecuaciones electrostáticas se han dado en el sistema de unidades MKS. La unidad de la carga en este sistema de unidades es el *Coulomb* [C].

b) En la electrostática el factor $1/(4\pi\epsilon_0)$ juega el rol que G juega en la gravitación.

c) Una diferencia entre la gravitación y la electrostática es que la fuerza de gravitación entre dos masas iguales es atractiva mientras que la de dos cargas iguales es repulsiva. Esto se refleja en un cambio de signo en algunas de las ecuaciones.

d) Otra diferencia importante e interesante es que en la electrostática las cargas pueden ser positivas y negativas. Este hecho da origen a numerosas situaciones y fenómenos interesantes que no pueden darse en el caso gravitatorio (por ejemplo, el concepto de *dipolo puntual*).

11.8. Campo gravitacional de una cáscara esférica

Ejercicio: Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a+bx}\right) = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} ,$$

donde a y b son constantes. Como corolario de este ejercicio se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\, dx = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{2}{b}\left[\sqrt{a+bx_2} - \sqrt{a+bx_1}\right] .$$

Considere una cáscara esférica de radio R de densidad de masa uniforme. Si la masa total de la cáscara es M, entonces su densidad superficial de masa será

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2} .$$

Deseamos encontrar el potencial gravitacional ϕ en el punto P debido a la cáscara esférica. Para ello primero evaluamos la contribución de un anillo de ancho $R\,d\theta$ que forma un ángulo *theta* con la línea que une P con el centro de la esfera. La masa del anillo es

$$dm = \sigma\ (2\pi R \sin\theta)\ R\,d\theta .$$

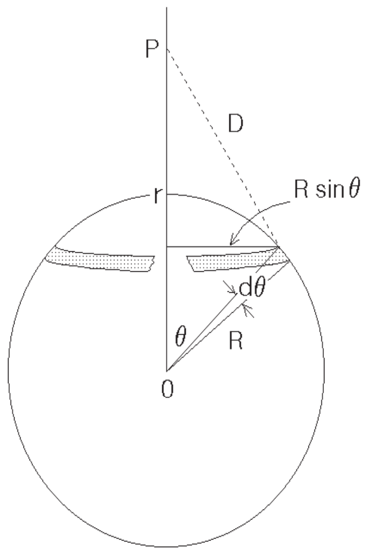

Figura 11.12

Todos los puntos del anillo están a la misma distancia $D = \sqrt{(R\sin\theta)^2 + (r - R\cos\theta)^2}$ del punto P, luego la contribución del anillo al potencial gravitatorio es

$$\begin{aligned} d\phi &= -G\frac{dm}{D} = -2\pi G\sigma R^2 \frac{\sin\theta\; d\theta}{\sqrt{(R\sin\theta)^2 + (r - R\cos\theta)^2}} \\ &= -2\pi G\sigma R^2 \frac{\sin\theta\; d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} \ . \end{aligned}$$

Sumando la contribución de todos los anillos obtenemos el potencial total:

$$\phi = \int_0^\pi d\phi = -2\pi G\sigma R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta\; d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} \ .$$

La integral la podemos evaluar con un cambio de variable. Denotemos $\cos\theta$ por s. Entonces

$$\begin{aligned} s &= \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} &= -\sin\theta \ , \end{aligned}$$

o sea

$$\sin\theta\; d\theta = ds \ .$$

Observando que si $\theta = 0$ entonces $s = 1$ y si $\theta = \pi$, entonces $s = -1$, podemos reescribir la integral:

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin\theta\; d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} = -\int_1^{-1} \frac{ds}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rRs}} \ .$$

Usando ahora el resultado del ejercicio propuesto al iniciar la presente sección (con $a = R^2 + r^2$, $b = -2rR$, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$), se obtiene

$$\begin{aligned} I &= -\int_1^{-1} \frac{ds}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rRs}} \\ &= -\frac{2}{-2rR}\left[\sqrt{R^2 + r^2 + (-2rR)(-1)} - \sqrt{R^2 + r^2 + (-2Rr)\cdot 1}\right] \\ &= \frac{1}{rR}\left[(R + r) - |R - r|\right] \end{aligned}$$

Distinguiendo con cuidado los dos casos $r > R$ y $R < r$, se obtiene que

$$I = \begin{cases} \frac{2}{R} & \text{si } r < R \\ & \\ \frac{2}{r} & \text{si } r > R \end{cases} \ .$$

De esta manera, para el potencial de una cáscara esférica de radio R y masa M se encuentra la expresión

$$\phi(r) = \begin{cases} -G\frac{M}{R} & \text{para } R > r \\ & \\ -G\frac{M}{r} & \text{para } r > R \end{cases} \ .$$

Algunas observaciones importantes respecto a este resultado:

a) Para $r > R$, o sea, cuando el punto P se encuentra fuera de la cáscara esférica, el potencial gravitacional que ésta ejerce es idéntica a la que se hubiese obtenido si toda la masa de la cáscara se ubica en el origen.

b) Si el potencial afuera es el mismo al de una masa puntual, entonces también el campo gravitacional lo será, o sea, la fuerza que la cáscara esférica ejercerá sobre una masa m (si ésta se encuentra en el exterior) será

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \ .$$

c) En el interior de la cáscara esférica el potencial gravitacional es constante (no depende de la posición). Esto significa que el campo gravitacional ahí es nulo, o sea, si colocamos una masa m en el interior, sobre ella la cáscara esférica no ejercerá ninguna fuerza gravitacional.

Resumen:

Para una cáscara esférica de radio R y masa M se tiene

$$\vec{g}(\vec{r}\,) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r} & \text{(para } r > R) \\ \\ 0 & \text{(para } r < R) \end{cases}$$

$$\phi(\vec{r}\,) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & \text{(para } r > R) \\ \\ -\frac{GM}{R} & \text{(para } r \leq R) \end{cases}$$

La figura 11.13 muestra un gráfico de la intensidad del campo gravitacional y el potencial para una cáscara esférica.

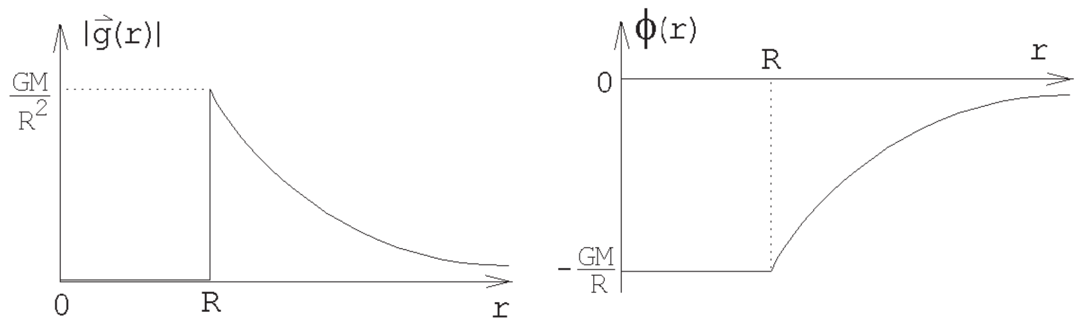

Figura 11.13

A continuación presentaremos una demostración alternativa de que una cáscara esférica no ejerce ningún campo gravitacional al interior de ella.

Algunos preliminares: Al intersectar un ángulo (infinitesimal) $d\theta$ con un círculo de radio r, el largo del arco es $ds = r\, d\theta$ (ver figura 11.14). Si tal arco se "inclina" en un ángulo β, el largo del arco (línea segmentada) ahora es $ds = r d\theta / \cos\beta$.

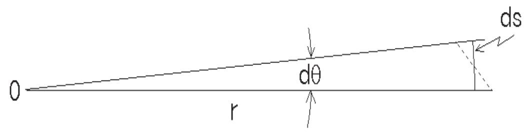

Figura 11.14

Estos conceptos se pueden generalizar para *ángulos sólidos* en tres dimensiones. Para ellos tomemos una esfera de radio r y consideremos un área A (que puede tener forma irregular) sobre la superficie. Si unimos todos los puntos del perímetro del área con el centro obtenemos un *ángulo sólido*.

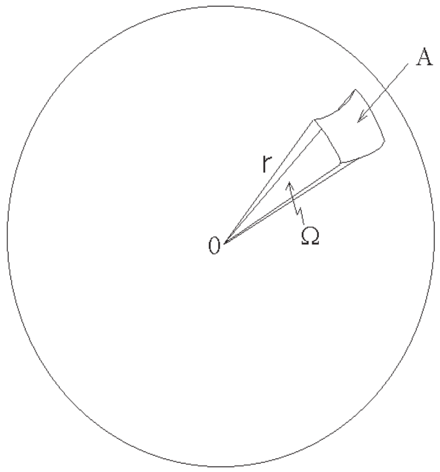

Figura 11.15

En forma análoga a lo que ocurre para ángulos en un plano, definimos el ángulo sólido por $\Omega \equiv A/r^2$. El ángulo sólido completo (en el espacio tridimensional) es, por lo tanto, 4π. A la inversa, si tenemos un ángulo sólido infinitesimal $d\Omega$ e interceptamos este con una esfera de radio r, el área definido por la intersección será $dA = r^2\, d\Omega$. Si el área la inclinamos en un ángulo β, su área será $dA = r^2\, d\Omega/\cos\beta$.

Volviendo a la cáscara esférica de radio R y masa M, evaluemos el campo gravitacional en un punto P que se encuentra en su interior (ver figura 11.16).
Consideremos un ángulo sólido $d\Omega$ desde el punto P y hacia los dos lados. El ángulo sólido intersecta a la cáscara esférica en los lugares A y B (ver figura 11.16). La inclinaciónde las áreas en A y B es en el mismo ángulo β ya que ABO es un triángulo isósceles. El área que el ángulo sólido intersecta en A es $r_1^2\, d\Omega/\cos\beta$ mientras que en B es $r_2^2\, d\Omega/\cos\beta$. Sea σ la densidad superficial de masa de la cáscara esférica.

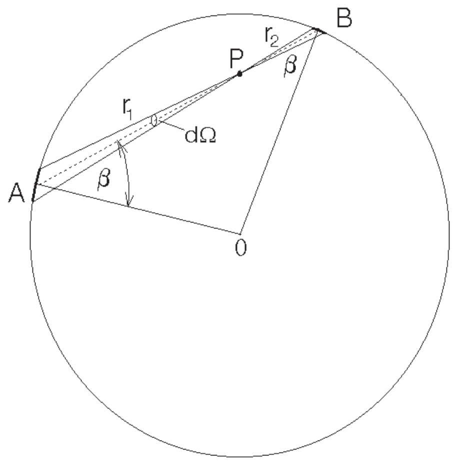

Figura 11.16

El campo gravitacional que el área A genera en P es

$$\vec{g}_A = \left[\sigma \frac{r_1^2\, d\Omega}{\cos\beta}\right] \frac{1}{r_1^2}\,\hat{n} = \frac{\sigma\, d\Omega}{\cos\beta}\,\hat{n}\ .$$

Acá $\hat{n}$ es un vector unitario que apunta de P a A. En forma análoga se obtiene que el campo gravitacional que el área B genera en P es

$$\vec{g}_B = \left[\sigma \frac{r_2^2\, d\Omega}{\cos\beta}\right] \frac{1}{r_2^2}\,(-\hat{n}) = -\frac{\sigma\, d\Omega}{\cos\beta}\,\hat{n}.$$

Se observa que el campo gravitacional de las áreas A y B se cancela exactamente. Lo mismo ocurre con cualquier otro ángulo sólido. De la discusión anterior se concluye que al interior, el campo gravitacional generado por una cáscara es necesariamente nulo.

11.9. Campo gravitacional de una esférica sólida

Evaluemos el campo gravitacional en algún punto al exterior de una esfera sólida de masa M y radio R. Para ello es conveniente pensar que la esfera está compuesta de muchas cáscaras esféricas (como una cebolla). Ya sabemos que el campo gravitacional de cada cáscara es el mismo que el que se obtiene al concentrar toda la masa de la cáscara en el centro. La suma de todas las cáscaras (que es la esfera sólida), por lo tanto, generará un campo gravitacional igual al de una masa (equivalente a la suma de las masas de todas las cáscaras) concentrada en el centro. O sea, si el punto P está al exterior de la esfera, a una distancia r del centro, el campo gravitacional será

$$\vec{g}(r) = -G\frac{M}{r^2}\,\hat{r}\ .$$

Un razonamiento análogo permite encontrar el potencial gravitacional (para un punto en el exterior): $\phi(r) = -GM/r$.

Si el punto P se encuentra al interior de la esfera se puede proceder de una manera parecida. Dividamos nuevamente la esfera en numerosas cáscaras esféricas. Todas las cáscaras esféricas con un radio mayor que r no contribuyen al campo gravitacional en P (pues P está al interior de ellas). Las capas con radio menor que r las podemos concentrar en el centro. El campo gravitacional por lo tanto será

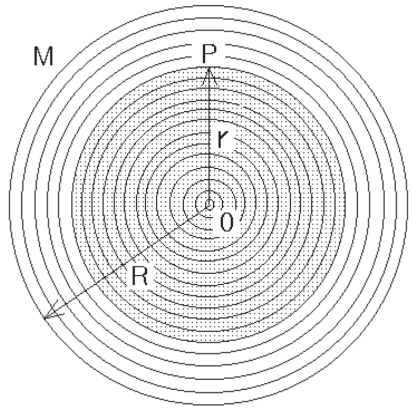

Figura 11.17

$$\vec{g}(r) = -G\frac{m}{r^2}\,\hat{r}\ ,$$

donde m es la masa de las cáscaras interiores, esto es,

$$m = M\frac{r^3}{R^3}\ .$$

De manera análoga se procede para encontrar el potencial gravitatorio al interior de una esfera sólida.

Resumen: Para una esfera sólida homogénea, de radio R y masa M, se tiene

$$\vec{g}(\vec{r}\,) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r} & (\text{para } r > R) \\ \\ -\frac{GMr}{R^3}\,\hat{r} & (\text{para } r < R) \end{cases}$$

$$\phi(\vec{r}\,) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & (\text{para } r > R) \\ \\ -\frac{GM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & (\text{para } r \le R) \end{cases}$$

La figura 11.18 muestra un gráfico de la intensidad del campo gravitacional y el potencial para una cáscara esférica.

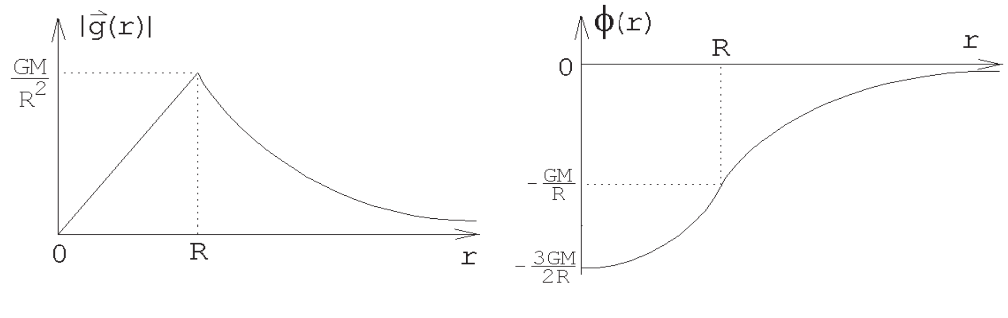

Figura 11.18

Densidad media de la Tierra

Problema: Determinar la densidad media de la Tierra suponiendo concocidos el valor de la constante de la gravitación G, la aceleración de la gravedad g y el radio terrestre R.

Solución: Sobre una masa m colocada en la superficie de la Tierra actúa una fuerza igual a mg. Por otra parte, el campo gravitacional de la Tierra para un punto sobre su superficie se puede evaluar suponiendo que toda la masa de la Tierra está en el centro, es decir,

$$|\vec{g}(R)| = \frac{GM}{R^2} \ ,$$

donde M es la masa total de la tierra. Conociendo el campo garvitacional podemos evaluar la fuerza que actúa sobre una masa m; esta es

$$m|\vec{g}(R)| = \frac{GMm}{R^2} \ .$$

Igualando las dos expresiones para la fuerza se obtiene para g la expresión

$$g = \frac{GM}{R^2} \ .$$

Esta ecuación relaciona la aceleración de la gravedad g=9,81 m/s^2 con la constante gravitacional G y la masa y radio terrestre M y R, respectivamente.

La densidad media de la Tierra viene dada por

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi G R} \\ &= \frac{3 \cdot 981,0}{4\ \pi\ 6,67 \cdot 10^{-8}\ 6,4 \cdot 10^{8}} \simeq 5,5\ \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \ . \end{aligned}$$

(Para referencia: la densidad del hierro, que es el principal elemento del núcleo terrestre, es de 7,86 g/cm^3.)

11.10. Problemas

1. Júpiter tiene doce lunas conocidas, cuatro de las cuales fueron descubiertas por Galileo. Estos son los radios y períodos de las primeras cuatro:

R (Km)	T (días)
180.000	0,498
422.000	1,769
671.000	3,551
1.072.000	7,155

a) ¿Obedecen estos cuatro satélites a la tercera ley de Kepler?
b) Con estos datos y el valor de G, encuentre la masa de Júpiter.
c) El diámetro de Júpiter es de 142.900 Km. ¿Cuál es su densidad media?

2. Las órbitas de dos satélites terrestres A y B son elípticas, siendo R y $4R$, respectivamente, sus ejes mayores.
a) ¿Cuál es el cuociente entre sus energías mecánicas totales?
b) ¿Cuál es el cuociente entre sus períodos?
c) ¿Qué puede decirse del cuociente entre sus momentos angulares?

3. Un satélite artificial recorre una trayectoria circular 320 Km por encima de la superficie terrestre.
a) ¿Cuál será su velocidad?
b) ¿Con qué frecuencia girará alrededor de la Tierra?

4. Dos satélites artificiales de igual masa orbitan alrededor de un planeta. S_1 se mueve en una órbita circular de radio 10^8 [m] y período de 5 días, S_2 se mueve en una órbita elíptica de radios $r_{min} = 10^8$ [m] y $r_{max} = 2 \cdot 10^8$ [m].
a) A partir de los datos para la órbita circular, calcule la masa del planeta.
b) Encuentre el período de S_2.

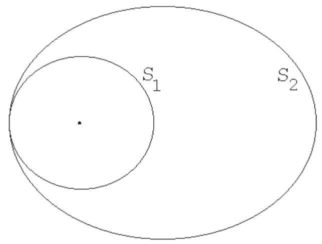

Figura 11.19

c) ¿Cuál satélite es más veloz al pasar por B? ¿Cuál tiene mayor energía?
d) Calcule el cuociente entre las velocidades que S_2 tiene en B y en A.
e) ¿Qué maniobra debería ordenar el puesto de mando para poner S_2 en la órbita de S_1?

5. Un satélite es *geoestacionario* si para un observador fijo sobre la Tierra este no se mueve. La órbita de tal satélite necesariamente deberá coincidir con el plano del Ecuador terrestre. Determine el radio de la órbita del satélite.

Respuesta: $R \simeq 42.000$ km.

6. ¿A qué distancia de la Tierra debe colocarse un cuerpo en la línea dirigida hacia el Sol de tal manera que la atracción gravitacional solar contrarreste a la atracción de la Tierra? El Sol está a $15 \cdot 10^7$ Km de distancia y su masa es de $M_S = 3,24 \cdot 10^5\ M_T$ (M_T es la masa de la Tierra $= 5,97 \cdot 10^{24}$ Kg). Analice el problema incluyendo el efecto introducido por la rotación de la Tierra alrededor del Sol (o sea, tanto la Tierra como el cuerpo giran alrededor del Sol una vez al año).

   Para encontrar la solución (aproximada) use el hecho de que $M_T/M_S \ll 1$.

   Respuesta:
   $$r \simeq R\left(1 - \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}\right)$$
   es la solución que se tiene si el cuerpo se encuentra entre la Tierra y el Sol. Hay dos soluciones adicionales si se permite que r sea mayor que R. Convénzase de ésto y encuéntrelas.

7. Dos satélites A y B giran alrededor de la Tierra en la misma órbita circular (de radio R), pero uno al lado opuesto de la Tierra respecto al otro. Se desea interceptar el satélite B con un proyectil lanzado desde A. Estudie el problema e indique velocidad y dirección en que debe lanzarse el proyectil para lograr su objetivo. Dé al menos 3 soluciones distintas.

8. El perigeo, punto más próximo de la órbita de un satélite, se halla a 320 Km de la superficie terrestre, y el apogeo, punto más alejado, a 2400 Km.
   a) ¿Cuál es el semieje mayor de la órbita del satélite?
   b) ¿Cuál es la excentricidad de su órbita?
   c) Si el satélite tiene una masa de 15 Kg, ¿cuál es su energía total?
   d) ¿Cuál es su velocidad en el apogeo?
   e) ¿Cuál es su velocidad en el perigeo?
   f) ¿Cuál es su momento angular?

9. Una pequeña masa m cae hacia el Sol partiendo del reposo desde una distancia igual al radio de la órbita terrestre. Determine el tiempo de caída usando sólo las leyes de Kepler.

10. Se dice que la órbita de un satélite es *heliosincrónica* si pasa diariamente por los mismos lugares a la misma hora. Suponiendo que la altura mínima de un

satélite es de 200 km por sobre la superficie terrestre, encuentre los radios de todas las orbitas heliosincrónicas circulares.

11. Considere la parábola $y = ax^2$.
a) Encuentre su foco.
b) Traslade el sistema de coordenadas de manera que el nuevo origen coincida con el foco calculado en la parte a).
c) Introduzca coordenadas polares (r, ϕ), midiendo ϕ desde el mínimo de la parábola y demuestre que la ecuación de la parábola queda de la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s}(1 - \epsilon \cos \phi)$$

con $\epsilon = 1$ y s algún valor constante.

12. Un satélite gira sobre el Ecuador, en el mismo sentido que la Tierra, en una trayectoria elíptica con $r_{min} = 200$ Km y $r_{max} = 500$ Km. Se desea poner este satélite en órbita geoestacionaria. El cohete del satélite es capaz de acelerarlo con una aceleración $a = 50$ m/s^2. ¿En qué instantes y durante cuánto tiempo se deben prender los motores para lograr el propósito?

13. Calcule el período de rotación de la Luna entorno a la Tierra sabiendo que el radio de su órbita es 60,3 veces el radio de la Tierra.

14. Un cometa de masa $\alpha\, m$ se dirige ("cae") radialmente hacia el sol. Observaciones astronómicas permiten establecer que la energía mecánica total del cometa es nula, es decir, $E = 0$. El cometa se estrella contra Venus, cuya masa es m. Supongamos además que la trayectoria de Venus es circular, de radio R_0. A consecuencia del choque, el cometa y Venus forman un solo astro que llamaremos Vennus.

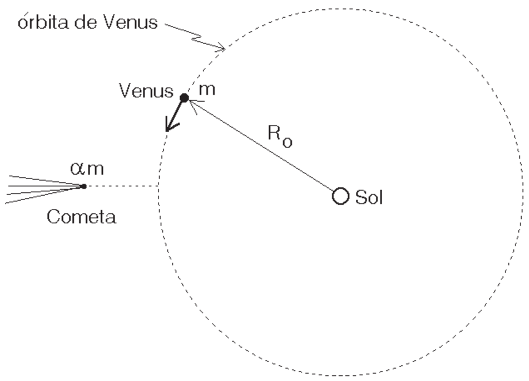

Figura 11.20

a) Calcule la rapidez v_0 y el período de Venus antes de la colisión.

b) Calcule la energía mecánica de Venus en su órbita antes de chocar con el cometa.

c) Calcule la velocidad radial y el momento angular de "Vennus" inmediatamente después de la colisión.

d) Determine la energía mecánica de Vennus y exprésela en términos de m, α y v_0.

e) Demuestre que la órbita de Vennus es elíptica y determine el semieje mayor de la órbita.

f) Determine si el año para los "venusianos" se ha acortado o alargado a causa del choque con el cometa.

Respuesta parte f): La razón del período de Vennus y Venus es

$$\frac{T'}{T} = \left[\frac{1+\alpha}{1+4\alpha}\right]^{3/2} \quad .$$

15. Un proyectil de masa m se lanza tangencialmente a la superficie de la Tierra. Suponiendo que no hay resistencia del aire (como en la Luna), calcular la rapidez v_0 con que el proyectil debeser lanzado para que orbite en forma circular y razante a la Tierra. Compare esta velocidad con la velocidad de escape. Calcule el momento angular y la energía del proyectil en esta situación.

16. El proyectil del problema anterior ahora es lanzado horizontalmente a la superficie de la Tierra con una rapidez αv_0, con $1, \alpha < \sqrt{2}$. Calcule la distancia radial del perigeo y apogeo y la excentricidad de la óbita.

17. Dos partículas de igual masa se unen mediante una cuerda ideal de longitud h. El par es atraído gravitacionalmente por un planeta de masa M. La distancia entre el planeta y la partícula mas cercana es R, con $h \ll R$.

    a) Despreciando la fuerza de atracción entre las dos partículas, calcule la tensión de la cuerda si ellas caen sobre el planeta con la cuerda estirada y dispuesta radialmente.

    b) Ahora tome en cuenta la atracción gravitacional entre las dos masas. Demuestre que para que la cuerda no esté tensa la masa de cada partícula debe ser $m = M(h/R)^3$.

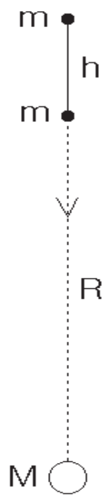

Figura 11.21

18. Marte tiene un diámetro medio de 6.800 Km, la masa de Marte es 0.107 M_T.
a) ¿Cuál es la densidad media de Marte comparada con la de la Tierra?
b) ¿Cuál es el valor de g en Marte?
c) ¿Cuál es la velocidad de escape en Marte?

19. La estrella enana Sirio B tiene un radio que es 1/50 del radio solar, a pesar de tener aproximadamente la misma masa que el sol.
a) ¿Cuál es el valor de g en la superficie de Sirio B? b) ¿Cuál será la densidad media de Sirio B?

20. Una esfera uniforme de densidad ρ_o y radio R_1 tiene una cavidad esférica de radio R_2. Encuentre el potencial en el punto $\vec{r}$ (ver figura 11.22).

21. ¿Cuál sería el peso suyo si el radio de la Tierra doblara su valor,
a) manteniéndose la masa de la Tierra igual a la actual?
b) manteniéndose la densidad promedio de la Tierra igual a la actual?

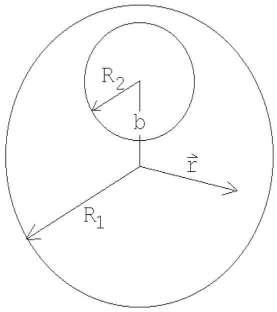

Figura 11.22

22. Dos esferas de plomo, de 1 m de radio, están en contacto.
a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de atracción mutua?
b) ¿Qué velocidad tendrían en el instante de contacto si partieran de posiciones muy separadas en el espacio y "cayeran" una contra la otra? (ρ_{plomo} = 11.3 g/cm^3).

23. Un satélite de masa $m = 5$ kg es lanzado a una órbita circular cuyo período es de 120 minutos. Ignore la rotación de la Tierra y también cualquier efecto del roce viscoso del satélite con el aire.

    a) Calcule la razón ewntre el radio de la órbita del satélite y el radio terrestre.

    b) Calcule la energía mínima requerida para poner al satélite en dicha óbita. De esta energía ¿qué fracción se uso para "subirlo" y que fracción para darle la velocidad requerida?

24. Una nave cósmica se dirige hacia la Luna a lo largo de una trayectoria parabólica que casi toca a la superficie lunar. En el momento de máxima aproximación un motor de frenado, en un breve lapso, modifica la velocidad de la nave de manera que esta entre en una órbita circular alrededor de la Luna. Encuentre la velocidad de la nave justo antes y después del frenado. La masa y el radio lunar son $M = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg y $R = 1,74 \cdot 10^6$ m, respectivamente.

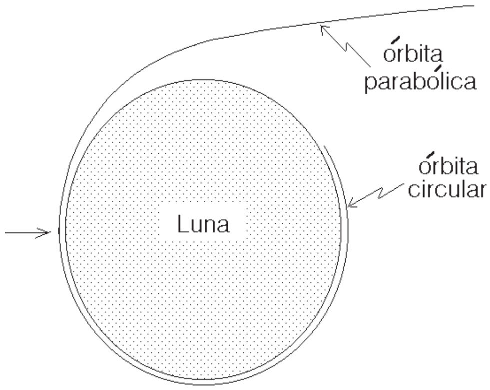

Figura 11.23

25. Se taladra un túnel liso y recto a través de un planeta esférico cuya densidad de masa ρ_o es constante. El túnel pasa por el centro del planeta y es perpendicular al eje de rotación del mismo. El planeta rota con una velocidad angular determinada de modo que los objetos dentro del túnel no tienen aceleración relativa al túnel. Hallar la relación entre ρ_o y ω para que esto sea cierto.

26. Demuestre que en un conducto excavado en la Tierra, siguiendo una cuerda cualquiera, (no siguiendo necesariamente un diámetro), el movimiento de un objeto será armónico simple. (Desprecie efectos de roce y de la rotación de la Tierra). Encuentre el período del movimiento.

27. Discuta el origen de las mareas. ¿Por qué se presentan dos mareas y no una sola?

28. Encuentre la órbita de una partícula que se mueve en un campo central que genera una fuerza

$$F(r) = -\frac{Gm_1\, m_2}{r^2} + \frac{\alpha^2}{\mu r^3}\ .$$

Si α es pequeño con respecto al momento angular ℓ muestre que la órbita corresponde a una elipse cuya orientación precesa lentamente. Encuentre el ángulo $\Delta\Phi$ en que cambia la orientación del semi–eje mayor en un período. (Indicación: Repita lo hecho en la sección 11.5 pero con la nueva expresión para $\vec{F}$).

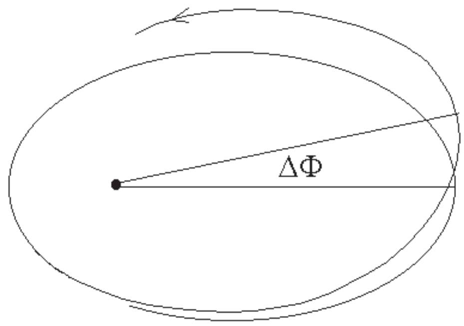

Figura 11.24

29. a) Demuestre que para escapar de la atmósfera de un planeta una condición que debe cumplir una molécula es que tenga una velocidad tal que $v > \sqrt{2GM/r}$, siendo M la masa del planeta y r la distancia de la molécula al centro del planeta.
b) Determine la velocidad de escape para una partícula atmosférica a 1000 Km sobre la superficie de la Tierra.
c) Haga lo mismo para la Luna.

30. Considere una esfera de radio a y hecha de materia homogénea y que al interior tiene una cavidad esférica concéntrica de radio b.

a) Haga un gráfico de la fuerza de gravitación F ejercida por la esfera sobre una partícula de masa m, localizada a una distancia r del centro de la esfera.

b) Haga un gráfico de la energía potencial gravitacional $U(r)$ de la masa m en función de r.

c) Demuestre que en el límite $b \longrightarrow a$ vuelve a obtener el resultado correspondiente a una cáscara esférica.

d) Demuestre que en el límite $b \longrightarrow 0$ vuelve a obtener el resultado correspondiente a una esfera sólida.

31. Considere un recipiente (cascarón) semiesférico. Demuestre que en cualquier punto del plano que pasa por el borde del recipiente (a modo de tapa, región punteada), el campo gravitatorio es perpendicular a dicho plano.

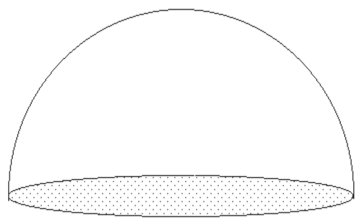

Figura 11.25

32. Considere una semiesfera sólida de masa M y radio R, fija. ¿Cuál es el trabajo que se debe realizar para llevar una pequeña masa m desde el centro de la base hasta el infinito?

33. Una partícula de masa m se encuentra situada sobre el eje de simetría de un anillo de masa M y radio R, a la distancia d del plano del anillo.

    a) Encontrar la fuerza con que el anillo atrae a la masa m, en términos de G, M, m, R y d.

    b) Discuta en particular los casos $d = 0$ y $d \longrightarrow \infty$, y convénzase de que se obtiene lo que uno espera intuitivamente.

    c) Si la masa m se mueve a lo largo del eje y parte del infinito (desde una distancia muy grande) con velocidad nula, ¿con que velocidad pasará por el centro del anillo? (Suponga que el anillo no se mueve, es decir, hay una fuerza externa que lo mantiene fijo).

34. Considre un satélite de masa m que gira en una órbita circular de radio R an torno a un planeta de masa $M \gg m$.

    a) Determine la velocidad del satélite.

    b) Suponga que el satélite es interceptado por un proyectil, también de masa m, que se desplaza radialmente hacia el planeta. Sea $\vec{v}_1 = -v_1\hat{r}$ la velocidad del proyectil justo antes del impacto. Suponga que el choque es completamente inelástico (es decir, el proyectil y el satélite forman un solo cuerpoo después de la colisión). Encuentre la velocidad que tiene el proyectil–satélite justo después del choque.

    c) Determine la mínima rapidez v_1 que debe tener el proyectil justo antes del choque para que el cuerpo proyectil–satélite logre escapar del campo gravitacional del planeta.

35. Considere un casquete esférico fijo, muy delgado, de densidad uniforme, radio R y masa M, que posee dos orificions que lo perforan en posiciones diametralmente opuestas. Una masa puntual m se encuentra inicialmente en reposo a una distancia $3R$ de su centro sobre la línea que une las perforaciones. Encuentre el tiempo que tarda la masa m en cruzar el casquete de un extremo al otro.

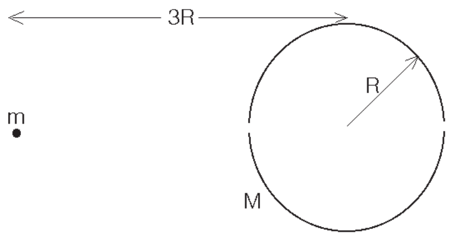

Figura 11.26

36. Dos cáscaras esféricas del mismo radio R y masa M se encuentran separados (sus centros) por una distancia r.

    a) Haga un gráfico esquemético de la energía potencial gravitatoria a lo largo de la recta A, B.

    b) Si una partícula de masa m se suelta en reposo desde el centro de la esfera $\#1$, ¿con qué velocidad llega a la superficie de la esfera $\#2$?

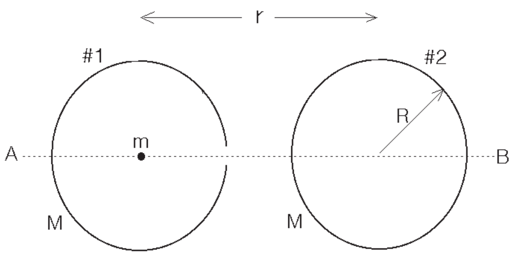

Figura 11.27

    (c) ¿Cuál es la máxima separación r a la que pueden estar las esferas para que la masa m llegue a la superficie de la cáscara esférica $\#2$?

11.11. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 4

(a) La fuerza gravitacional debe coincidir con la fuerza centrípeta. Sea M la masa del planeta y m la masa del satélite, entonces

$$-G\frac{Mm}{R^2}\hat{r} = -\frac{mv^2}{R}\ \hat{r}\ ,$$

donde $v = 2\pi R/T$ es la velocidad del satélite en su órbita circular. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{24}}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (5 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \text{ kg} \simeq 3,2 \cdot 10^{24} \text{ kg} .$$

(b) De acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2} ,$$

donde a_1 y a_2 son los semiejes mayores de las trayectorias elípticas de los satélites. De acuerdo al enunciado $a_1 = 10^8$ [m] y $a_2 = (r_{\text{min}}+r_{\text{max}})/2 = 1,5\cdot 10^8$ [m], luego $a_1/a_2 = 2/3$. Para T_2 se obtiene

$$T_2 = T_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2} = 5 \cdot (1,5)^1,5 \text{ días} \simeq 1,19 \text{ días} .$$

(c) La energía total y el semieje mayor de un satélite están relacionados por la ecuación

$$E = -G\frac{mM}{2a} .$$

La energía es inversamente proporcional al semieje mayor, pero observe que debido al signo menos, la órbita que tiene el mayor a tiene también mayor energía (es menos negativa). Concluímos que el satélite S_2 es el que tiene mayor energía. En el punto B ambos satélites tienen la misma energía potencial, luego la energía cinética de S_2 es mayor que la de S_1. El satélite S_2 es mas rápido que S_1 cuando pasan por B.

(d) Se tiene que (todo evaluado en el punto B)

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} .$$

Por otra parte, para la órbita circular $U = -2K_1$, o sea,

$$E_1 = U + K_1 = U - \frac{U}{2} = \frac{U}{2} = -G\frac{Mm}{2R^2} .$$

Se tiene

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{U + K_2}{U/2} = \frac{2}{3} .$$

De aquí se deduce que $K_2 = -2U/3$. Luego

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{-2U/3}{-U/2} = \frac{4}{3} = \frac{v_2^2}{v_1^2} .$$

(e) Para pasar de la óbita elíptica a la circular, el satélite S_2 debe, cuando se encuentra pasando por el punto B, prender los motores y "frenar" hasta bajar la velocidad de v_2 a v_1.

Solución al problema 9

La trayectoria de la masa m que cae hacia el Sol es el límite de una elipse en que el semieje menor b tiende a cero. En ese caso la trayectoria es una línea recta estando el Sol en uno de los extremos. El semieje mayor de tal elipse es $a = R/2$, donde $R = a_T$ es el radio (igual al semieje mayor) de la trayectoria circular de la Tierra. De acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_m}{T_T} = \left(\frac{a}{a_T}\right)^{3/2} = 2^{-3/2} = 0,3536 \ .$$

El tiempo t_0 que demora la masa m en llegar al sol es la mitad del período de su órbita, o sea,

$$t_0 = \frac{T_m}{2} = \frac{T_T}{2} \cdot 0,3536 \simeq 64,5 \text{ días} \ .$$

Solución al problema 14

(a) Sea M la masa del Sol, entonces, igualando la fuerza gravitacional con la fuerza centrípeta

$$-\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r} = -\frac{mv_0^2}{R_0}\hat{r}$$

se obtiene

$$v_0^2 = \frac{GM}{R_0} \ .$$

(b) La energía meánica de Venus (antes de la colisión) es

$$E_i = -\frac{GMm^2}{R_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GMm}{2R_0^2} \ .$$

(c) Como el cometa (cuando está lejos) se mueve radialmente hacia el sol, no tiene momento angular (respecto al origen en el Sol). Luego el momento angular de Vennus es el mismo que el de Venus

$$L = R_0 m v_0 \ .$$

Esto nos permite encontrar la componente $\hat{\theta}$ de la velocidad de Vennus justo después de la colisión. El momento angular justo despues de la colisión es

$$L = R_0(m + \alpha m)v_\theta \; .$$

Como el momento angular se conserva se deduce que

$$v_\theta = \frac{v_0}{1+\alpha} \; .$$

La conservación del momento lineal en la dirección radial hay que darse cuenta que la interacción entre Venus y el cometa son fuerzas internas y, por lo tanto, para calcular la velocidad del cometa podemos ignorar el efecto introducido por la interacción entre el cometa y Venus. El cometa tiene energía nula, luego,

$$K = -U = +\frac{GM\alpha m}{R_0} = \frac{1}{2}\alpha m v_C^2 \; .$$

(v_C es la velocidad del cometa justo antes de la colisión ignorando el efecto introducido por Venus). Se deduce que

$$v_C^2 = \frac{2GM}{R_0} \; .$$

Aplicamos ahora la conservación del momento lineal a lo largo de la dirección radial

$$\alpha m v_C = (m + \alpha m)v_r \; ,$$

donde v_r es la velocidad de Vennus justo después de la colisión. Se deduce que

$$v_r = \frac{\alpha}{1+\alpha} v_C \; .$$

(d) La energía mecánica de Vennus (la evaluamos justo después del choque) es

$$\begin{aligned}
E_f &= U + K = -\frac{GMm(1+\alpha)}{R_0} + \frac{1}{2}m(1+\alpha)(v_\theta^2 + v_r^2) \\
&= -(1+\alpha)\frac{GMm}{R_0} + \frac{1}{2}(1+\alpha)\left[2\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right]\frac{GMm}{R_0} \\
&= -\frac{GMm}{2R_0}\left(\frac{1+4\alpha}{1+\alpha}\right) = E_i\left(\frac{1+4\alpha}{1+\alpha}\right) \; .
\end{aligned}$$

(e) la órbita de Vennus obviamente ya no es un círculo. Como la energía es negativa debe, por lo tanto, ser elíptica. Se tiene que

$$\frac{E_i}{E_f} = \frac{a_f}{a_i} = \frac{a_f}{R_0} \; .$$

Aquí a_i y a_f son los semiejes mayores de las órbitas de Venus y Vennus, respectivamente. Se deduce que

$$a_f = R_0 \frac{E_i}{E_f} = R_0 \frac{1+\alpha}{1+4\alpha} \ .$$

(f) Usando la tercera ley de Kepler podemos calcular la razón del período de Vennus y Venus:

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{a_f}{r_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{1+\alpha}{1+4\alpha}\right)^{3/2} \ .$$

Solución al problema 17

(a) La fuerza neta que actúa sobre la partícula más cercana, llamémosla #1, es

$$\vec{F}_1 = -\frac{GMm}{R^2}\hat{r} + T\hat{r} \ .$$

La fuerza neta que actúa sobre la otra partícula (#2) es

$$\vec{F}_2 = -\frac{GMm}{(R+h)^2}\hat{r} - T\hat{r} \ .$$

Como el hilo que las une es inextensible, ambas partículas aceleran con la misma aceleración $\vec{a} = -a\hat{r}$. Se tiene

$$\vec{F}_1 = -ma\hat{r} = -\frac{GMm}{R^2}\hat{r} + T\hat{r} \ .$$

y

$$\vec{F}_2 = -ma\hat{r} = -\frac{GMm}{(R+h)^2}\hat{r} - T\hat{r} \ .$$

Despejando la tensión del hilo T se encuentra que

$$T = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2}\right) \ .$$

Con $h \ll R$ se obtiene la expresión

$$T = \frac{GMmh}{R^3} \ .$$

(b) Para que la cuerda no quede tensa la fuerza gravitacional entre las partículas debe coincidir con T, o sea,

$$T = \frac{Gmm}{h^2} .$$

Despejando m de las dos últimas ecuaciones se encuentra

$$m = M \left(\frac{h}{R}\right)^3 .$$

Solución al problema 32

El trabajo que debemos realizar es independiente del camino que elijamos para llevar la masa m del centro de la basa de la semiesfera hasta el infinito. Elijamos un camino recto paralelo a la base. Sea éste el eje $\hat{x}$ y denotemos por $\hat{y}$ al eje que coincide con el eje de simetría de la semiesfera (ver figura).

Sea $\vec{F}(x)$ la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa m cuando esta se encuentra sobre el eje $\hat{x}$ en la posición x. Esta fuerza tendrá dos componentes

$$\vec{F}(x) = -F_x(x)\hat{x} + F_y(x)\hat{y} .$$

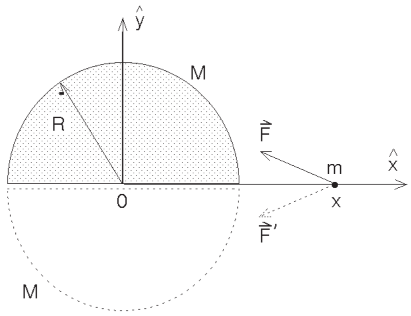

Figura 11.28

La componente y de la fuerza no nos interesa pues al evaluar el trabajo con la expresión

$$W = -\int_0^\infty \vec{F}(x) \cdot (dx\,\hat{x})$$

se observa que tal componente es perpendicular al desplazamiento y, por lo tanto, no figura al evaluar el producto punto. Para evaluar $F_x(x)$ coloquemos una segunda semiesfera idéntica en la parte inferior (ver figura línea punteada). Por simetría la fuerza que ejerce esta segunda esfera es

$$\vec{F}'(x) = -F_x(x)\hat{x} - F_y(x)\hat{y} ,$$

o sea, la componente x es la misma, pero la componente y cambia de signo. El efecto de las dos semiesferas es

$$\vec{F} + \vec{F}' = -2F_x(x)\hat{x} .$$

Pero, por otra parte, las dos semiesferas forman una esfera completa de masa $2M$, y para ese caso sabemos que la fuerza es (ver sección 11.9)

$$m\vec{g}(\vec{x}\,) = \begin{cases} -\frac{G(2M)m}{x^2}\,\hat{x} & \text{(para } x > R) \\ \\ -\frac{G(2M)m}{R^3}\,\hat{x} & \text{(para } x < R) \end{cases}$$

Igualando las dos expresiones se encuentra que

$$F_x(x) = \begin{cases} \frac{GMm}{x^2} & \text{(para } x > R) \\ \\ \frac{GMm}{R^3} & \text{(para } x < R) \end{cases}$$

Esto es exactamente el mismo resultado que se tendría para una esfera sólida completa de masa M y radio R. Podemos entonces usar los resultados que se encontraron en la sección 11.9 para la esfera sólida. El trabajo lo podemos evaluar usando el potencial gravitatorio ϕ. El potencial gravitatorio (con el cero del potencial en el infinito) al centro de una esfera sólida es

$$\phi(0) = -\frac{3GM}{2R}\ .$$

Luego eltrabajo para llevar la masa m del origen al infinito es

$$W = m\frac{3GM}{2R}\ .$$

Solución al problema 35

Sobre la partícula m no se ejerce ninguna fuerza cuando se encuentra al interior del casquete. Si v_0 es la velocidad con que llega a la superficie, entonces el tiempo de travesía es $t_0 = 2R/v_0$. Para calcular la velocidad v_0 hacemos uso del hecho de que la energía debe conservarse. La energía de m en el punto de partida es

$$E_i = -\frac{GMm}{3R}\ ,$$

mientras que cuando llega a la superficie es

$$E_f = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2\ .$$

Igualando las dos expresiones se deduce que

$$v_0^2 = \frac{4GM}{3R}\ .$$

Al interior del casquete no hay fuerzas sobre la masa m y, por lo tanto, su velocidad se mantiene contante. Para el tiempo de travesía se obtiene

$$t_0 = \sqrt{\frac{3R^3}{GM}}\ .$$