

## Teoría de la Relatividad Especial. Segunda parte.

Víctor Muñoz, diciembre 2001

# 1 Energía y momentum

## 1.1 Introducción

Hasta el momento, hemos estudiado la Relatividad Especial a través de los gráficos de Loedel, donde las coordenadas son el tiempo y el espacio. Ahora propondremos otro modo de encontrar resultados en Relatividad Especial, graficando en coordenadas de energía y momentum.

## 1.2 Diagramas energía-momentum

La luz consiste de fotones, partículas elementales con energía  $E$  y momentum  $p$  dados por:

$$E = h\nu , \quad \vec{p} = E/c . \quad (1)$$

Puesto que la luz se desplaza con velocidad  $c$ , su línea de vida en un diagrama  $x-t$  satisface:

$$\vec{x} = ct . \quad (2)$$

Las relaciones anteriores nos permiten ver cierta analogía entre  $\vec{x}$  y  $\vec{p}$  por una parte, y entre  $t$  y  $E$  por otra. Basados en ello, proponemos representar eventos según sus coordenadas  $(E, \vec{p}c)$ . Siguiendo las ideas presentadas en la primera parte del curso, restringimos nuestro tratamiento a una dimensión, de modo que  $\vec{p}$  tiene sólo una componente. En estos diagramas, la línea de vida de un fotón es la bisectriz del ángulo entre los ejes  $(\hat{p}c, \hat{E})$ .

De acuerdo al Principio de Relatividad, un fotón debe ser observado como un fotón por todo observador inercial, de modo que (1) debe ser cierta en todo sistema de referencia. Por tanto, si dibujamos los ejes  $(\hat{p}'c, \hat{E}')$  de un observador  $O'$  que se mueve hacia la izquierda del observador  $O$  anterior, la línea de vida del fotón será también bisectriz del ángulo entre los ejes  $(\hat{p}'c, \hat{E}')$ . Esto nos permite establecer la primera versión de los diagramas de energía-momentum (Fig. 54).

Sin embargo, por las mismas razones esgrimidas en los diagramas de espacio-tiempo, esta versión es poco conveniente: (a) Los ejes asociados a  $O$  y  $O'$  no son equivalentes, aun cuando los sistemas de referencia son equivalentes

de acuerdo al Principio de Relatividad; (b) Las escalas a lo largo de los ejes de  $O$  y  $O'$  no son iguales, y esto dificulta el hacer geometría con ellos. Ya sabemos que ambos problemas se solucionan dibujando los ejes de modo que  $\hat{E} \perp \hat{p}'c$ , y  $\hat{E}' \perp \hat{p}c$  (Fig. 55).

En los diagramas de espacio-tiempo, encontramos la relación entre el ángulo  $2\alpha$  y la velocidad relativa  $v_0$  entre los observadores, considerando un evento que le sucedía a uno de los observadores, y comparando sus coordenadas en cada sistema de referencia. Para ello tuvimos que utilizar la definición de velocidad entre los sistemas de referencia. Breves momentos de reflexión deberían convencernos de que esto no es posible ahora. Afortunadamente, tenemos otra alternativa: algo que sí sabemos (lo único, de hecho), es cómo es observado un fotón por  $O$  y  $O'$ . Consideremos entonces un evento  $P$  que ocurre sobre la línea de vida del fotón (Fig. 55). Este evento tiene coordenadas  $(pc, E)$  y  $(p'c, E')$ . Observamos que

$$\begin{aligned} E &= \overline{OA} + \overline{AE} \\ &= E' \cos(2\alpha) + \overline{PE} \sin(2\alpha) \\ &= E' \cos(2\alpha) + pc \sin(2\alpha) \\ &= E' \cos(2\alpha) + E \sin(2\alpha) . \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$E = E' \sqrt{\frac{1 + \sin(2\alpha)}{1 - \sin(2\alpha)}} . \quad (3)$$

Pero ya conocemos el efecto Doppler relativista: si dos observadores se acercan, las energías de un fotón observado por ellos están relacionadas por

$$E = E' \sqrt{\frac{1 + v_0/c}{1 - v_0/c}} .$$

Ambos resultados sólo son consistentes si

$$\sin(2\alpha) = \frac{v_0}{c} , \quad (4)$$

el mismo resultado encontrado para los diagramas de espacio-tiempo.

### 1.3 Equivalencia masa-energía

De momento, sólo sabemos describir fotones en diagramas de energía-momentum, pues sabemos que  $E = pc$ , para todo observador inercial. Sin

embargo, para cualquier otra partícula, no sabemos cuál es la relación entre energía y momentum, y por tanto no podemos asociarles puntos en nuestros gráficos. Naturalmente, el punto que representa una partícula distinta del fotón deberá estar fuera de las bisectrices, de modo que consideremos un punto  $Q$  fuera de la bisectriz.

Si  $Q$  no representa el estado de un fotón, entonces existe un sistema de referencia  $O'$  en el cual  $Q$  está en reposo. En dicho sistema de referencia, la  $p' = 0$ , es decir,  $Q$  se encuentra sobre el eje de energía de  $O'$ . En la Fig. 56 hemos representado el sistema de referencia  $O$  original, y el sistema de referencia  $O'$  en el cual  $Q$  está en reposo. Las coordenadas de  $Q$  para  $O'$  son:

$$p' = 0 , \quad E' = E_0 .$$

Observamos que aunque  $Q$  está en reposo, su energía es distinta de cero. En Mecánica Clásica esto no es del todo sorprendente, porque siempre hemos sabido que las energías están definidas salvo una constante aditiva. La diferencia crucial ahora es que, en Mecánica Clásica, dicha constante es arbitraria. Sin embargo, ahora esa cantidad es  $E_0$ , un número bien definido, que llamamos *energía en reposo*.

Simple consideraciones geométricas sobre la Fig. 56 nos muestran que:

$$E \cos 2\alpha = E_0 , \tag{5}$$

$$pc = E \operatorname{sen} 2\alpha , \tag{6}$$

de modo que

$$pc = E_0 \tan 2\alpha .$$

Podemos determinar  $E_0$  considerando el límite de velocidades pequeñas, donde sabemos cómo se relacionan energía y momentum. Si  $v_0/c \ll 1$ ,

$$pc = E_0 \frac{(v_0/c)}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \simeq E_0 \frac{v_0}{c} .$$

Pero, si  $m_0$  es la masa del objeto en reposo,

$$p = m_0 v_0 ,$$

luego

$$E_0 = m_0 c^2 . \tag{7}$$

Esta ecuación nos dice dos cosas muy importantes. Primero, mientras en Mecánica Clásica la energía de una partícula (cinética o potencial) está definida salvo una constante aditiva arbitraria, en Relatividad Especial dicha arbitrariedad no existe: en reposo, la partícula tiene una energía exactamente igual a  $m_0c^2$ . Segundo, la masa *es* energía, y viceversa. Esto es un hecho de consecuencias profundas, algunas de las cuales examinaremos más adelante. Y recordemos que esto es una consecuencia inevitable del Principio de Relatividad: si suponemos que las leyes de la Física son las mismas para todo sistema de referencia inercial, concluimos que la energía y la masa son, en realidad, lo mismo.

Para velocidades pequeñas, la energía tiene la forma:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \simeq E_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 \right] = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v_0^2 ,$$

es decir, la energía cinética usual, más una constante correspondiente a la energía en reposo.

Si consideramos ahora velocidades arbitrarias, podemos escribir

$$p = (m_0\gamma)v_0 , \quad E = (m_0\gamma)c^2 , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} ,$$

y si definimos la masa del objeto (medida por un observador para el cual el objeto se mueve con velocidad  $v_0$ ), como

$$m = m_0\gamma , \tag{8}$$

tenemos

$$p = mv_0 , \tag{9}$$

$$E = mc^2 . \tag{10}$$

La ecuación (8) dice que, a velocidades pequeñas ( $\gamma \simeq 1$ ), la masa es aproximadamente igual a la masa en reposo, pero a medida que la velocidad aumenta ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), la masa aumenta también hasta infinito. Como la masa es una medida de la inercia, se concluye que, mientras más rápido va una partícula, más difícil es acelerarla para aumentar aún más su velocidad, y en definitiva ninguna partícula material podría alcanzar la velocidad de la luz. El único modo de que una partícula se mueva a la velocidad de la luz es que siempre se haya movido con tal velocidad (fotones).

La energía cinética relativista se define simplemente como la diferencia entre la energía y la energía en reposo:

$$T = E - E_0 = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) . \quad (11)$$

Para velocidades pequeñas se recupera la expresión usual,

$$T \simeq m_0c^2 \frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 .$$

## 1.4 Transformaciones de coordenadas para energía y momentum

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales  $O$  y  $O'$ , que se mueven con velocidad relativa  $v_0$ . ¿Cómo se relacionan las coordenadas  $(E, p)$  medidas por un observador con las coordenadas  $(E', p')$  medidas por el otro observador? En otras palabras, si  $O$  ve una partícula y le mide su energía y su momentum, ¿qué energía y momentum asociará  $O'$  a la misma partícula? Esta pregunta, formulada para las coordenadas  $(x, t)$ , nos condujo a las transformaciones de Lorentz. Para responderla con los diagramas de energía y momentum, consideremos los dos sistemas de referencia y un punto en algún punto del diagrama (Fig. 57).

Es inmediato concluir, dado que este diagrama es (salvo por el nombre de los ejes) idéntico al análogo para las variables  $(x, t)$ , que el momentum y la energía también transforman de acuerdo a las transformaciones de Lorentz:

$$E = \gamma(E' + p'c\beta) , \quad (12)$$

$$pc = \gamma(p'c + E'\beta) . \quad (13)$$

En particular, esto significa que, como el espacio y el tiempo, la energía y el momentum constituyen en realidad una sola cosa y no se pueden separar. Más aún: puesto que son inseparables, y lo que es momentum para un observador puede ser energía para otro y viceversa, si el momentum se conserva, necesariamente debe conservarse la energía. En Relatividad Especial siempre se conservan ambos.

Es importante notar que la invariancia del intervalo  $(ct)^2 - x^2$  es una consecuencia directa de las transformaciones de Lorentz. Por tanto, ahora se tendrá una invariancia similar:

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 = \text{cte.}$$

Evaluemos esta constante:

$$E = mc^2 = m_0\gamma c^2 ,$$

$$p = mv_0 = m_0\gamma v_0 .$$

Así,

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1 - (v_0/c)^2} - \frac{m_0^2c^4(v_0/c)^2}{1 - (v_0/c)^2} ,$$

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 . \quad (14)$$

Ésta es la relación entre momentum y energía de una partícula en Relatividad Especial. Para momentum pequeño, se recupera la relación usual (salvo por la energía en reposo):

$$E \simeq m_0c^2 + \frac{p^2}{2m} , \quad p \ll m_0c .$$

Para velocidades altas,

$$E \simeq pc , \quad p \rightarrow \infty ,$$

es decir, las partículas se comportan como fotones (partículas ultrarrelativistas).

La expresión (14) sugiere finalmente cómo es posible que los fotones, siendo partículas, viajen a la velocidad de la luz: la única forma de que una partícula viaje a la velocidad de la luz, de modo que  $E = pc$ , es que  $m_0 = 0$ . Los fotones son partículas de masa cero.

En general, todos los estados posibles para una partícula de masa  $m$  están sobre una hipérbola en el plano  $\hat{E}$ - $\hat{p}c$ , que cruza el eje  $\hat{E}$  en  $m_0c^2$  (Fig. 58). Llamamos a esta hipérbola la *línea de estado* de la partícula. Para mayores masas, la hipérbola sube; para masas menores, baja, hasta que para  $m_0 = 0$  la línea de estado degenera en dos rectas que pasan por el origen, correspondientes a las bisectrices.

## 2 Colisiones de partículas elementales

### 2.1 Absorción de un fotón por un electrón

$$e^- + \gamma \longrightarrow e^-$$

¿Puede un electrón absorber un fotón? No. En la Fig. 59 trazamos:

- La línea de estado del electrón.
- El vector  $(0, m_0c^2)$  asociado al electrón en reposo.
- El vector  $(p_\gamma, h\nu)$  asociado al fotón.

Puesto que la energía y momentum totales del sistema corresponden a la suma de las energías y momenta de cada partícula, se sigue que el estado total del sistema está representado por la suma vectorial de los vectores dibujado. Además, como la energía y el momentum se conservan, dicha suma vectorial representa también el estado del sistema después de la colisión. Por lo tanto, la pregunta ¿puede un electrón absorber un fotón? es equivalente a preguntar: ¿puede el estado del sistema ser representado por un único vector que esté sobre la línea de estado del electrón?

La respuesta evidentemente es no. El punto resultante queda necesariamente fuera de la hipérbola que representa al electrón, y por tanto el estado final no puede consistir únicamente de un electrón.

## 2.2 Efecto Compton

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$$

Una modificación del problema anterior es considerar un estado final que consista no sólo de un electrón, sino también de un fotón. Esto cambia de modo fundamental los resultados. En efecto, consideremos un estado inicial consistente de un fotón moviéndose hacia la derecha, y un electrón en reposo (vectores rojos 1 y 2 en la Fig. 60). El estado total corresponde a la suma vectorial de ambos (punto 3). Hasta el momento la situación es idéntica al problema anterior. Sin embargo, ahora buscamos un estado final consistente, digamos, de un electrón que se mueve hacia la derecha, y un fotón hacia la izquierda. Geométricamente, deseamos descomponer el vector total  $\vec{O3}$  en dos vectores, uno sobre la línea de estado del electrón, y otro sobre la línea de estado del fotón. El hecho de que ahora el estado final sea también suma de dos vectores (en vez de uno como en el caso de la absorción), permite que exista una solución y ésta sea una colisión posible.

Para encontrar geoméricamente la solución trazamos desde 3 paralelas a las líneas de estado de los fotones. Una de dichas paralelas interseca la hipérbola del electrón en 4. Es claro que  $\vec{O4} + \vec{43} = \vec{O3}$ . Además,  $\vec{43}$  es un vector de estado de un fotón (el vector de energía  $h\nu'$  en la Fig. 60), y  $\vec{O4}$  es un

vector de estado de un electrón, luego hemos encontrado la descomposición buscada. Después de la colisión hay un electrón de energía cinética  $T$  y momentum de retroceso  $p_R$ , y un fotón de energía  $h\nu'$

Encontremos la relación entre las energías inicial y final del fotón. Observemos primero que

$$\overline{O8} = \overline{O6} + \overline{68} .$$

Como  $E = pc$  para fotones, se tiene además

$$\overline{O6} = \overline{O7} , \quad \overline{68} = \overline{59} .$$

Además,

$$\overline{O7} + \overline{59} = h(\nu + \nu') .$$

Luego

$$p_R c = \overline{O8} = h(\nu + \nu') .$$

Por otro lado, la energía cinética del electrón está dada por:

$$T = \overline{15} = \overline{19} - \overline{59} = h(\nu - \nu') .$$

Por lo tanto,

$$T = h(\nu - \nu') = \sqrt{p_R^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 ,$$

es decir,

$$\begin{aligned} h(\nu - \nu') &= \sqrt{h^2(\nu + \nu')^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 , \\ [h(\nu - \nu') + m_e c^2]^2 &= h^2(\nu + \nu')^2 + m_e^2 c^4 , \\ 2m_e c^2 h(\nu - \nu') &= 4h^2 \nu \nu' , \\ \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} &= \frac{2h}{m_e c^2} . \end{aligned}$$

Pero  $\nu = c/\lambda$ , luego encontramos la relación

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c} . \quad (15)$$

Aparece aquí una distancia característica, denominada *longitud de onda de Compton*,  $\lambda_c = h/m_e c = 0.02426 \text{ \AA}$ .

La relación (15) puede ser verificada experimentalmente. Este efecto, conocido como *efecto Compton*, sólo puede ser entendido considerando el fotón como una partícula sin masa, capaz de colisionar elásticamente con un electrón.

## 2.3 Aniquilación

$$e^- + e^+ \longrightarrow 2\gamma$$

Cuando una partícula y una antipartícula se encuentran, se aniquilan, dando origen a dos fotones. En este caso, consideremos un electrón y su antipartícula, el positrón, que tiene la misma masa, pero carga positiva.

Inicialmente, tenemos un electrón en reposo en el laboratorio, y un positrón moviéndose hacia la derecha, con cierta energía cinética  $T$  (Fig. 61). El estado total corresponde a la suma vectorial de los dos vectores iniciales rojos. Dicho estado debe ser descompuesto como suma vectorial de dos fotones. El método es análogo al usado para el efecto Compton: la única diferencia es que ahora no uno sino los dos vectores finales corresponden a fotones.

Trazamos entonces, desde el punto del estado total, las paralelas a las líneas de estado de fotones. Las intersecciones con éstas dan origen a los vectores  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , cuya suma evidentemente es igual al vector de estado total, y por tanto corresponden a la solución del problema.

## 2.4 Fisión de un núcleo

Una de las consecuencias más importantes de la equivalencia entre masa y energía, es el hecho de que la división de un núcleo en fragmentos conlleva la liberación de enormes cantidades de energía. La razón es que para que las partículas que componen un núcleo se mantengan unidas, se requiere una cierta energía (energía de ligazón), que queda disponible una vez que el núcleo se rompe.

Consideremos un núcleo de masa  $m_0$ , que se divide en dos fragmentos de masas  $m_1$  y  $m_2$ .  $m_1$  se mueve hacia la izquierda, y  $m_2$  hacia la derecha. En principio, podrían no moverse, pero es un hecho experimental que  $m_1 + m_2 < m_0$ , luego, por conservación de energía, necesariamente

$$m_0c^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + T, \quad T > 0,$$

de modo que hay una energía cinética disponible  $T$ . Vemos entonces cómo la energía de ligazón del núcleo inicial se ha convertido parcialmente en energía cinética. Ésta es la base de los reactores nucleares.

La solución geométrica de este problema se encuentra en la Fig. 62.

Dibujamos las líneas de estado del núcleo inicial y de los dos núcleos finales.

Sean los vértices de las hipérbolas 0, 1 y 2,  $V_0$ ,  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente.

La energía total disponible es  $m_0c^2$ , y se debe distribuir entre las masas de los núcleos finales y la energía cinética total final:

$$m_0c^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + T_1 + T_2 .$$

Geoméricamente, esto corresponde a dividir el trazo desde  $O$  a  $m_0c^2$  en 4 trazos, dos de los cuales ya conocemos.

Marcamos un punto  $A$  a una distancia  $m_2c^2$  debajo del vértice de la hipérbola 0. La energía cinética disponible es la distancia entre este punto y el vértice de la hipérbola 2.

Dibujamos la hipérbola 2 invertida desde el punto recién dibujado, y marcamos el punto  $B$  de intersección entre la hipérbola 2 invertida y la hipérbola 1. Afirmamos que este punto representa el estado del núcleo 1 tras la colisión. Supongamos que es cierto, y al final veremos que esto es consistente con la conservación de la energía y el momentum.

Para mostrarlo, trazamos el segmento horizontal  $BC$ , que cruza el eje vertical en  $D$ .  $\overline{V_1D}$  es la energía cinética  $T_1$ .  $\overline{AD}$  es entonces  $T_2$ .

Copiamos  $\overline{AD}$  desde  $V_2$  hacia arriba, marcando el punto  $F$ .  $\overline{V_2F}$  es  $T_2$ , entonces. Trazamos desde  $F$  hacia la izquierda un segmento horizontal que corta la hipérbola 2 en  $G$ . Afirmamos que  $G$  es el estado del núcleo 2 tras la colisión.

En efecto, por construcción  $m_0c^2 = \overline{OV_0} = \overline{OV_1} + \overline{V_1D} + \overline{DA} + \overline{AV_0} = m_1c^2 + T_1 + T_2 + m_2c^2$  (conservación de energía).

Además, por simetría entre la hipérbola 2 y su versión invertida,  $\overline{GF} = \overline{DB}$ . Pero  $\overline{GF} = p_2c$ , y  $\overline{DB} = p_1c$ , luego  $p_2 + p_1 = 0 = p_0$  (conservación de momentum).

Este problema tiene otra solución, si consideramos el punto  $C$  como el estado del núcleo 1 después de la colisión (ver Fig. 63). La figura resultante es idéntica, pero reflejado respecto al eje  $\hat{E}$ . Las dos soluciones reflejan el hecho de que la partícula final más pesada puede ir hacia la derecha o hacia la izquierda.

## 2.5 Energía umbral

Si la masa puede convertirse en energía (fisión nuclear), también la energía puede convertirse en masa. Ello se observa, por ejemplo, en la siguiente colisión:

$$p + p \longrightarrow p + p + \pi_0 .$$

Si pensamos, por ejemplo, en el centro de masas, tenemos inicialmente dos protones moviéndose en direcciones opuestas. Al colisionar, los dos protones podrían quedar en reposo, con lo cual la energía cinética inicial de los protones estaría disponible. Si dicha energía cinética es suficientemente grande, entonces se puede convertir en un pión. ( $m_\pi = 264m_e$ ,  $m_e = 0.511$  MeV,  $m_p = 938$  MeV.)

Usualmente, estos procesos se realizan en aceleradores que hacen incidir un haz de protones sobre un blanco de protones en reposo. Deseamos saber cuál es la mínima energía cinética del protón incidente (energía umbral) para generar el pión. Visto en el centro de masas, esto ocurre cuando, después de la colisión, quedan los protones juntos, de modo que toda la energía se transforma en masa. Si la energía cinética es mayor que la umbral, se producirá por supuesto el pión, pero las partículas finales quedarán en algún estado de movimiento que conserve el momentum.

Primero resolvemos el problema en el centro de masas (Fig. 64). Trazamos la línea de estado de los protones. Como el estado final corresponde a todas las partículas en reposo, debe ser un punto sobre el eje  $\hat{E}$ , a una distancia  $E = (2m_p + m_\pi)c^2$  del origen. Dibujamos el punto que está a una distancia  $E/2$  del origen, y trazamos una paralela al eje  $\hat{p}c$  que pase por ese punto. Dicha paralela interseca a la hipérbola de los protones en 1 y 2. Por simetría, es claro que la suma de los vectores  $\vec{O1}$  y  $\vec{O2}$  es el punto inicial, y por tanto corresponden a la solución del problema. Ambos protones deben tener un momentum inicial  $\bar{p}c$ , y energía  $E/2$ . La energía umbral entonces, en el centro de masas, es:

$$U_{\text{cm}} = \frac{E}{2} - m_p c^2 = \frac{1}{2} m_\pi c^2 . \quad (16)$$

En la figura, los vectores 1 y 2 determinan un ángulo  $\alpha$  dado por

$$\tan \alpha = \frac{\bar{p}c}{\left(m_p + \frac{m_\pi}{2}\right) c^2} , \quad (17)$$

con

$$\sqrt{\bar{p}^2 c^2 + m_p^2 c^4} = \left(m_p + \frac{m_\pi}{2}\right) c^2 . \quad (18)$$

La solución en el laboratorio es descrita en la Fig. 65.

Consideramos el protón 1 en reposo, y el 2 en movimiento. Tomamos los mismos vectores anteriores, pero ahora agregamos los ejes  $\hat{E}'$  y  $\hat{p}'c$  para la partícula 1. Como 1 está en reposo en este sistema, su estado está sobre el eje  $\hat{E}'$ , luego  $\hat{E}'$  es paralelo al vector 1. La energía del protón 2, que en el centro de masas está dado por la proyección  $\hat{E}$  del vector 2, ahora es la proyección  $\hat{E}'$  de dicho vector, luego el punto 3 es la energía del protón 2 en el laboratorio. La diferencia entre dicha energía y la energía en reposo es la energía umbral en el laboratorio:

$$U_{\text{lab}} = \overline{13} = \overline{O3} - \overline{O1} .$$

Observando que el ángulo entre las bisectrices es  $\pi/2$ , podemos convencernos de que el triángulo  $O23$  es recto en 2. Luego

$$\overline{O3} = \frac{\overline{O2}}{\cos(2\alpha)} .$$

Ahora bien,  $\overline{O2} = \overline{O1} = m_p c^2$ , y de (17) y (18) se sigue que

$$\frac{1}{\cos(2\alpha)} = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 1 + \frac{m_\pi}{m_p} \left( 2 + \frac{1}{2} \frac{m_\pi}{m_p} \right) .$$

Así,

$$U_{\text{lab}} = m_\pi c^2 \left( 2 + \frac{1}{2} \frac{m_\pi}{m_p} \right) .$$

En el laboratorio, se requiere más del doble de la masa del pión, mucho más que en el centro de masas, donde cada protón tiene energía cinética igual a la mitad de la masa del pión. Debido a esto, es mucho más conveniente diseñar aceleradores que permitan estudiar este tipo de procesos en el centro de masas, haciendo colisionar dos haces que viajan en sentidos opuestos, en vez de un solo haz impactando un blanco en reposo.

## 2.6 Fotodestrucción

Consideremos el siguiente proceso: un fotón moviéndose hacia la derecha colisiona con un deuterón (un núcleo formado por un neutrón y un protón) en reposo. Como resultado, el deuterón se separa en sus componentes, liberando energía que queda disponible como energía cinética de las partículas resultantes:

$$\gamma + d \longrightarrow p + n .$$

Geoméricamente, la situación se muestra en la Fig. 66.

Dibujamos los estados iniciales del deuterón (en reposo) y del fotón (moviéndose hacia la derecha). El vector suma resultante da los valores de  $E$  y  $pc$  totales disponibles, los cuales se distribuirán entre las dos partículas finales. Salvo por el hecho de que el vector resultante está fuera del eje  $\hat{E}$ , está es la misma situación que cuando estudiamos la fisión de un núcleo: una cierta cantidad de energía y momentum a distribuir entre dos partículas. Esto sugiere utilizar la misma estrategia de hipérbolas invertidas.

La energía disponible es  $m_d c^2 + E_\gamma = \overline{AB}$ . Esto sugiere, siguiendo la analogía con la fisión, que, en vez de invertir sobre el eje  $\hat{E}$ , debemos invertir sobre el eje  $\overline{AB}$ . Marcamos entonces el punto  $C$  a una distancia  $m_p c^2$  bajo el punto  $A$ , y trazamos la hipérbola  $p$  invertida ( $-p$ ) con vértice en  $C$ . Proyectamos luego  $C$  sobre el eje  $\hat{E}$ , marcando el punto  $D$ .

La energía cinética disponible es  $E - m_p c^2 - m_n c^2 = \overline{AB} - \overline{OV_p} - \overline{AC} = \overline{V_n D}$ , a distribuir entre  $T_n$  y  $T_p$ .

La intersección de  $-p$  con  $n$  es el punto  $F$ , que afirmamos es el estado del neutrón después de la colisión. Trazamos el segmento horizontal  $\overline{FG}$ , que cruza el eje  $\hat{E}$  en  $H$ , y el eje  $\overline{AB}$  en  $I$ . La energía cinética disponible se distribuye entonces en  $T_n = \overline{V_n H}$  y  $T_p = \overline{CI}$ .

Si copiamos  $\overline{CI}$  desde  $V_p$  hacia arriba obtenemos el punto  $J$ , contenido en el segmento horizontal  $\overline{KL}$ . El punto  $K$ , a la izquierda de  $\hat{E}$ , corresponde al estado del protón después de la colisión.

En efecto, la conservación de la energía se cumple, puesto que  $E = \overline{AB} = \overline{OV_n} + \overline{V_n H} + \overline{IC} + \overline{CA} = \overline{OV_n} + \overline{V_n H} + \overline{V_p J} + \overline{OV_p} = m_n c^2 + T_n + T_p + m_p c^2$ .

La conservación de momentum, en tanto, se obtiene del hecho que por construcción,  $\overline{JK} = \overline{FI}$ . Pero  $\overline{JK} = p_p c^2$  y  $\overline{FH} = p_n c^2$ , luego  $p_p c^2 + p_n c^2 = \overline{HI} = p_\gamma$ , el momentum total.

Como el problema de la fisión, hay dos soluciones (Fig. 67), ya sea que consideremos que el estado del neutrón es  $F$  o la otra intersección de  $-p$  con  $n$ ,  $M$ . Esto corresponde a la situación en que el neutrón queda con velocidad hacia la derecha o hacia la izquierda.

## 2.7 Colisión protón-pión

Una colisión podría resultar en partículas finales, ninguna de las cuales sea alguna de las partículas iniciales:

$$\pi^+ + p \longrightarrow \Sigma^+ + K^+ .$$

El análisis, sin embargo, no es distinto. Este caso es similar al anterior, salvo que una de las partículas iniciales, en vez de ser un fotón, es un pión. Por lo tanto podemos aplicar la misma estrategia. Las dos soluciones posibles se muestran en las Figs. 68 y 69.

## 2.8 Energía umbral (par protón-antiprotón)

En este caso, la energía cinética es convertida en un par protón-antiprotón:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p} .$$

La energía umbral se tiene cuando, en el centro de masas, las cuatro partículas quedan en reposo. Es decir, cuando en el laboratorio, las cuatro partículas quedan juntas, formando una sola de masa  $4m_p$ .

En la Fig. 70 dibujamos las líneas de estado para el protón ( $p$ ) y la partícula final ( $4p$ ). Los vectores iniciales son el protón en reposo y algún otro vector sobre la hipérbola  $p$ . El vector final es algún punto sobre la curva  $4p$ .

La energía total es  $2m_p c^2 + T_U$ , con  $T_U$  la energía cinética umbral que buscamos. Como  $m_p c^2 + T$  es la hipérbola  $p$ , es claro que desplazándola  $m_p c^2$  hacia arriba obtenemos todos los puntos que tienen la energía final disponible (curva  $p_{||}$ ). La intersección de  $p_{||}$  (la curva de energía total disponible) con  $4p$  (la línea de estado de la partícula final) da el punto  $A$ , que es el estado final del sistema.

Proyectando  $A$  sobre el eje  $\hat{E}$  obtenemos el punto  $B$ . El segmento  $\overline{V_{4p}B} = T_F$ , la energía cinética final del sistema.

Como el momentum total tiene que conservarse, y el momentum de uno de los protones iniciales es cero, el momentum del otro protón debe ser igual que el de la partícula final. Proyectando  $A$  hacia abajo, intersectamos la curva  $p$  en  $C$ , que es el estado del protón inicialmente en movimiento. Ya tenemos la conservación de momentum.

Proyectamos ahora  $C$  sobre el eje  $\hat{E}$ , obteniendo el punto  $D$ .  $\overline{V_p D}$  es la energía cinética de este protón, que debe ser entonces  $T_U$ . En efecto, notamos

que la energía total es  $E = \overline{OB} = \overline{OV_p} + \overline{V_pD} + \overline{CA} = m_p c^2 + T_U + m_p c^2 = 2m_p c^2 + T_U$ , como debe ser si se conserva la energía.

Calculemos la energía umbral usando la relación entre energía y momentum. La energía inicial del protón en movimiento está dada por

$$m_p c^2 + U = \sqrt{p_0^2 c^2 + m_p^2 c^4} , \quad (19)$$

con  $U$  la energía cinética umbral que buscamos. Así, la energía total inicial es

$$E = 2m_p c^2 + U .$$

Ésta debe ser igual a la energía de la “partícula” final, luego

$$2m_p c^2 + U = \sqrt{p_0^2 c^2 + (4m_p)^2 c^4} , \quad (20)$$

donde hemos usado que se conserva el momentum (de modo que el momentum final debe ser igual al inicial, que es  $p_0$ ). Elevando al cuadrado las ecs. (19) y (20), y restándolas:

$$-(m_p c^2 + U)^2 + (2m_p c^2 + U)^2 = 15m_p^2 c^4 ,$$

es decir

$$U = 6m_p c^2 . \quad (21)$$

## 2.9 Decaimiento de un átomo excitado

Los átomos pueden estar en uno de varios estados posibles. Al estado de menor energía se le denomina *estado fundamental*, y al resto se les denomina *estados excitados*. Un átomo excitado puede decaer en el estado fundamental, liberando la diferencia de energía como un fotón.

$$A^* \longrightarrow A + \gamma .$$

Estudiemos el problema geoméricamente (ver Fig. 71).

Dibujamos las líneas de estado de  $A$  y  $A^*$ . Que el átomo esté excitado significa que tiene más energía, esto es mayor masa en reposo, luego su hipérbola está más arriba. El estado inicial es  $A^*$  en reposo. El estado final son dos vectores, uno sobre  $A$  y otro sobre  $F$  (líneas de estado de  $A$  y el fotón, respectivamente), tales que sumados den el estado inicial.

Como en los ejemplos de fusión y de fotodestrucción anteriores, hay una cierta energía inicial disponible para distribuir en dos curvas, y por tanto usaremos la misma estrategia de invertir líneas de estado. La diferencia acá es que la curva de menor masa es una recta, pero el mismo procedimiento debe ser aplicable, pues nunca utilizamos el hecho de que fueran hipérbolas explícitamente.

La energía total es  $\overline{OV_{A^*}}$ , luego invertimos sobre el eje  $\hat{E}$ . La masa asociada a  $F$  es cero, luego el vértice de  $-F$  coincide con  $V_{A^*}$ . La intersección de  $-F$  con  $A$  da dos puntos,  $B$  y  $C$ , que son los dos estados posibles del átomo  $A$ , según si se mueve a la izquierda o a la derecha. Escojamos el punto  $B$  (el átomo se mueve hacia la derecha).  $\overline{BC}$  corta al eje  $\hat{E}$  en  $D$ , estableciendo la distribución de la energía cinética:  $\overline{V_A D} = T_A$ , y  $\overline{DV_{A^*}} = T_{A^*}$ . Proyectando  $C$  hacia abajo intersectamos a  $F$  en  $G$ , lo que da el vector de estado del fotón final.